



**ECOLE INTER-ETATS DES TECHNICIENS SUPERIEURS
DE L'HYDRAULIQUE ET DE L'EQUIPEMENT RURAL**

01 BP 594 Ouagadougou 01 Burkina Faso

Tél : (226) 31 92 03 / 31 92 04 / 31 92 18

Email : etsher@etsher.org Fax : (226) 31 92 34

COURS DE STRUCTURE

Tome III

MECANIQUE DES STRUCTURES

SOMMAIRE

I. STATIQUE GRAPHIQUE : RESOLUTION GRAPHIQUE DE PROBLEME DE STATIQUE PLANE.....	4
I.1. TRACE DE LA RESULTANTE DE 2 FORCES CONCOURANTES.....	4
I.2. EQUILIBRE D'UN SOLIDE	5
I.2.1. Traduction graphique du P.F.S.....	5
I.2.2. Remarque	5
I.3. CAS FONDAMENTAUX ELEMENTAIRES D'EQUILIBRE	5
I.3.1. Cas élémentaire n° 1	5
I.3.2. Cas élémentaire n°2	6
I.3.3. Application aux portiques à 3 articulations.....	8
I.4. DECOMPOSITION D'UNE FORCE. CHOIX D'UN POLE.....	10
I.4.1. Décomposition d'une force (dans le plan des forces)	10
I.4.2. Décomposition d'une force (dans le plan physique)	10
I.5. FORCE EQUIVALENTE A UN ENSEMBLE DE FORCES.....	11
I.5.1. Travail dans le plan des forces : (dynamique).....	11
I.5.2. Travail dans le plan physique : (funiculaire).....	11
I.6. APPLICATION DU P.F.S AVEC LA DECOMPOSITION POLAIRE.	13
II. SYSTEMES TRIANGLES PLANS	15
II.1. TRIANGULATION D'UNE STRUCTURE.....	18
II.1.1. Description mécanique de la construction.....	18
II.1.2. Problème de la rigidité de la structure	19
II.2. CALCUL DE SYSTEMES RETICULES : LES HYPOTHESES ET ETAPES COMMUNES A TOUTES LES METHODES	20
II.2.1. Hypothèses de calcul.....	20
II.2.2. Cas particulier de nœuds.....	21
II.3. CALCUL DE SYSTEMES RETICULES : METHODE ANALYTIQUE.....	23
II.3.1. Méthode de calcul des efforts dans les barres	23
II.3.2. Présentation des résultats	26
II.4. CALCUL DE SYSTEMES RETICULES : METHODE DE CREMONA (METHODE DES NEUDS).....	27
II.5. CALCUL DE SYSTEMES RETICULES : METHODE DE RITTER (METHODE DES SECTIONS)	30
II.6. SYNTHESE ENTRE METHODE DE RITTER ET DE CREMONA.....	33
III. POUTRES HYPERSTATIQUES	35
III.1. AVANT-PROPOS : DEFORMATION D'UNE STRUCTURE	35
III.2. DEFORMATION ELEMENTAIRE D'UN TRONÇON DE POUTRE.....	37
III.2.1. Déformations élémentaires d'un tronçon due à l'effort normal N	37
III.2.2. Déformation élémentaire due à M_f	37
III.3. THEOREMES ENERGETIQUES.....	39
III.3.1. Théorie du potentiel interne	39
III.3.2. Théorème de CASTIGLIANO (utilisation de l'expression ci-avant de l'énergie potentiel pour calculer des déformations)	40
III.3.3. Théorème de MENABREA (utilisation du théorème de CASTIGLIANO ci-avant pour calculer des réactions d'appui)	42
III.3.4. Méthode de la Force Fictive (utilisation du théorème de CASTIGLIANO pour	

calculer des déformations à partir d'une force fictive).....	43
III.3.5. Théorème de Bertrand de FONTVIOLLANT (Méthode des forces)	45
III.4. ETUDE DES POUTRES CONTINUES : UTILISATION DES FORMULAIRES	48
III.4.1. Méthode de résolution.....	48
IV. BIBLIOGRAPHIE	52
V. ANNEXES.....	53
V.1. FORMULAIRE : POUTRES EN FLEXION A 1 TRAVEE INDEPENDANTE	53
V.2. FORMULAIRE : POUTRES CONTINUES	57

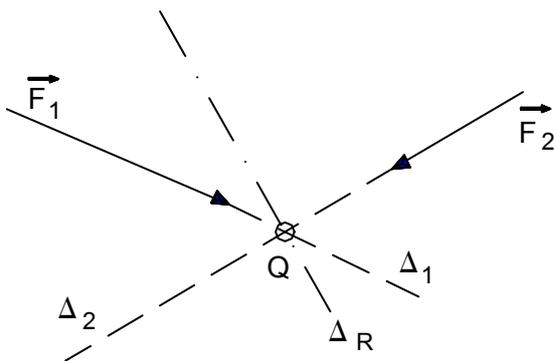
I. STATIQUE GRAPHIQUE : RESOLUTION GRAPHIQUE DE PROBLEME DE STATIQUE PLANE

L'étude graphique d'un équilibre fait intervenir deux figures, tracées en respectant des échelles, sur lesquelles sont reportées respectivement :

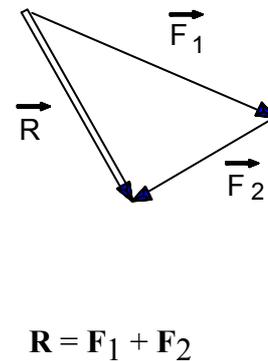
- LES DROITES D'ACTION DES FORCES. C'est le plan de situation, tracé à l'échelle des longueurs. Il permet de vérifier l'équilibre en moment du solide. Cette figure s'appelle le **FUNICULAIRE**,
- LA SOMME VECTORIELLE DES FORCES. C'est le plan des forces, tracé à l'échelle des forces. Ils permet de vérifier l'équilibre du solide en résultante. Cette figure est appelée le **DYNAMIQUE** du système.

I.1. TRACE DE LA RESULTANTE DE 2 FORCES CONCURRENTES

PLAN DE SITUATION
Funiculaire tracé à l'échelle des longueurs.



PLAN DES FORCES
Dynamique tracé à l'échelle des forces.



- Le tracé de la somme vectorielle des forces F_1 et F_2 donne la direction, le sens et l'intensité de R
- La ligne d'action R est obtenue sur le plan de situation. Elle passe par le point Q , intersection de Δ_1 et Δ_2 .

En effet

$$M_{F_1/Q} = M_{F_2/Q} = 0$$

Donc

$$M_{(F_1+F_2)/Q} = 0$$

La résultante R ayant un moment en Q nul, sa ligne d'action doit donc passer par ce point.

I.2. EQUILIBRE D'UN SOLIDE

I.2.1. Traduction graphique du P.F.S.

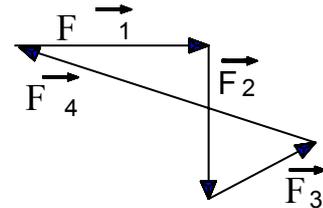
Une C.N.S. d'équilibre d'un solide est :

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$$

et

$$\sum \mathbf{M}_{\mathbf{F}_{\text{ext}}/\mathbf{P}} = 0 \text{ quel que soit } \mathbf{P}$$

L'équilibre en **RESULTANTE** indique que la figure formée par la juxtaposition de toutes les forces exercées sur le solide se referme. Ce qui revient à dire que le dynamique des forces extérieures appliquées au système est fermé.



Exemple si 4 forces

L'équilibre en moment impose que dans toute partition en 2 groupes des efforts extérieurs agissant sur le solide, les lignes d'action des résultantes de chaque groupe de forces soient confondues.

I.2.2. Remarque

L'application **ANALYTIQUE** du **P.F.S.** permet la détermination d'au plus 3 inconnues de liaison par solide isolé (3 composantes de forces).

Il en est évidemment de même de la traduction **GRAPHIQUE** d'un équilibre.

I.3. CAS FONDAMENTAUX ELEMENTAIRES D'EQUILIBRE

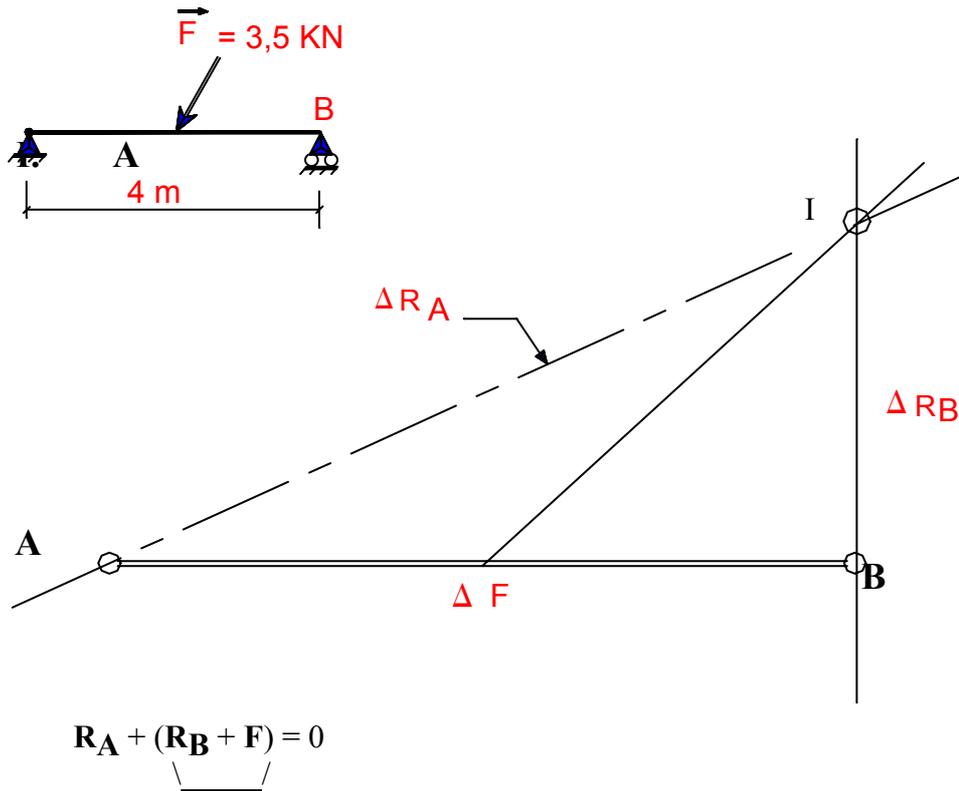
Les cas élémentaires sont définis en fonction de la nature des inconnues de liaison à déterminer (module de la force, direction de la force).

Ils constituent des cas types auxquels il faudra se rapporter pour les études générales d'équilibre.

I.3.1. Cas élémentaire n° 1

Les forces inconnues sont au nombre de 2 et sont constituées de :

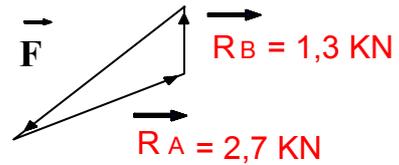
- Une force de direction et module inconnus, passant par un point **A** (articulation en **A**).
- Une force dont la droite d'action est fixée et le module inconnu (appui simple de direction **y** en **B**).



Les trois forces F , R_A et R_B doivent être concourantes. Donc R_A passe par I , intersection des lignes d'action de F et R_B .

La droite d'action de R_A passe par A et I .

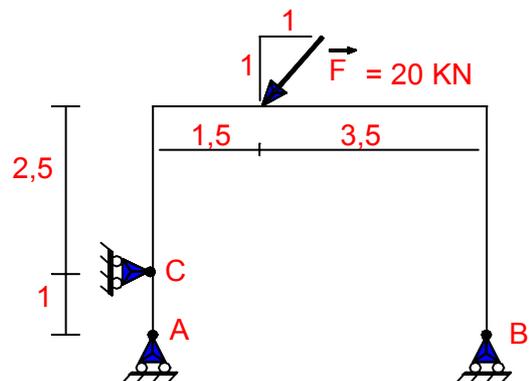
Les directions de toutes les forces en présence étant maintenant déterminées, il devient possible de travailler dans le plan des forces pour trouver les modules de R_A et R_B en traçant le dynamique des efforts extérieurs.



Echelle : 1 kN <-> 1 cm

I.3.2. Cas élémentaire n°2

Les inconnues de liaison à déterminer sont 3 forces de modules inconnus, mais dont les droites d'action sont connues (appuis simples en A , B , C). Pour ne pas que le système soit dégénéré, il faut que les lignes d'action des appuis simples ne soient pas toutes concourantes.



La méthode consiste à regrouper 2 à 2 les efforts intervenant dans le problème et à raisonner avec les 2 résultantes partielles.

$$\underbrace{F + R_A}_{\text{partielle}} + \underbrace{R_B + R_C}_{\text{partielle}} = 0$$

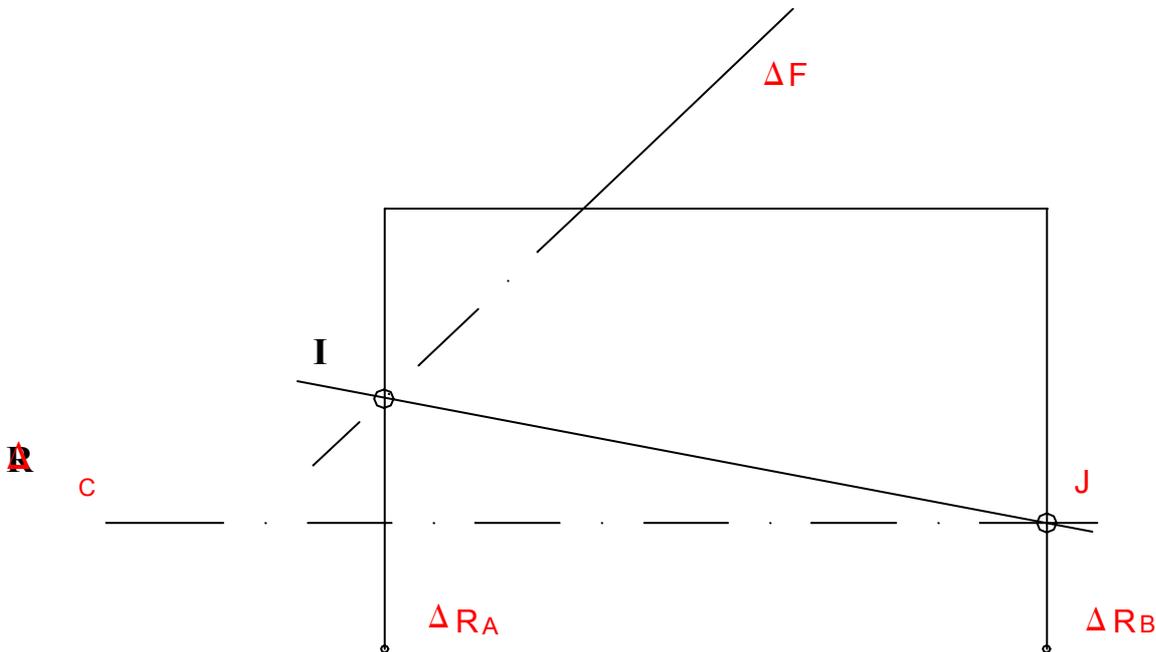
La droite d'action de cette résultante partielle passe par **I** (intersection de R_A et de F).

La droite d'action de cette résultante partielle passe par **J** (intersection de R_B et de R_C).

Ces deux résultantes partielles doivent être égales et opposées puisque le système est en équilibre. Leur ligne d'action est donc la droite **IJ**.

Il est maintenant possible de travailler dans le plan des forces pour déterminer le module des inconnues.

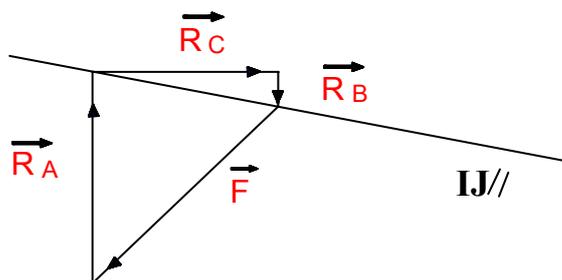
- Le tracé partiel du dynamique donne les vecteurs R_B et $(F + R_A)$ dans un premier temps.
- Il est ensuite immédiat d'obtenir R_B et R_C en fermant le dynamique.



$$R_A = 17,5 \text{ KN}$$

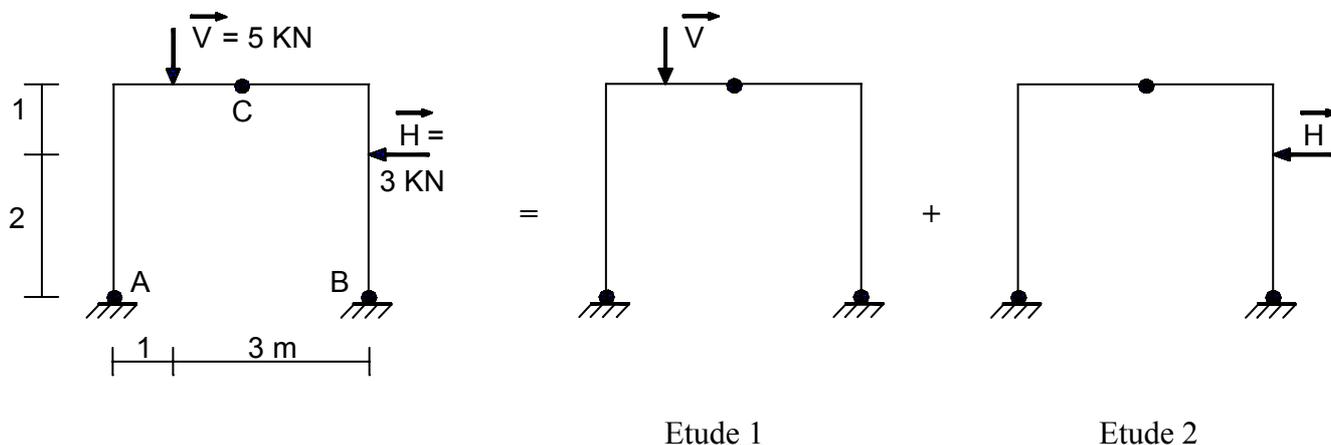
$$R_B = 2,7 \text{ KN}$$

$$R_C = 14,0 \text{ KN}$$



I.3.3. Application aux portiques à 3 articulations

L'étude graphique n'est possible que si un des demi-portiques est déchargé. Dans le cas contraire, il est nécessaire de décomposer le chargement initial en deux chargements complémentaires, chacun faisant l'objet d'un calcul de réaction d'appui.

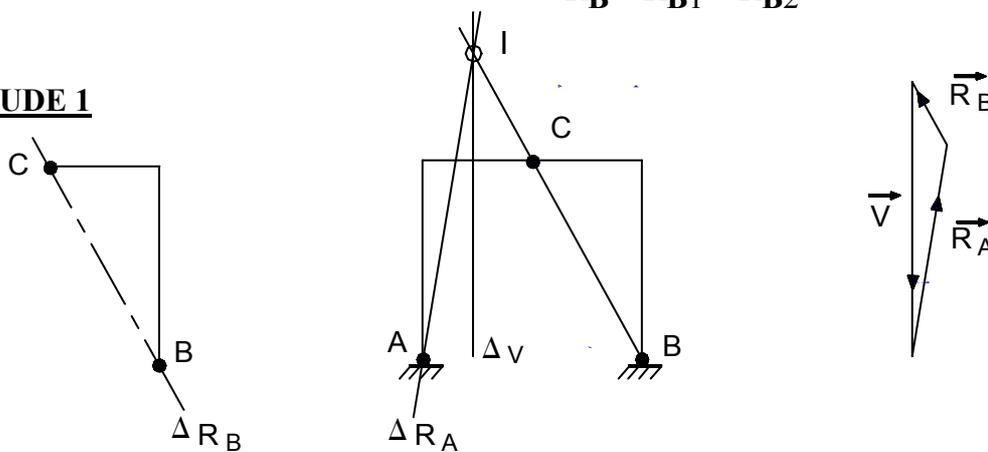


En superposant les résultats :

$$\mathbf{R}_A = \mathbf{R}_{A1} + \mathbf{R}_{A2}$$

$$\mathbf{R}_B = \mathbf{R}_{B1} + \mathbf{R}_{B2}$$

ETUDE 1



1/2 portique droit : Solide en équilibre soumis à l'action de deux forces. Elles sont donc égales et directement opposées.

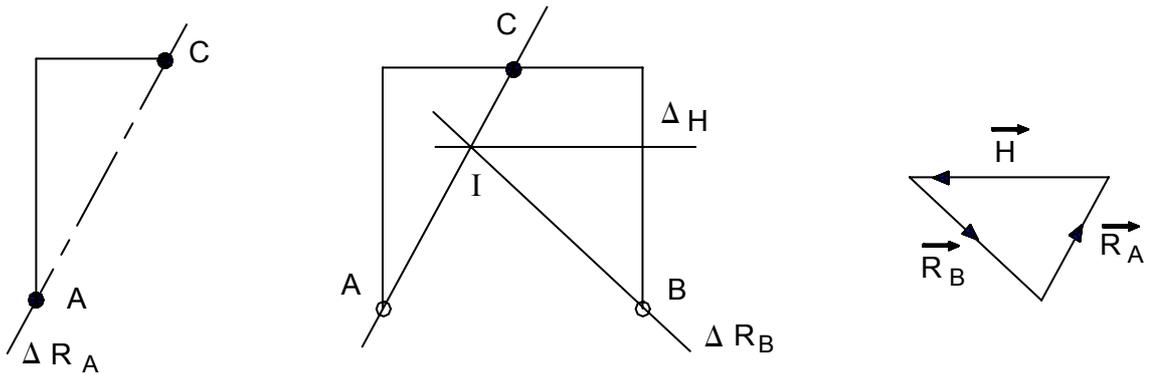
$$\mathbf{R}_B // \text{à } BC$$

Portique complet : Solide soumis à 3 forces. Une condition nécessaire d'équilibre est qu'elles soient concourantes.

$$\text{Donc } \mathbf{R}_A \text{ passe par } I \text{ (} \mathbf{R}_A // \text{ à } AI \text{) .}$$

Les directions de toutes les forces sont connues. Le dynamique fourni alors les modules.

ETUDE 2



1/2 portique gauche : Solide en équilibre soumis de 2 forces. Elles sont donc directement opposées.

$$\mathbf{R}_A \parallel \text{à } \mathbf{AB}$$

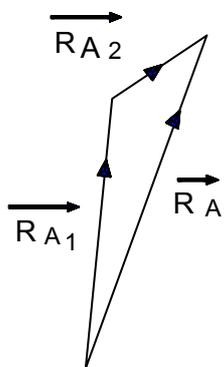
Portique complet : Solide soumis à 3 forces. Un C.N. d'équilibre est qu'elles soient concourantes.

Donc \mathbf{R}_B passe par I.

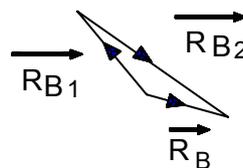
La direction de chacune des forces est connue. Le tracé du dynamique fourni alors les modules des forces inconnues.

Superposition des résultats :

Les réactions d'appui \mathbf{R}_A et \mathbf{R}_B sous le chargement initial total ($\mathbf{H} + \mathbf{V}$) sont obtenues par composition graphique des réactions d'appui correspondant aux études 1 et 2.



$$\mathbf{R}_A =$$



$$\mathbf{R}_B =$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_A &= \mathbf{R}_{A1} + \mathbf{R}_{A2} \\ \mathbf{R}_B &= \mathbf{R}_{B1} + \mathbf{R}_{B2} \end{aligned}$$

I.4. DECOMPOSITION D'UNE FORCE. CHOIX D'UN POLE

La résolution graphique d'un problème d'équilibre statique repose sur la recherche de la position du point d'intersection des lignes d'action des forces . Lorsque les efforts en jeu sont sensiblement parallèles, ce point d'intersection est situé en dehors de la feuille d'épure, et la méthode de travail précédente n'est plus directement applicable.

En pareil cas, il faut remplacer les efforts extérieurs initialement fournis par un autre système de forces mécaniquement équivalentes, mais dont les efforts constitutifs ont des directions plus avantageuses.

I.4.1. Décomposition d'une force (dans le plan des forces)

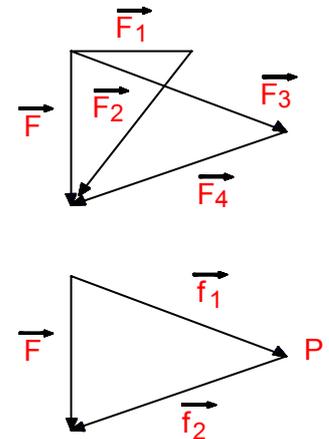
Une force F peut être décomposée de multiples façons en deux forces.

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 \\ &= F_3 + F_4 \quad \text{etc} \end{aligned}$$

Le choix d'un point P du plan des forces rend unique la décomposition de F en deux forces. Le point P est appelé pôle.

$$F = f_1 + f_2$$

f_1 et f_2 sont les rayons polaires de F associés au pôle P .

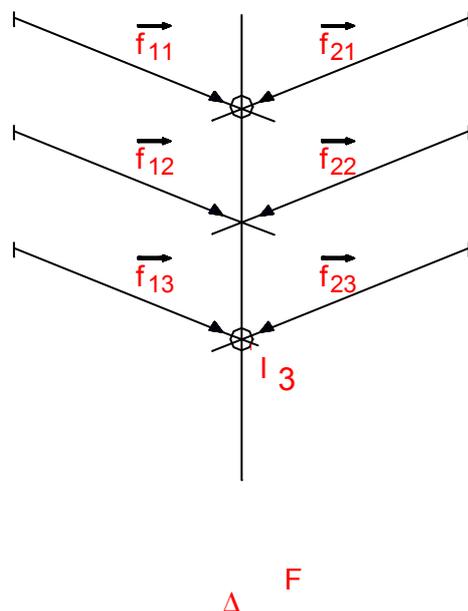


I.4.2. Décomposition d'une force (dans le plan physique)

Il existe une multitude de systèmes (f_1, f_2) équivalents à F , puisqu'il suffit que les lignes d'action des deux forces f_i se coupent sur la ligne d'action de F .

Par exemple, les systèmes suivants sont tous équivalents.

$$\begin{aligned} &(F), \\ &(f_{11}, f_{21}), \\ &(f_{12}, f_{22}), \\ &(f_{13}, f_{23}), \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$



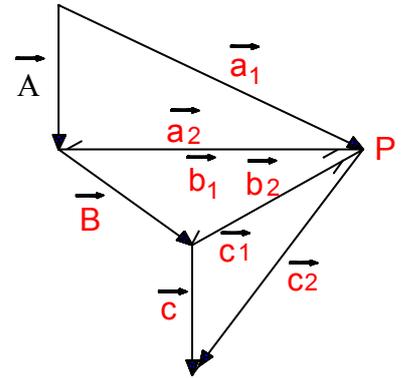
I.5. FORCE EQUIVALENTE A UN ENSEMBLE DE FORCES.

I.5.1. Travail dans le plan des forces : (dynamique)

- Le dynamique du système est tracé et la résultante **R** est obtenue.

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$$

- Un pôle **P** est choisi arbitrairement et chacune des forces est décomposée en rayons polaires.



$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2 &= -\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{B} &= \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 & \text{et} & \\ \mathbf{C} &= \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 & \mathbf{b}_2 &= -\mathbf{c}_1 \end{aligned}$$

Il apparaît donc que :

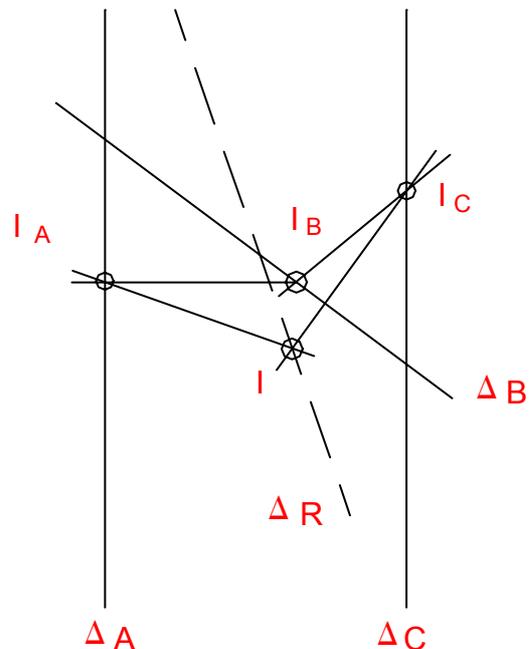
$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{c}_2$$

Ce sont les deux rayons polaires extrémaux qui définissent la résultante **R** du système de forces.

I.5.2. Travail dans le plan physique : (funiculaire)

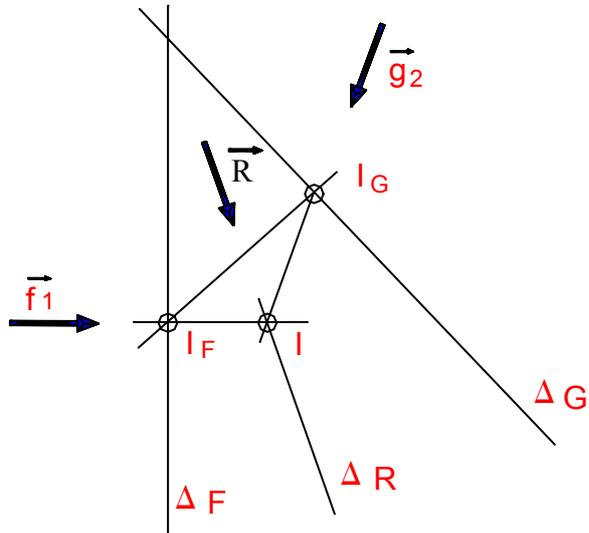
Chacune des forces \mathbf{F}_i est décomposée en deux forces \mathbf{f}_{i1} et \mathbf{f}_{i2} , dont les lignes d'action se coupent sur \mathbf{F}_i . Parmi la multitude de possibilités de choix des \mathbf{f}_{ij} , il faut retenir une solution d'ensemble dans laquelle les lignes d'action des rayons polaires en regard soient confondues. Les effets mécaniques de ces deux composantes s'annulent alors puisqu'elles sont directement opposées.

Ne subsistent donc plus que les effets des deux rayons polaires extrémaux, qui se coupent en **I** (les rayons polaires extrémaux n'ont pas de vis-à-vis). Le point **I** se situe donc sur la ligne d'action de la résultante générale **R**.

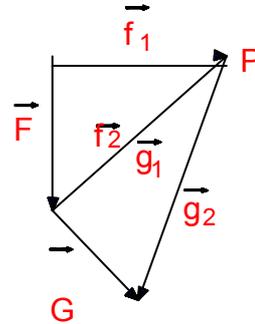


Exemple 1 : Système constitué de 2 forces **F** et **G** :

Funiculaire



Dynamique

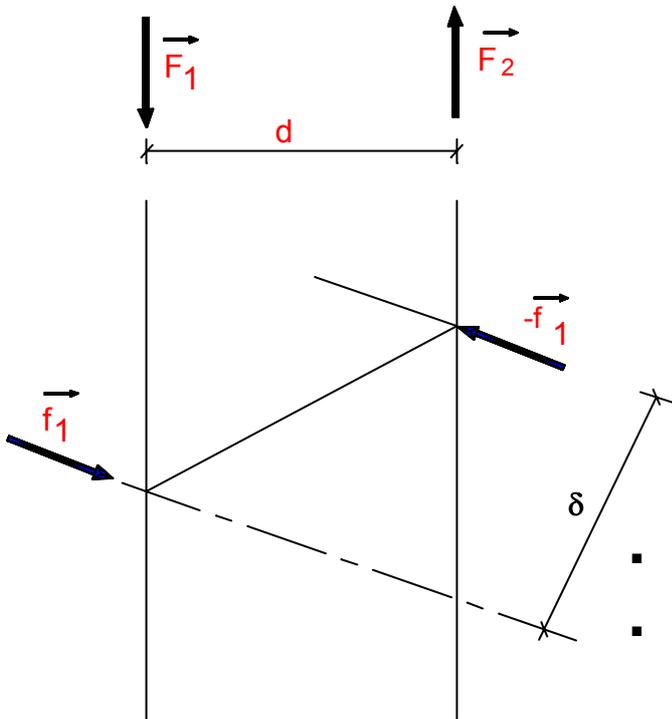


$$S = (\mathbf{F}, \mathbf{G}) \approx (\mathbf{f}_1, \mathbf{g}_1) \approx \mathbf{R}$$

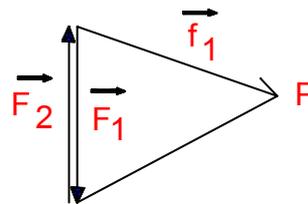
Exemple 2 : Représentation d'un couple

$$C = \mathbf{F} \times \mathbf{d}$$

Funiculaire



Dynamique



$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$$

$$C = \mathbf{F} \times \mathbf{d} = \mathbf{f} \times \delta$$

- Le dynamique est fermé (résultante du système nulle).
- Le funiculaire est ouvert (moment résultant du système différent non nul).

I.6. APPLICATION DU P.F.S AVEC LA DECOMPOSITION POLAIRE.

Un solide est en équilibre si et seulement si le dynamique et le funiculaire des efforts extérieurs appliqués sur le solide sont fermés.

Equilibre \Leftrightarrow

DYNAMIQUE FERME	Résultante nulle
FUNICULAIRE FERME	Moment résultant nul

\Leftrightarrow

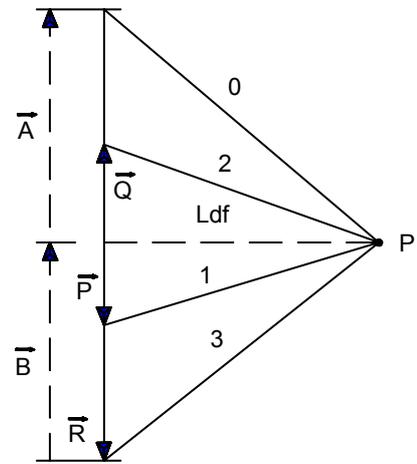
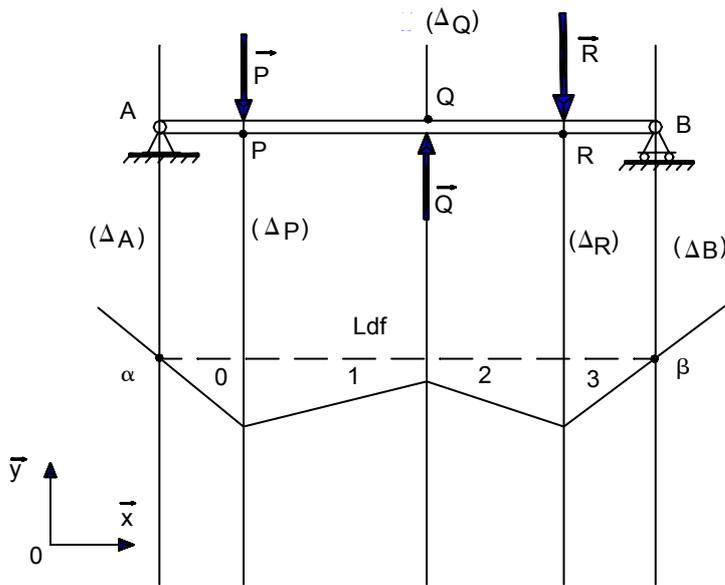
Exemple :

Nature des liaisons et donc des inconnues : 2 appuis simples.

P = 4,2 kN

Q = 2,4 kN

R = 4,1 kN



Funiculaire

Dynamique

R_A = kN

R_B = kN

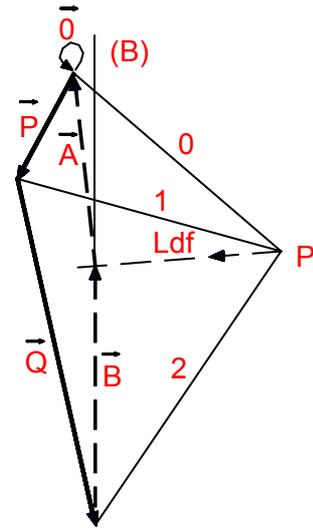
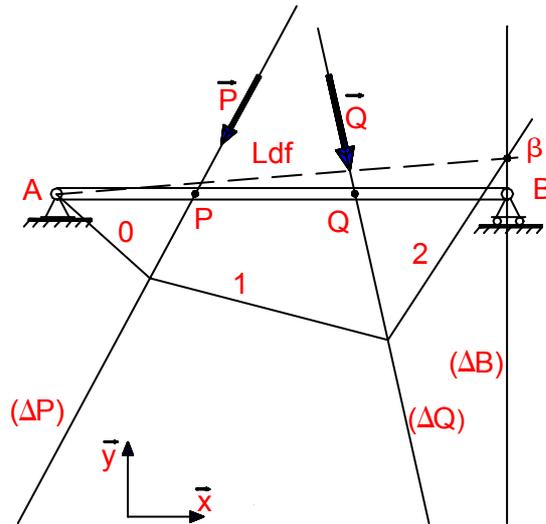
Autre exemple :

Nature des liaisons et donc des inconnues :

1 articulation
et 1 appui simple.

$P = 2,1 \text{ kN}$

$Q = 5,3 \text{ kN}$



Funiculaire

Dynamique

$R_A = \quad \text{kN}$

$R_B = \quad \text{kN}$

II. SYSTEMES TRIANGLES PLANS

Ces éléments de structure (ou structures complètes) sont réalisés à partir de barres liées entre elles par leurs extrémités. Le principe constructif du treillis est utilisé en charpente bois ainsi qu'en construction métallique.

Constructions métalliques :

- * Poutres treillis métalliques droites ou de hauteur variable.
- * Auvents.
- * Portiques.
- * Passerelles piétons ou routières.
- * Poteaux électriques HT et MT.
- * Grues de levage.

Construction bois :

- * Poutres droites d'étaie.
- * Fermes et fermettes

Autres ouvrages :

- * Echafaudages.
- * Tribunes amovibles tubulaires, etc.

Intérêt de la construction en treillis :

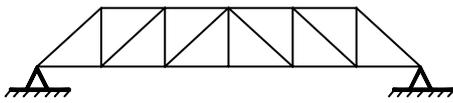
Ce mode de construction permet d'utiliser des produits simples pour réaliser les barres (planches, fers plats, cornières, fers en U, tubes ronds ou rectangulaires, etc). De simples plaques métalliques, des plaques de contre-plaqué, des connecteurs peuvent être employés comme goussets de liaison entre les barres, suivant la nature de celles-ci.

Le travail sur ces matériaux reste aussi assez sommaire (sciage, perçage, soudage, boulonnage, clouage).

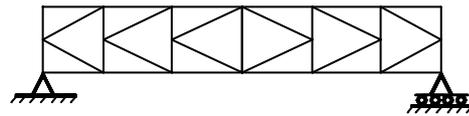
L'ouvrage est préparé dans de bonnes conditions à l'usine et assemblé sur place. Il peut en cas de besoin être facilement transformé ou bien récupéré ultérieurement.

La construction est économique puisque la matière est bien utilisée, étant disposée de façon judicieuse, là où les efforts sont importants, et sans excès.

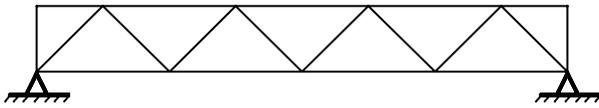
Il est par contre très important de noter que la structure n'est résistante que dans son plan et qu'elle est extrêmement fragile pour toute sollicitation en dehors de ce plan.



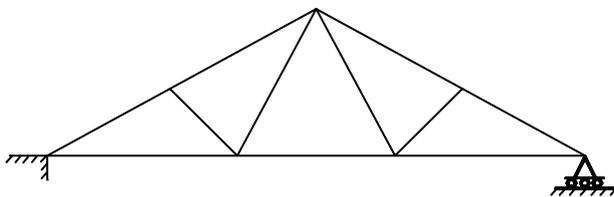
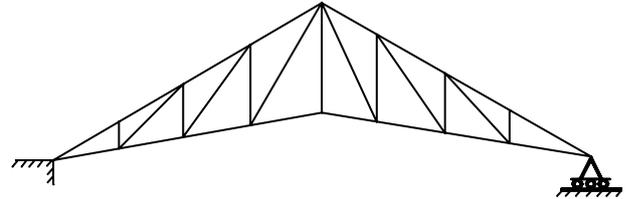
Poutre en N₋



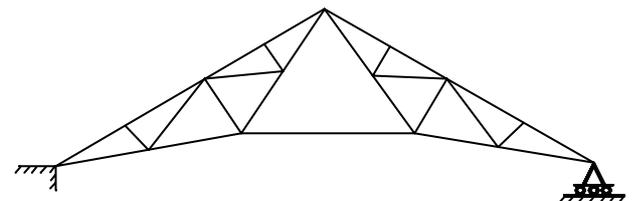
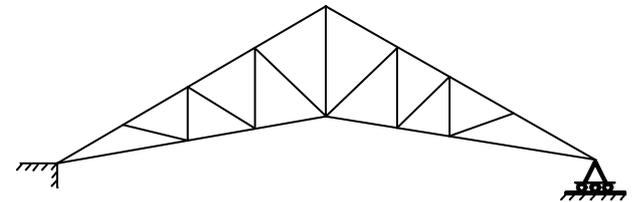
Poutre K



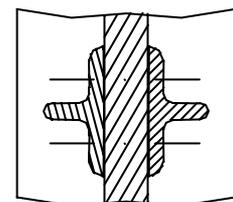
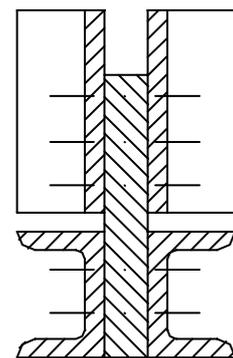
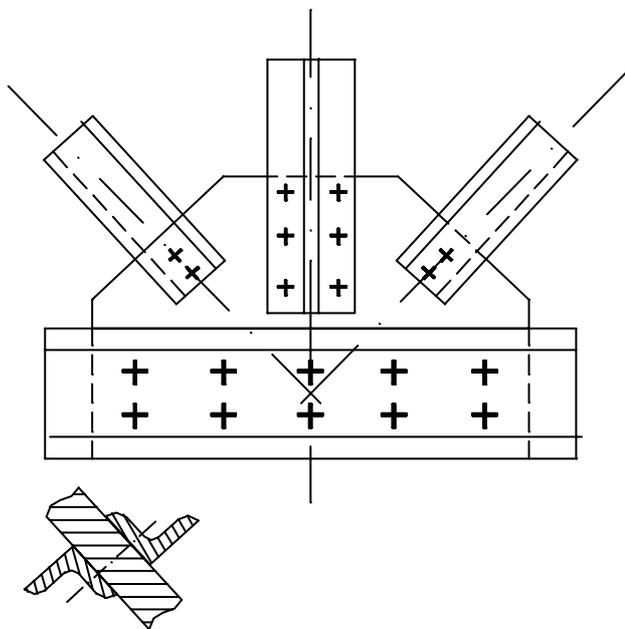
Poutre en V



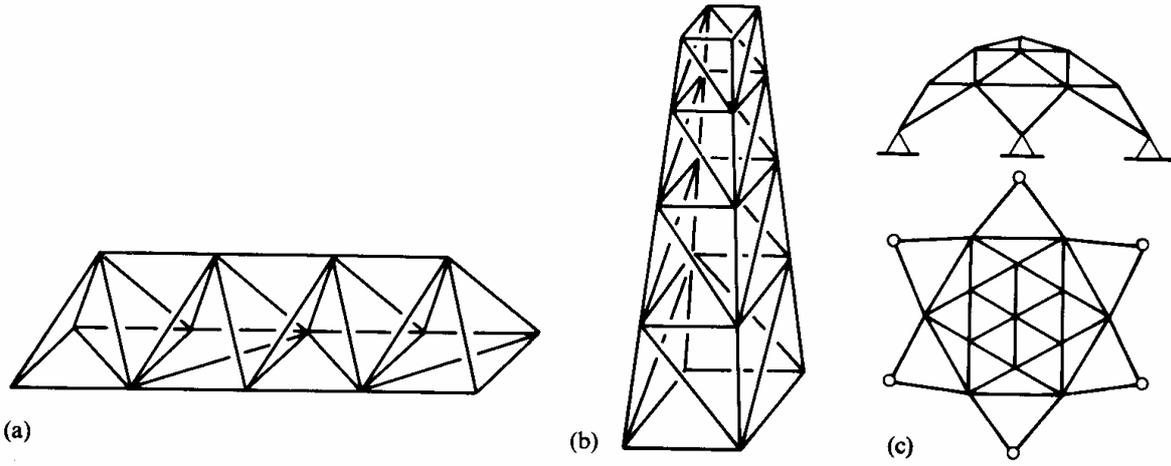
Ferme en W



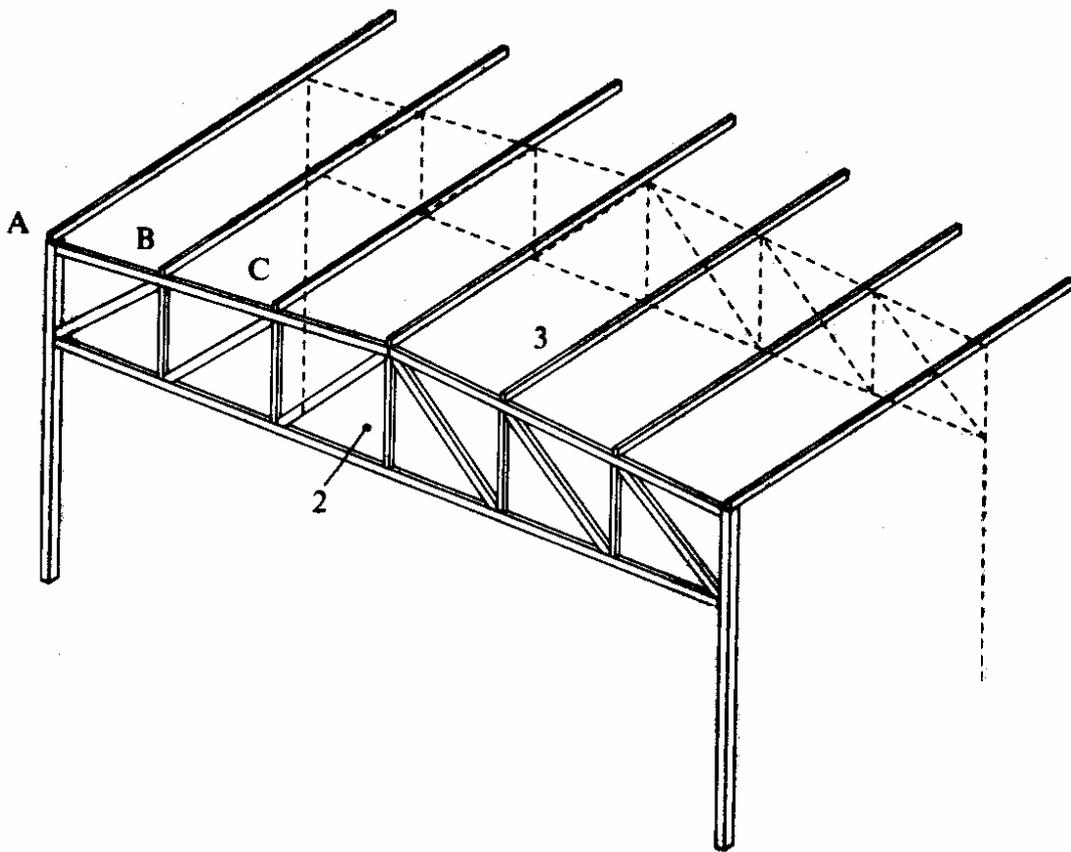
Ferme Polonceau à 1 et 3 bielles.



Exemple de réalisation de nœud sur une poutre treillis métallique.



Treillis spatiaux: (a) poutre; (b) mât; (c) coupole.



Perspective schématique d'une structure

II.1. TRIANGULATION D'UNE STRUCTURE

II.1.1. Description mécanique de la construction

Une structure triangulée est composée de barres et de nœuds (une barre étant définie par son nœud origine et son nœud extrémité).

Les nœuds sont les points géométriques de jonction ou d'arrêt des barres.

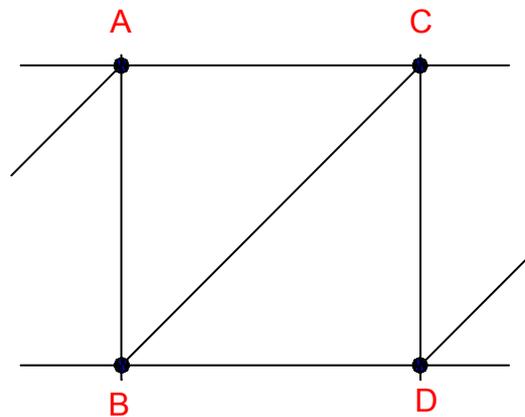
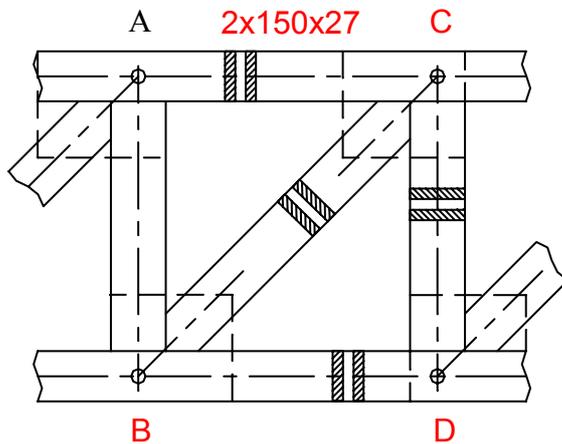
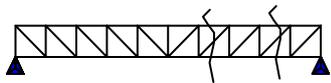
Pour les calculs, les barres sont en fait les lignes géométriques correspondant au lieu du **C.d.G.** de la section droite des barres physiques. Elles sont caractérisées par :

- le matériau constitutif de la barre,
- l'aire et la forme de la section droite retenue.

Pour le calcul, les barres sont supposées articulées à leurs extrémités (les nœuds sont des articulations).

EXEMPLE DE REALISATION ET SCHEMATISATION :

Poutre droite triangulée en bois (moisée)

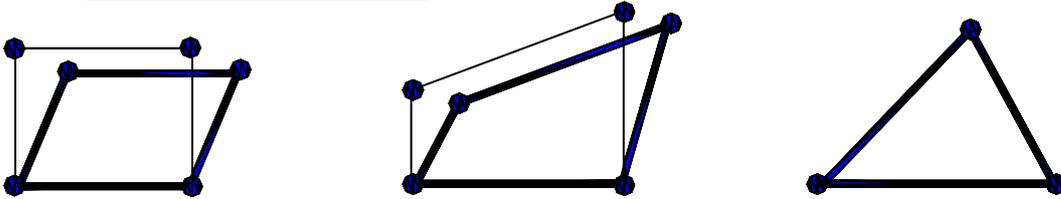


II.1.2. Problème de la rigidité de la structure

Les barres constitutives doivent être disposées de façon à obtenir une construction rigide, capable de s'opposer à un chargement extérieur.

La figure géométrique simple constituée de segments de droite bi articulés, demeurant rigide sous tout chargement dans son plan est le **TRIANGLE**.

Déformation d'une cellule:

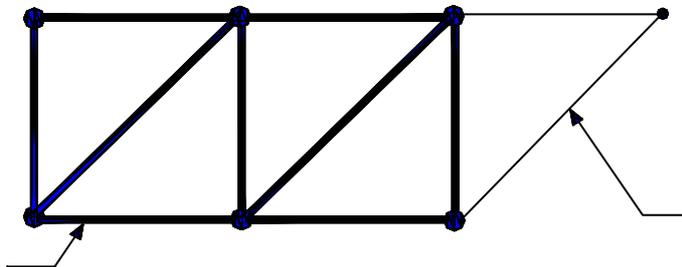


Déformation d'un rectangle. Déformation d'un trapèze.

Système indéformable.
Cas du triangle.

Méthode de génération de la structure :

On part d'une cellule triangulaire, auquel on accole d'autres cellules triangulaires, et ce jusqu'à constituer la structure complète dont la géométrie est adaptée au problème.



Base indéformable

cellule triangulaire supplémentaire

Cette méthode de conception permet d'assurer la rigidité de l'assemblage de barres, ainsi que la calculabilité de la structure. Une triangulation de la structure obtenue par un autre moyen peut entraîner des difficultés de calcul, ou même transformer en mécanisme la construction que l'on souhaite avant tout rigide.

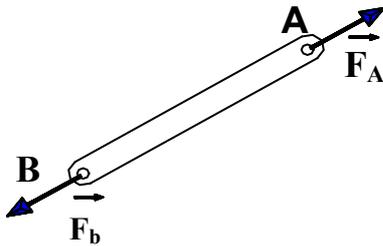
II.2. CALCUL DE SYSTEMES RETICULES : LES HYPOTHESES ET ETAPES COMMUNES A TOUTES LES METHODES

L'objectif du calcul est de déterminer les efforts dans toutes les barres, afin dans un second temps de sélectionner des profilés du commerce capables de résister à ces efforts.

II.2.1. Hypothèses de calcul

- ❑ Les barres sont bi articulées.
- ❑ Toutes les barres convergentes en un nœud multiple doivent être concourantes.
- ❑ La structure est chargée dans son plan, et seuls les nœuds reçoivent des charges ponctuelles.
- ❑ Le poids propre des barres est négligé (du fait du point précédent).

Effort dans une barre



La barre est un solide en équilibre soumis à l'action de 2 forces.

Ces deux efforts ne peuvent être qu'égaux et directement opposés.

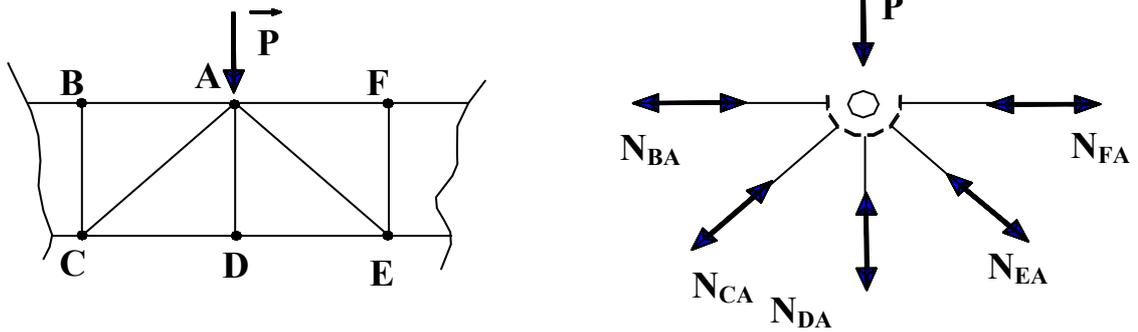
La ligne d'action des efforts des nœuds sur la barre (et donc de la barre sur les nœuds) est confondue avec la ligne géométrique de la barre.

Dans ce contexte, on peut dire :

Dans un système triangulé chargé en ses nœuds, une barre n'est soumise qu'à de la traction ou à de la compression.

Equilibre d'un nœud

Un nœud est soumis à l'action d'une force extérieure à la structure et à l'action de toutes les barres de la structure convergeant sur ce nœud.



L'écriture de l'équilibre statique d'un nœud fournit une équation vectorielle de résultante, soit 2 équations scalaires. En effet, l'équilibre en moment du nœud est forcément vérifié puisque toutes les forces en présence convergent au point géométrique correspondant). L'équilibre d'un nœud permet donc de déterminer les efforts dans 2 barres aboutissant sur ce nœud.

Remarque :

Pour déterminer leur sens, il est important de noter que les efforts calculés correspondent à ceux exercés par les barres sur les nœuds, et non pas l'inverse ($N_{F \rightarrow A}$, $N_{D \rightarrow A}$, ...).

II.2.2. Cas particulier de nœuds

Avant tout calcul il est préférable (simplification des calculs) d'analyser la structure et d'y détecter les nœuds particuliers. Ces nœuds ont des propriétés remarquables susceptibles de simplifier les calculs.

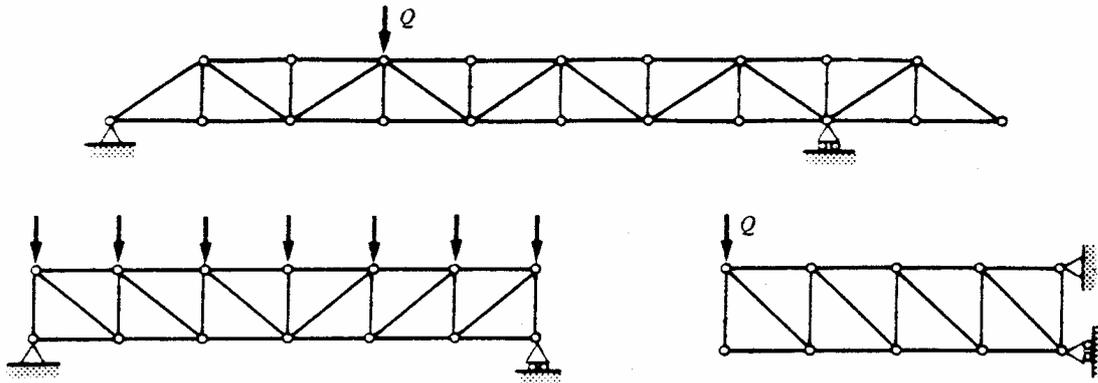
Le tableau ci-après regroupe quatre nœuds particuliers, isolés et non chargés d'actions extérieures.

On démontre sans peine les propriétés qui en résultent :

Géométrie				
	Barres alignées		Barres 1 et 2 alignées	Barres alignées deux à deux
Propriété	$N_1 = N_2$	$N_1 = 0$ $N_2 = 0$	$N_1 = N_2$ $N_3 = 0$	$N_1 = N_2$ $N_3 = N_4$

Exercices d'application

Pour chacune des trois poutres en treillis suivantes, rechercher les barres à effort nul, précisant à chaque fois le cas de nœud particulier auquel vous vous rattaché pour dire que l'effort est nul.

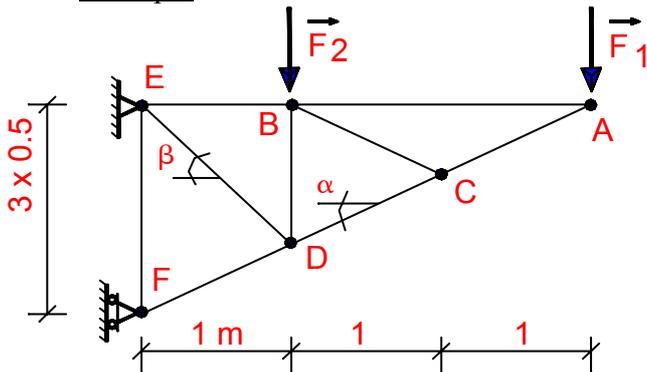


II.3. CALCUL DE SYSTEMES RETICULES : METHODE ANALYTIQUE

II.3.1. Méthode de calcul des efforts dans les barres

Il faut commencer par écrire l'équilibre d'un nœud ne comportant que deux barres. Ensuite, on parcourt la structure de proche en proche en choisissant des nœuds sur lesquels ne s'articulent pas plus de 2 barres dont les efforts sont inconnus.

Exemple



$F_2 = 20 \text{ KN}$, $F_1 = 10 \text{ KN}$

Ordre possible pour l'écriture de l'équilibre des nœuds :

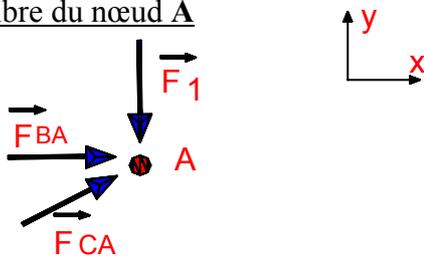
A, B, C, D, F, E

Mais autre possibilité, si calcul préalable des réactions d'appuis :

F, E, D, B, A, C

ou encore :

Equilibre du nœud A



Ecriture analytique du P.F.S.

sur x :

$$F_{BA} + F_{CA} \cos \alpha = 0$$

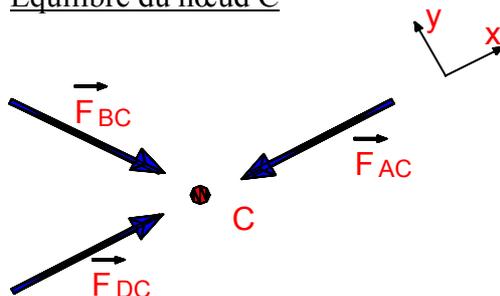
sur y :

$$F_{CA} \cdot \sin \alpha = F_1$$

Donc $F_{CA} = F_1 / \sin \alpha$

et $F_{BA} = - F_1 / \tan \alpha$

Equilibre du nœud C



Ecriture analytique du P.F.S.

sur x :

$$F_{BC} \cos \beta + F_{DC} - F_{AC} = 0$$

sur y :

$$F_{BC} \sin \beta = 0$$

Donc $F_{BC} = 0$

$$F_{DC} = F_{AC}$$

A noter : Attention de choisir un repère local astucieux -> simplification des décompositions analytiques !

Equilibre des nœuds B et D

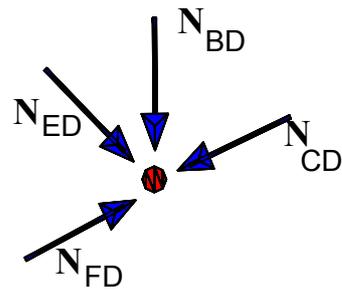
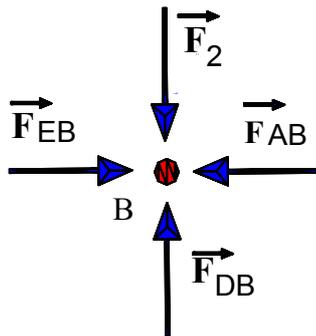
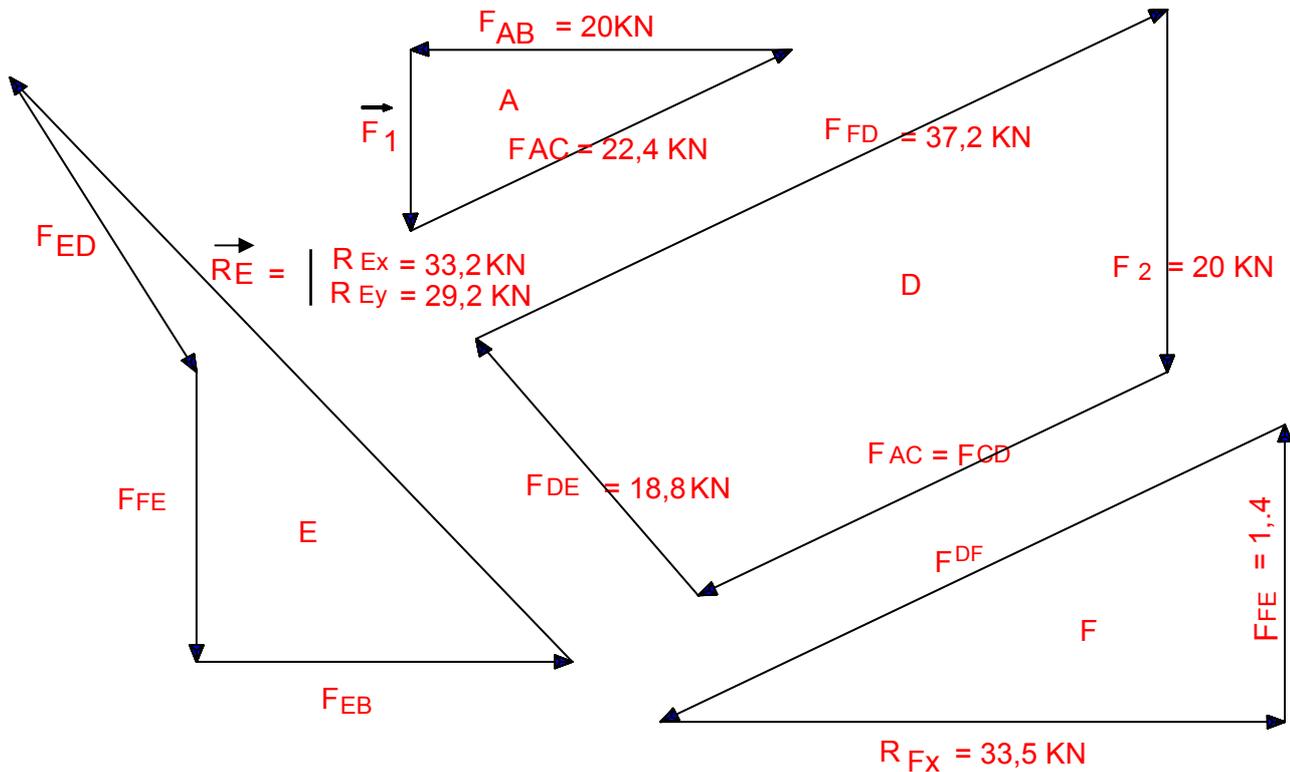


Tableau récapitulatif des efforts dans les barres :
(un effort de compression est positif)

N° barre	F ₁ seul	A.N.	F ₂ seul	A.N.	Total
AB					
AC					
BC					
DC					
BD					
ED					
EB					
EF					
FD					
R _{Fx}					
R _{Ex}					
R _{Ey}					



Remarque : Détermination graphique des forces.

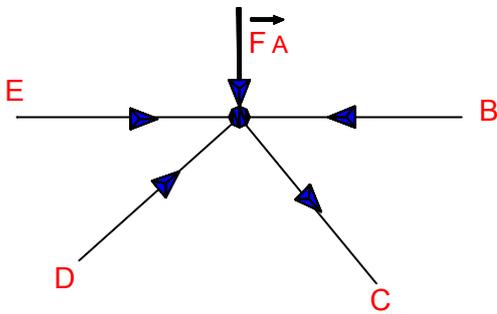
II.3.2. Présentation des résultats

Les résultats doivent être présentés sous forme de tableaux, donnant l'intensité de l'effort dans chaque barre, et le sens de cet effort. Il faut remarquer que suivant le sens de l'effort, la barre est soumise à de la traction ou à de la compression.

Indication du sens de l'effort :

Conventionnellement, un effort imposant une compression à la barre est compté positivement, et négativement dans le cas d'une traction.

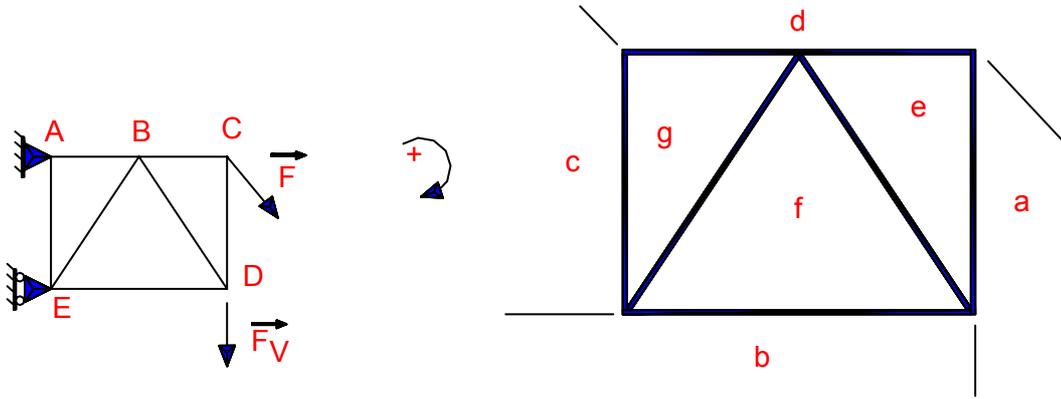
Autre méthode (graphique) : Une flèche est dessinée au voisinage du nœud et indique le sens de l'effort barre/nœud.



Barre	Effort (kN)
AB	+15
AC	- 5
DA	+10
EA	+20

II.4.CALCUL DE SYSTEMES RETICULES : METHODE DE CREMONA (METHODE DES NŒUDS)

On décompose le plan de situation en cellules, dont les frontières correspondent aux lignes d'action des efforts sur les nœuds (forces extérieures et efforts dans les barres).



On choisit un sens de rotation pour l'inventaire des forces agissant sur chaque nœud.

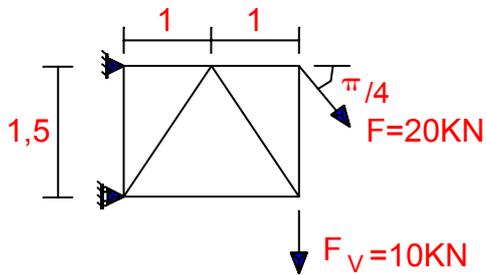
Dans le plan des forces (dynamique), chaque force sera désignée par les indices des cellules qu'elle délimite. Le point origine de la force porte l'indice de la cellule départ et le point extrémité de la force l'indice de la cellule arrivée, le sens de parcours étant celui conventionnellement choisi pour la rotation autour des nœuds.

Donc

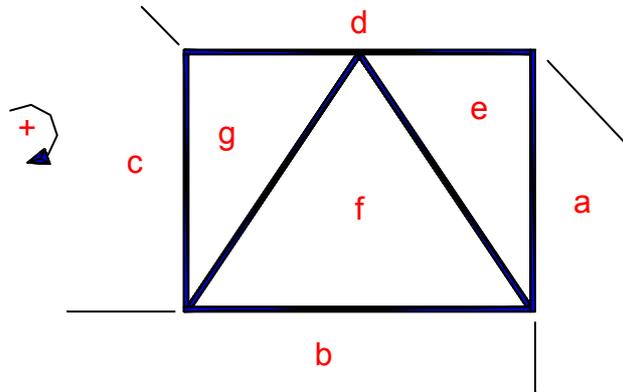
$$\begin{aligned} \mathbf{F} &\Leftrightarrow \mathbf{da} \\ \mathbf{F}_V &\Leftrightarrow \mathbf{ab} \end{aligned}$$

L'écriture graphique de l'équilibre d'un nœud est faite en inscrivant les forces dans l'ordre où elles se présentent lors du cheminement autour du nœud. Il faut utiliser les tracés effectués lors de l'écriture antérieure de l'équilibre d'autres nœuds de la structure.

Exemple :



échelle : 2 cm <--> 10 kN



La construction démarre par l'équilibre du nœud C.

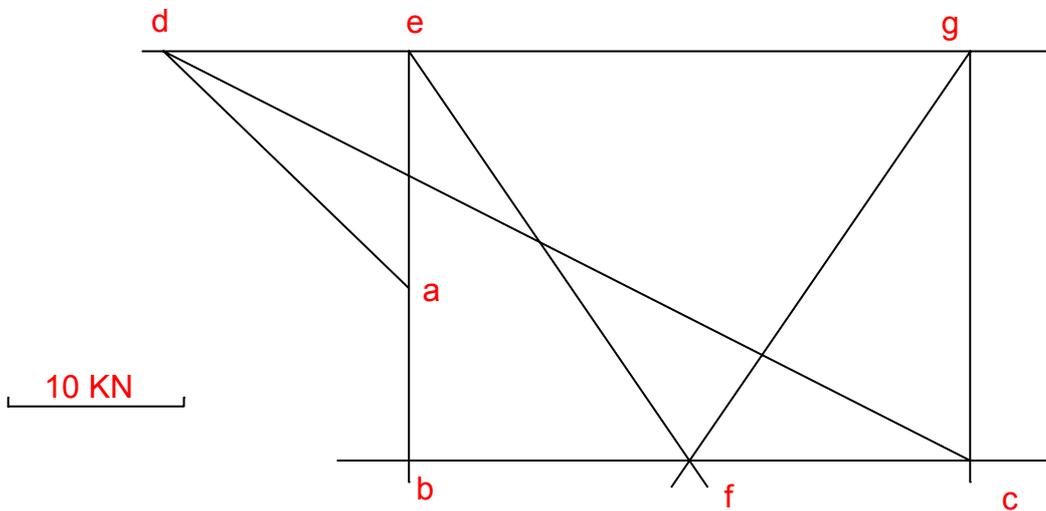
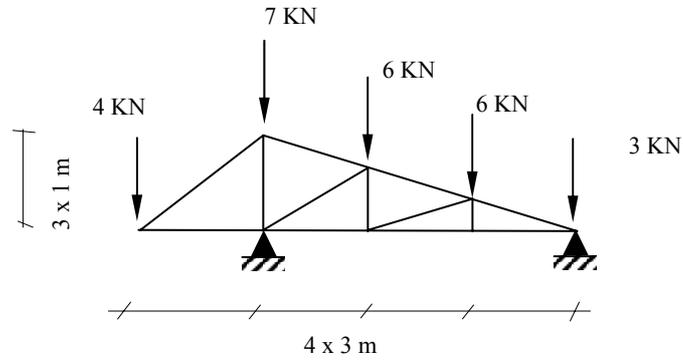


Tableau des résultats :

Barre	Effort (kN)		
AB			
BC		ED	
DC		EB	
BD		AE	

Exercice :

Déterminer les efforts dans chaque barres en utilisant la méthode de CREMONA
On prendra pour échelle 1 cm \Leftrightarrow 1 KN

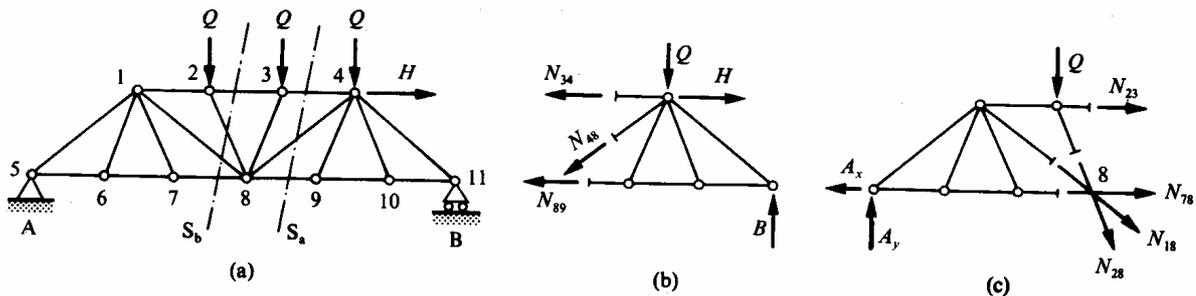


II.5. CALCUL DE SYSTEMES RETICULES : METHODE DE RITTER (METHODE DES SECTIONS)

Au lieu d'isoler un seul nœud, il est souvent intéressant d'isoler tout un groupe de nœuds, c'est-à-dire une portion du treillis.

Appliquons carrément le principe de la coupe en sectionnant le treillis en **deux fragments**. On peut dessiner le schéma de l'un des fragments, isolé ; si d'éventuelles réactions ont été calculées préalablement par l'équilibre de tout le treillis, alors seul l'effort normal de chaque barre coupée apparaît comme inconnue ; l'équilibre de ce fragment mettant en jeu 3 équations, la coupe ne devrait pas extérioriser plus de 3 inconnues.

La coupe idéale est donc celle qui ne sectionne que trois barres ; elle s'appelle **coupe simple** (ou section simple). Mais, plus généralement, toute coupe permettant de calculer un effort normal inconnu convient, quel que soit le nombre de barres coupées. Dans la figure ci-après par exemple, S_a est une coupe simple : elle permet de calculer N_{34} , N_{48} et N_{89} . Par contre, la coupe S_b coupe quatre barres, mais permet néanmoins de calculer directement N_{23} par l'équation $\sum M_{/8} = 0$



Treillis à résoudre par coupe : (a) coupes ; (b) fragment de droite isolé par la coupe S_a ;
(c) fragment de droite isolé par la coupe S_b

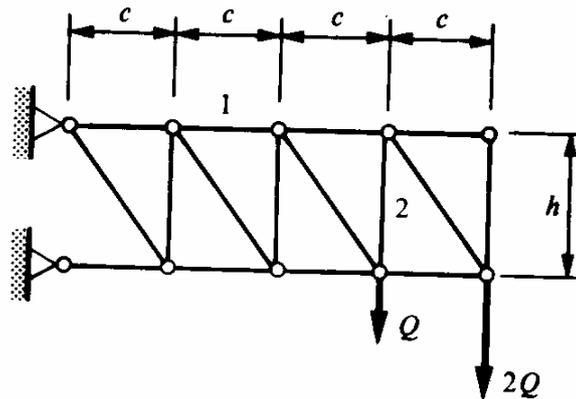
De plus, les efforts normaux qui naissent sur les faces des barres coupées sont les mêmes pour les deux fragments. On écrira donc l'équilibre d'un seul fragment, **celui qui fournit les calculs les plus simples**.

La coupe est particulièrement efficace lorsqu'on ne désire trouver l'effort normal que dans quelques barres typiques (les plus sollicitées par exemple) ; elle fournit d'un coup l'effort normal dans une quelconque barre, évitant une longue succession d'équilibres de nœuds.

I.1.1.1. Exemples

On désire trouver l'effort normal dans les barres 1 et 2 du treillis de la figure ci-après.

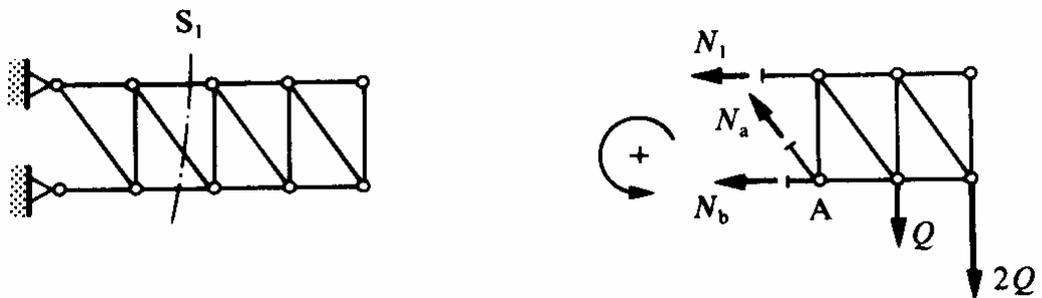
Inutile de chercher une coupe simple pour 1 et 2 simultanément, il n'y en a pas ici. L'important est de trouver deux sections qui conduisent au calcul aisé et efficace de N_1 et N_2 .



Calcul de N_1

Soit la coupe simple S_1 traversant bien sûr la barre 1. Le dessin du fragment de treillis situé à droite de S_1 – et non à gauche puisqu'on n'a pas calculé les réactions – comporte 3 inconnues N_1 , N_a et N_b . Comme seul N_1 importe, on écrit l'équation d'équilibre $\sum M_{/A} = 0$, où A est le point de concours de N_a et N_b ,

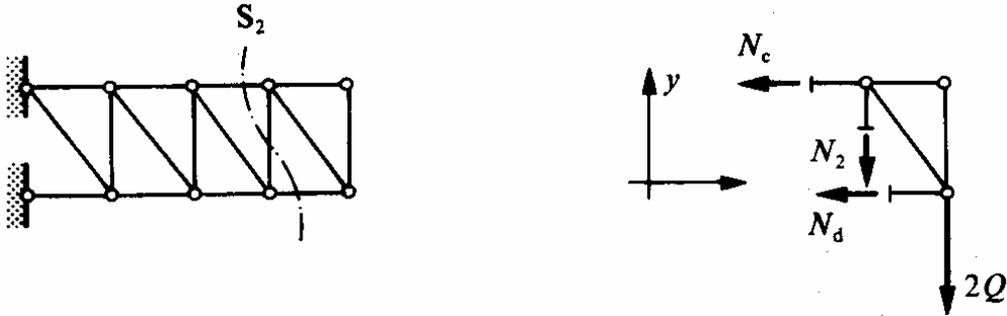
$$\sum M_{/A} = h.N_1 - c.Q - 4.c.QM \text{ d'où } N_1 = \frac{5.c.Q}{h} \text{ (traction)}$$



Calcul de N_2

Soit la coupe simple S_2 ; on isole le fragment de droite, puis on écrit, tout simplement,

$$\sum F_y = -N_2 - 2.Q = 0 \quad \text{d'où} \quad N_2 = -2.Q \quad (\text{compression})$$

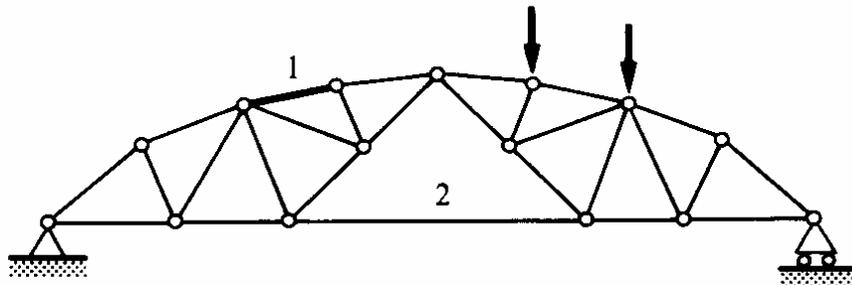


La méthode de RITTER sera utilisée de préférence :

- Pour le calcul des efforts dans 3 barres non concourantes, si l'on ne souhaite pas effectuer le calcul de toutes les autres barres de la structure triangulée.
- Pour débloquer une construction de CREMONA lorsque l'on a plus de 2 inconnues sur tous les nœuds suivants.

Exercice

Calculer N



Attention :

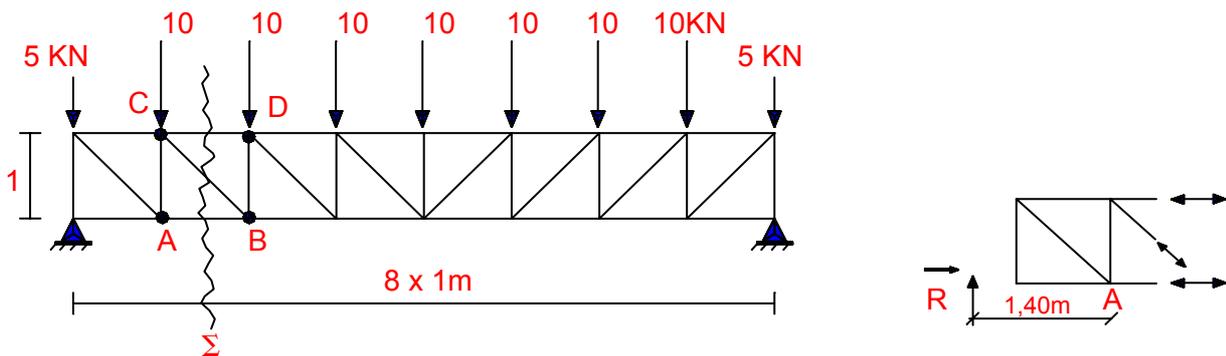
On ne peut calculer N_1 ni par l'équilibre d'un nœud ni par RITTER, sans avoir préalablement calculé N_2 !

II.6. SYNTHÈSE ENTRE MÉTHODE DE RITTER ET DE CREMONA

Les deux méthodes sont élégamment utilisables ensemble lorsque le problème correspond à l'étude de l'équilibre d'un solide soumis à l'action de 4 forces de directions connues, non concourantes par trois (voir paragraphe I.3.2.).

Les trois modules inconnus s'expriment alors en fonction de l'effort moteur connu.

Exemple : On cherche N_{CD} , N_{CB} , N_{AB}

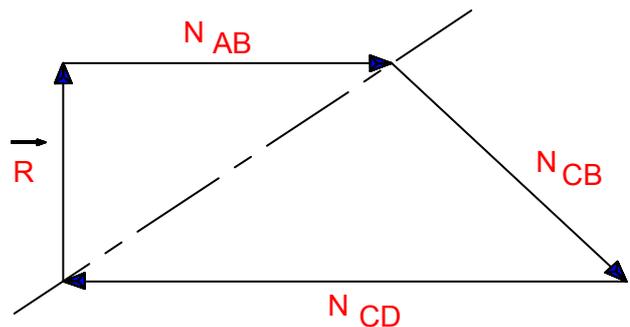


1ère ETAPE : Détermination de la résultante
(grandeur et position) des
efforts à gauche (ou à droite) de
la section fictive Σ .

$$R = 25 \text{ kN}$$

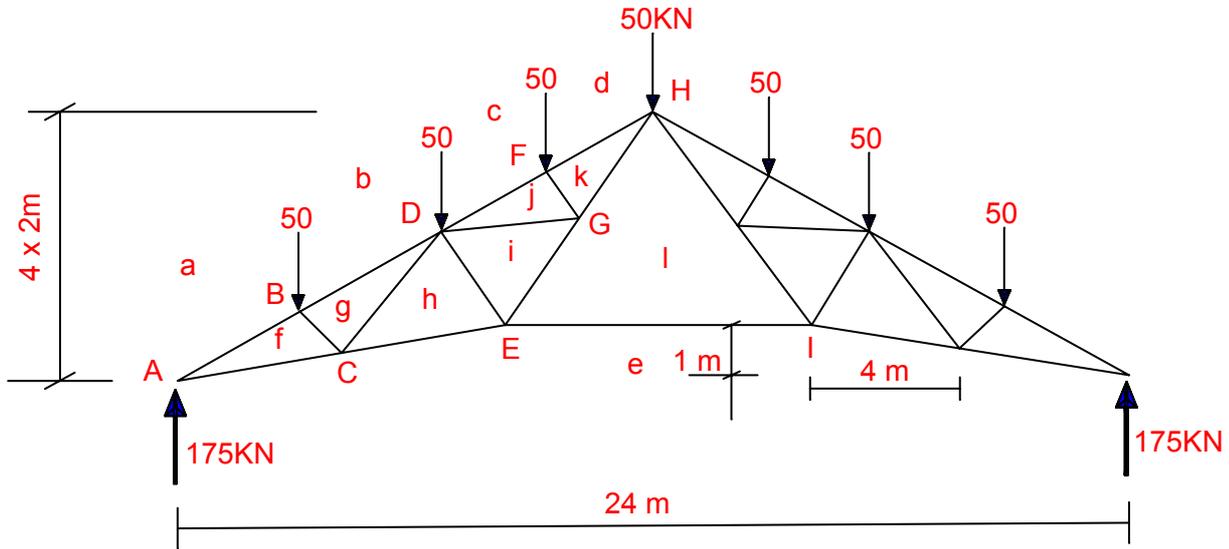
PUIS : Détermination graphique des efforts
dans les 3 barres non concourantes.

(dynamique fermé)



Autre exemple : Ferme Polonceau à 3 bielles.

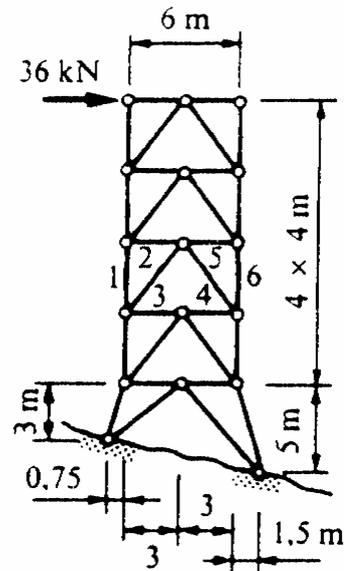
En vous inspirant de l'exemple ci-avant, déterminer l'effort dans la barre **EI**.



Exercice

Le vent agissant latéralement, produit une force horizontale de 36 kN sur la palée en treillis en K : rechercher la démarche la plus efficace possible pour calculer l'effort normal dans les barres 1 à 6 .

Concluez sur la méthode de RITTER dans le cas d'une coupure complexe avec 4 forces mais dont 3 sont concourantes.



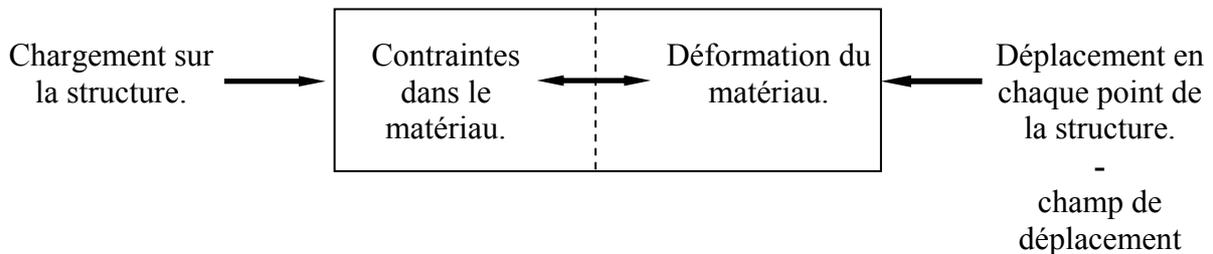
III. POUTRES HYPERSTATIQUES

III.1. AVANT-PROPOS : DEFORMATION D'UNE STRUCTURE

Toute structure supportant un chargement se déforme, ce qui se traduit par un déplacement (plus ou moins important) de chaque point de la construction.

La ligne moyenne de la structure subit alors un déplacement, caractérisé par les trois composantes:

- $u(x)$: composante horizontale du déplacement
- $v(x)$: composante verticale du déplacement
- $\theta(x)$: rotation de la section droite observée

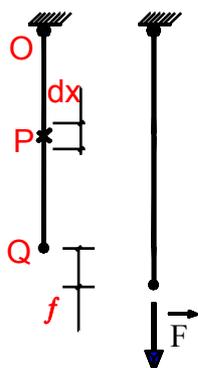


Mais réciproquement, le fait d'imposer un déplacement à un point d'une structure donne naissance à des efforts internes dans la structure.

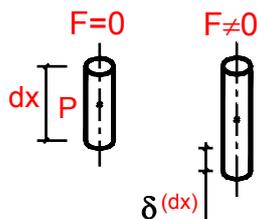
Lorsqu'une structure se déforme, le déplacement d'un point quelconque **résulte des déformations de tous les tronçons élémentaires** des poutres formant la construction et **des déplacements autorisés au niveau des appuis extérieurs** de l'ouvrage.

Pour calculer le déplacement d'un point de la structure, il faudra donc évaluer les déformations en tout point de la structure.

Exemple n°1: Tirant



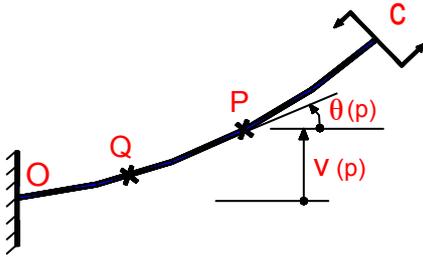
Soit un tronçon de barre de longueur dx, repéré par sa distance au sommet x.



$$f = \int_{\text{longueur}} \delta(dx)$$

Le déplacement vertical f du point Q situé à l'extrémité inférieure de la barre est la somme des allongements de tous les tronçons élémentaires compris entre l'origine O et l'extrémité Q.

Exemple n° 2 : Cas d'une poutre console



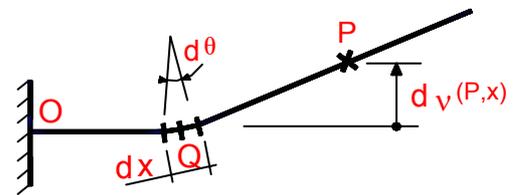
Poutre console fléchiée par un couple C appliqué en A.

Regardons l'effet de la déformation de flexion d'un tronçon de longueur dx centré sur Q , tout le reste de la poutre étant supposé rigide (non déformé).

Sur l'élément de poutre de longueur dx , on observe une déviation angulaire $d\theta$, dont les conséquences en P sont :

Une déviation angulaire $d\theta$,

Un petit déplacement vertical dont la valeur est



$$d v(P) = d\theta \cdot |QP|$$

La déformation de tous les tronçons élémentaires situés à gauche de P a une incidence sur le déplacement du point P . Le déplacement total de P est évalué en sommant géométriquement les déplacements élémentaires de P dus à la déformation de tous les tronçons élémentaires à gauche de P .

Les expressions à évaluer sont :

$$\theta(P) = \int_{OP} d\theta$$

$$v(P) = \int_{OP} dv = \int_{OP} |QP| \cdot d\theta(Q)$$

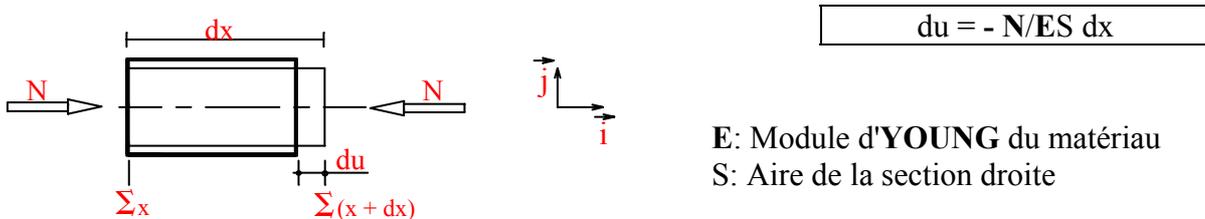
III.2. DEFORMATION ELEMENTAIRE D'UN TRONÇON DE POUTRE

Nous venons de voir qu'il faut, pour connaître le déplacement d'un point d'une structure, déterminer la déformation de tous les tronçons de poutre de la structure.

Cette déformation d'un tronçon résulte de l'action sur ce tronçon de l'effort normal, de l'effort tranchant et du moment fléchissant, qui ajoutent leurs effets.

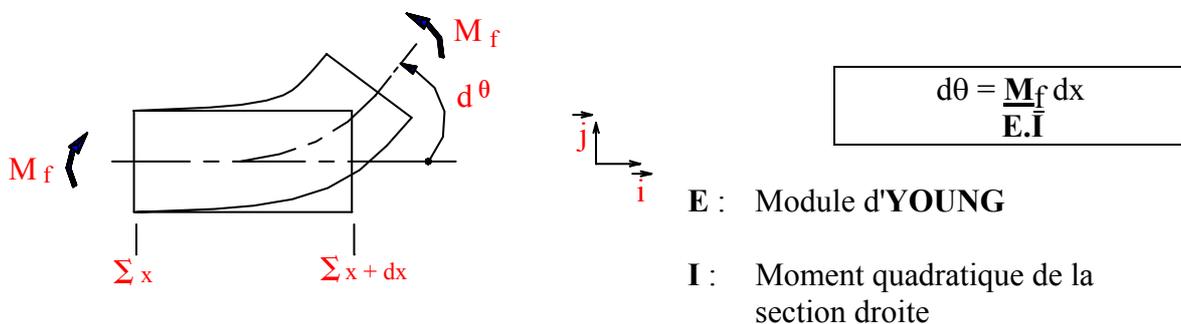
III.2.1. Déformations élémentaires d'un tronçon due à l'effort normal N

Sur un tronçon de poutre de longueur dx soumis uniquement à un effort normal N , on observe une translation parallèle à l'axe xx' de la section $\Sigma(x+dx)$ par rapport à la section voisine $\Sigma(x)$. La valeur du déplacement du est obtenue par application directe de la loi de **HOOKE**.



III.2.2. Déformation élémentaire due à M_f

Dans un tronçon de poutre de longueur dx soumis uniquement au moment fléchissant M_f , on observe une rotation de la section droite $\Sigma(x+dx)$ par rapport à la section droite voisine $\Sigma(x)$, d'intensité $d\theta$.



Cette relation est obtenue par application de la loi de **HOOKE** et de l'hypothèse de **NAVIER-BERNOUILLI**. (voir Cours de R.D.M).

Remarque 1: Les déplacements dus à l'effort tranchant V sont faibles devant ceux dus à M_f et à N . Nous les négligerons systématiquement dans les calculs et ne fournissons par leur expression.

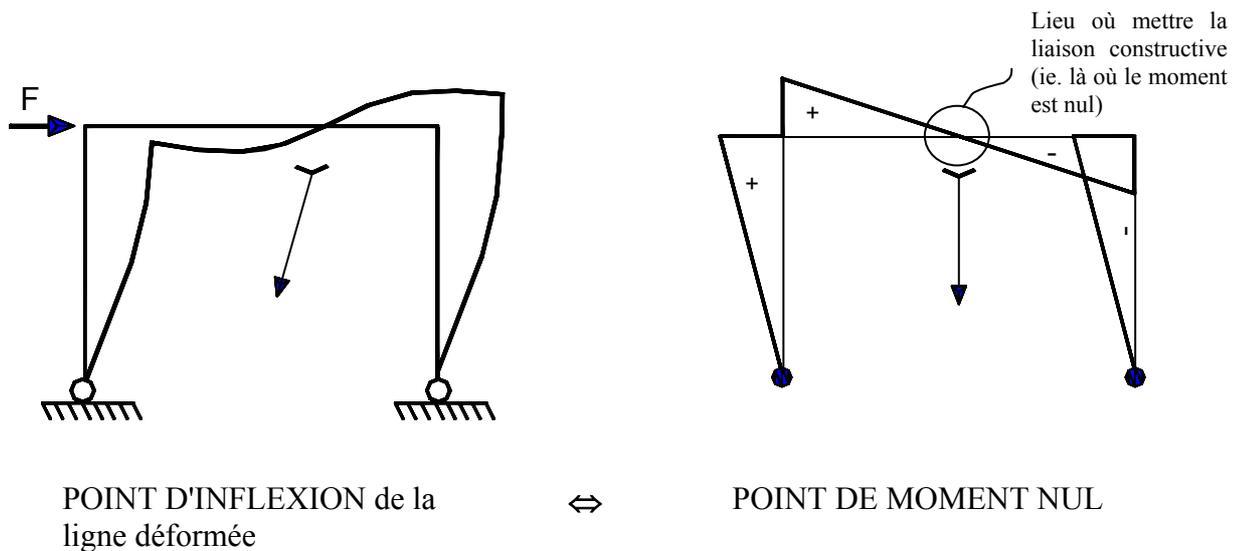
De même, les déplacements dus à l'effort normal sont presque toujours négligés devant ceux dus à la flexion.

Remarque 2: Si $y = y(x)$ est l'expression algébrique de la ligne déformée de la poutre.

La comparaison entre l'expression approchée du rayon de courbure d'une courbe et celle de la déformation de flexion d'un tronçon de poutre permet d'écrire:

$$y''(x) = M_f(x)/EI$$

En conséquence, la ligne déformée d'une poutre présente un point d'inflexion au droit des sections dans lesquelles le moment fléchissant est nul.



Exercice d'application :

Allez voir la charpente du hangar de la FAO. Cette charpente a donné lieu à une réparation majeure, la liaison de continuité des poutres ayant été mis sur appui ce qui a transformé les poutres en poutres isostatiques alors qu'elles devaient travailler comme des poutres hyperstatiques (2 travées).

Tracer l'allure du diagramme des moments d'une telle poutre hyperstatique 2 travées, et concluez sur la position approximative où il aurait fallu mettre la liaison constructive.

Observer la méthode réparatoire adoptée (les poutres ont été soulevés à mi-travée au cric de voiture pour les redresser avant mise en œuvre des cornières de renfort).

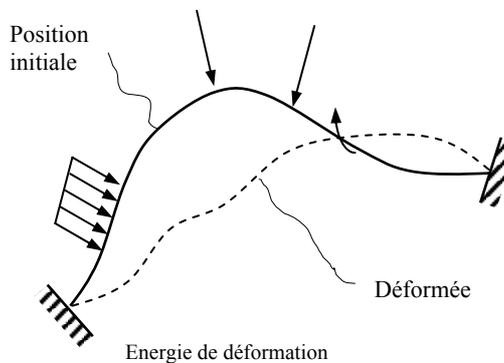
III.3. THEOREMES ENERGETIQUES

III.3.1. Théorie du potentiel interne

Notre étude concerne les structures pour lesquelles les matériaux ont un comportement élastique, toutes les liaisons sont fixes (pas de déformation de liaison) et sans frottement, et les déformations restent faibles (hypothèses de la RDM). L'énergie ne se dissipe donc pas.

I.1.1.2. *Définition du potentiel interne*

Pour une structure de forme quelconque (fig. ci-dessous) soumise à un chargement extérieur, les actions mécaniques appliquées, travaillant au cours de la déformation, créent une énergie appelée **énergie potentielle ou potentiel interne** ou encore potentiel de déformation notée **W**.



I.1.1.3. *Expression du potentiel interne*

Première expression

Exprimons le potentiel interne en fonction des efforts extérieurs et des déplacements.

Pour un système de forces extérieures $\{F_i ; C_i\}$, le potentiel interne W a pour expression :

$$W = \sum_i (F_i \cdot \lambda_i + C_i \cdot \Omega_i) \quad \text{(I)}$$

où λ_i est le déplacement du point d'application de F_i dans la direction du support de F_i et Ω_i , la rotation de la section au point d'application de C_i .

Deuxième expression

Exprimons le potentiel interne en fonction des sollicitations internes.

Pour une structure soumise à un effort normal $N(x)$, un effort tranchant $V(x)$, un moment fléchissant $M(x)$, le potentiel interne W a pour expression :

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_{Structure} \left(\frac{N^2(x)}{E.S} + \frac{V^2(x)}{G.S_1} + \frac{M^2(x)}{E.I} \right) dx \quad \text{(II)}$$

En égalant (I) et (II), on obtient la relation suivante entre actions extérieures, sollicitations internes et déformations :

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{Structure} \left(\frac{N^2(x)}{E.S} + \frac{V^2(x)}{G.S_1} + \frac{M^2(x)}{E.I} \right) dx = \sum_i (F_i \cdot \lambda_i + C_i \cdot \Omega_i)$$

Dans le cas général **des poutres**, on négligera les effets de l'effort tranchant et de l'effort normal devant celui du moment fléchissant, d'où par simplification :

$$\boxed{\frac{1}{2} \cdot \int_{Structure} \left(\frac{M^2(x)}{E.I} \right) dx \approx \sum_i (F_i \cdot \lambda_i + C_i \cdot \Omega_i)}$$

III.3.2. Théorème de CASTIGLIANO (utilisation de l'expression ci-avant de l'énergie potentiel pour calculer des déformations)

Enoncé du théorème

La dérivée partielle

e du potentiel interne par rapport à $\begin{cases} -une Force \\ -un Couple \end{cases}$ appliqué(e) à la structure (S), est

égale à la projection sur le support de cette action du $\begin{cases} -déplacement \\ -rotation \end{cases}$ de son point

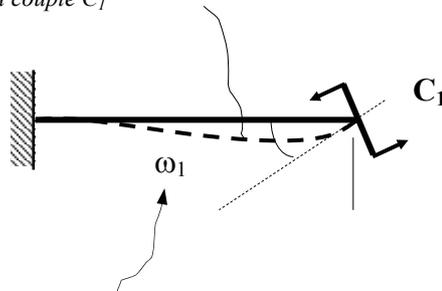
d'application., ce qui mathématiquement s'écrit :

$$\lambda_i = \frac{\partial W(S)}{\partial F_i} \quad \omega_k = \frac{\partial W(S)}{\partial C_k}$$

Où λ_i est le déplacement du point d'application de F_i et ω_k la rotation de la section au point d'application C_k

Exemple :

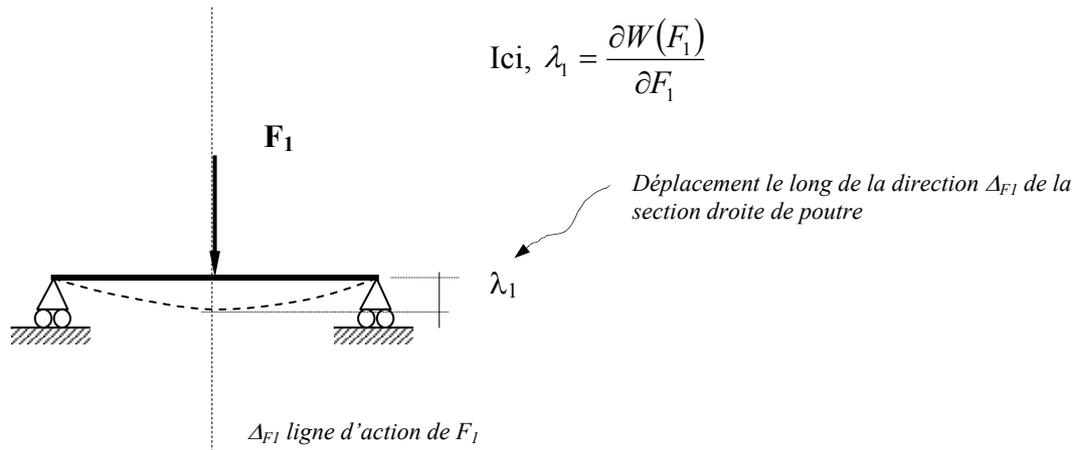
Déformée de la console sous l'effet du couple C_1



Angle de la rotation de la section droite de console à son extrémité, lieux d'application de C_1

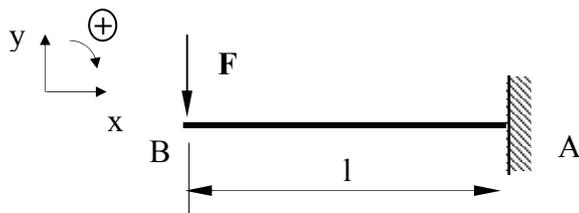
$$\text{Ici, } \omega_1 = \frac{\partial W(C_1)}{\partial C_1}$$

Exemple :



Exercice

Considérons une console chargée à son extrémité. Calculer de la flèche en B (f_b).



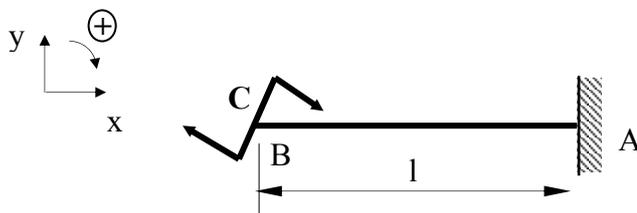
$$\begin{cases} N(x) = 0 \\ V(x) = F \\ M(x) = -F \cdot x \end{cases}$$

On néglige l'effet de l'effort tranchant et de compression, d'où le potentiel interne :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{F^2 \cdot x^2}{E \cdot I} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{F^2 \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} \right)$$

$$\text{et } f_b = \frac{\partial(W)}{\partial F} \Rightarrow f_b = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

Exercice



Calculer Ω_B , rotation de la section B sous l'effet du couple C

III.3.3. Théorème de MENABREA (utilisation du théorème de CASTIGLIANO ci-avant pour calculer des réactions d'appui)

Le théorème de CASTIGLIANO appliqué au niveau des liaisons, sachant que les déformations sont nulles suivant chaque direction bloquées, permet d'obtenir pour chaque liaison, une équation ne faisant intervenir que les efforts extérieurs, les caractéristiques géométriques de la poutre et son module de Young.

Cette procédure permet de résoudre les systèmes hyperstatiques.

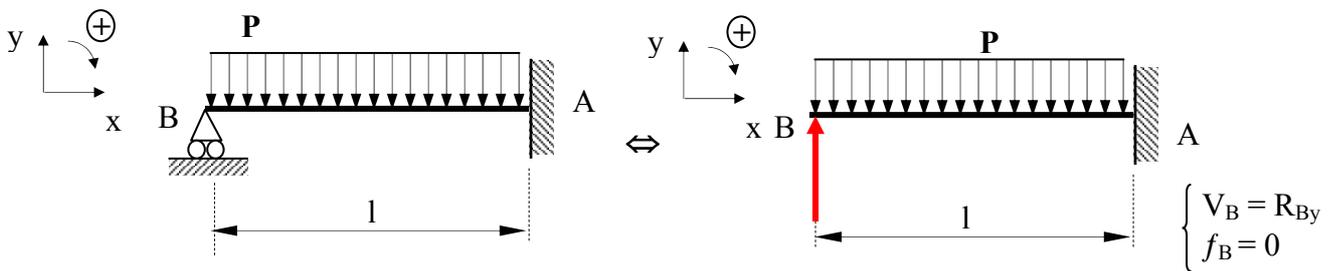
Énoncé du théorème

Les valeurs que prennent les actions de liaison hyperstatiques correspondant aux liaisons surabondantes rendent minimal le potentiel interne W du système considéré exprimé en fonction de ces actions de liaison.

Exemple

On se propose de déterminer l'inconnue de liaison en B de la poutre hyperstatique d'ordre 1 suivante :

L'inconnue de liaison en B est appelée V_B . La structure équivalente s'écrit donc :



avec $M(x) = V_B \cdot x - \frac{P \cdot x^2}{2} \Rightarrow \frac{\partial M(x)}{\partial V_B} = x$

L'application du théorème en B donne alors :

$$\frac{\partial W}{\partial V_B} = \int_0^l \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial V_B} \cdot M(x) \cdot dx = 0$$

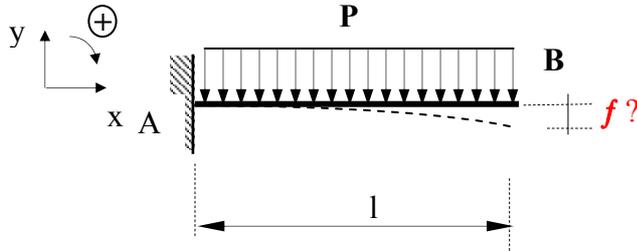
$$\Rightarrow \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^l (V_B \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2}) \cdot x \cdot dx = 0$$

$$V_B \cdot \frac{l^3}{3} - \frac{p \cdot l^4}{8} = 0 \Rightarrow V_B = \frac{3 \cdot p \cdot l}{8}$$

Car $f_B = 0$ et donc $V_B \cdot f_B = 0$

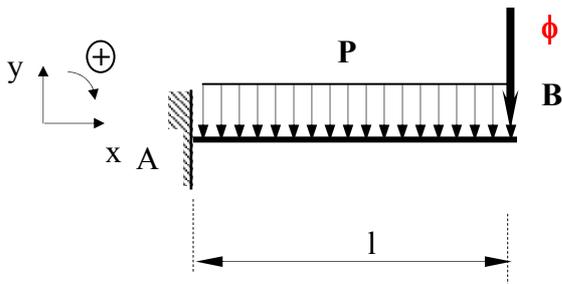
III.3.4. Méthode de la Force Fictive (utilisation du théorème de CASTIGLIANO pour calculer des déformations à partir d'une force fictive)

Le but est de trouver en tout point de la structure le déplacement (translation, rotation) de la section dans une direction donnée.



Par exemple pour la structure ci-contre, on recherche le déplacement verticale en B sous l'effet de la densité de charge linéaire P .

On applique une force fictive ϕ suivant la direction recherchée et au droit du point étudié.



Connaissant les sollicitations internes tout au long de la structure en fonction de cet effort fictif et du chargement existant, on en déduit le déplacement recherché en écrivant que :

$$f = \lim_{\phi \rightarrow 0} \left[\frac{\partial W(P + \phi)}{\partial \phi} \right]$$

Ce qui s'exprime de façon pratique, en négligeant les effets de l'effort tranchant et de l'effort normal devant celui du moment fléchissant (particularité des poutres):

$$f \approx \frac{1}{E.I} \int_0^l \lim_{\phi \rightarrow 0} \left(\frac{\partial M(x)}{\partial \phi} \right) \cdot \lim_{\phi \rightarrow 0} (M(x)) dx$$

Démonstration :

Elle est immédiate en utilisant le théorème de CASTIGLIANO. En effet :

Travail de la structure sous P et ϕ

$$f_B(P + \phi) = \frac{\partial W(P + \phi)}{\partial \phi} \quad \text{or} \quad \lim_{\phi \rightarrow 0} (f_B(P + \phi)) = f_B(P) = f_B$$

Car $\phi=0$ alors !!

Flèche en B pour la structure chargée avec P et ϕ

D'où : $f_B = \lim_{\phi \rightarrow 0} \left[\frac{\partial W(P + \phi)}{\partial \phi} \right]$

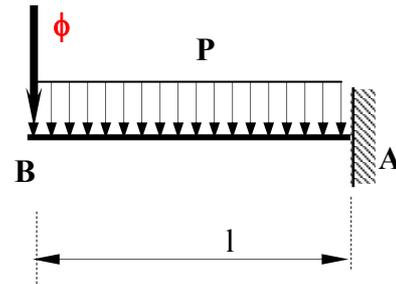
Exemple:

Dans le cas de notre exemple ci-avant l'écriture pratique du théorème de la Force Fictive, nous permet d'écrire que :

$$M(x) = -\phi \cdot x - \frac{P \cdot x^2}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial M(x)}{\partial \phi} = -x$$

$$\text{d'où } \lim_{\phi \rightarrow 0} [M(x)] = -\frac{P \cdot x^2}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{\phi \rightarrow 0} \left[\frac{\partial M(x)}{\partial \phi} \right] = -x$$

$$\text{donc } \lim_{\phi \rightarrow 0} \left(\frac{\partial W(P + \phi)}{\partial \phi} \right) \approx \frac{1}{E.I} \cdot \int_0^l \left(-\frac{P \cdot x^2}{2} \right) \cdot (-x) \cdot dx$$



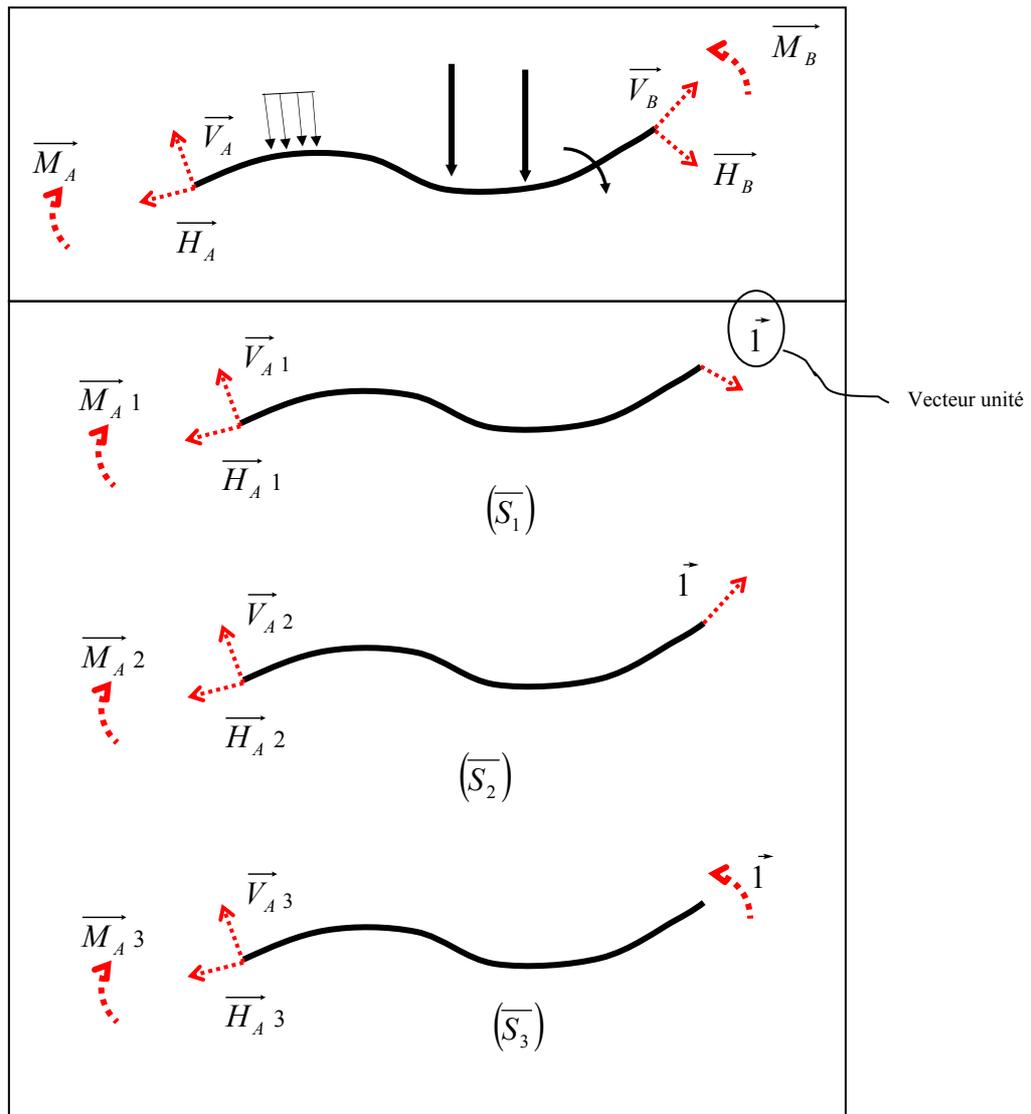
$$\text{et } f_B = \frac{P l^4}{8 \cdot E.I}$$

III.3.5. Théorème de Bertrand de FONTVIOLLANT (Méthode des forces)

Cette méthode est une autre façon de résoudre un système hyperstatique.

A une structure (S) hyperstatique de degré N, on associe n structures (\bar{S}_i).

Elles ont la même géométrie que la structure (S), et sont uniquement sollicitées par une charge unitaire appliquée à la place des inconnues hyperstatiques choisies préalablement.



Le théorème de FONTVIOLLANT a pour expression :

$$\int_S \left(\frac{M \cdot \bar{M}}{E.I} + \frac{V \cdot \bar{V}}{G.S_1} + \frac{N \cdot \bar{N}}{E.S} \right) ds = 1 \cdot \lambda$$

Où :

M, V et N sont les sollicitations internes dans la structure (S),

\bar{M}, \bar{V} et \bar{N} sont les sollicitations internes dans la structure (\bar{S}), 1 étant l'action unitaire,

λ est le déplacement du point d'application de l'action unitaire dans sa direction.

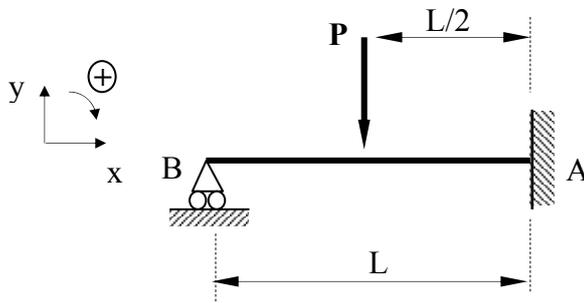
Pour l'exemple graphique ci-avant utilisé, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1.\lambda_{HB} = 0 = \int_{AB} \left(\frac{M.\bar{M}_1}{E.I} + \frac{V.\bar{V}_1}{G.S_1} + \frac{N.\bar{N}_1}{E.S} \right) dl \\ 1.\lambda_{VB} = 0 = \int_{AB} \left(\frac{M.\bar{M}_2}{E.I} + \frac{V.\bar{V}_2}{G.S_1} + \frac{N.\bar{N}_2}{E.S} \right) dl \\ 1.\omega_{MB} = 0 = \int_{AB} \left(\frac{M.\bar{M}_3}{E.I} + \frac{V.\bar{V}_3}{G.S_1} + \frac{N.\bar{N}_3}{E.S} \right) dl \end{array} \right.$$

Ces 3 équations s'ajoutent aux équations données par le PFS, ce qui nous permet de résoudre le système hyperstatique.

Exemple

Nous allons nous intéresser à la résolution d'une poutre hyperstatique de degré 1 par la méthode des forces (théorème de Bertrand de FONTVIOLANT)

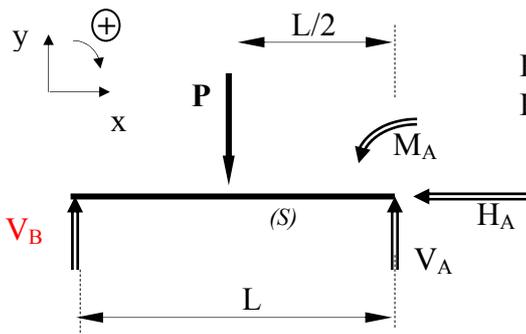


Nous avons pris comme inconnue hyperstatique, l'action de liaison en B.

La structure (\bar{S}) est obtenue en plaçant un effort unitaire en A et dans la direction de V_B .

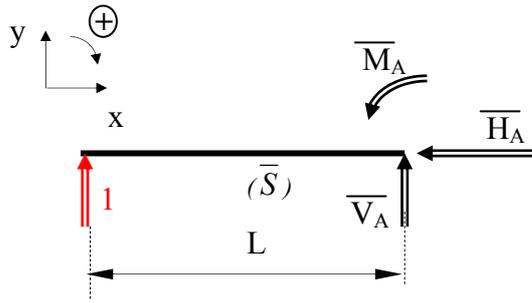
On négligera l'effet de l'effort tranchant devant celui du moment fléchissant .

Les équations du moment fléchissant dans la structure (S) est nous donnent :



Pour $x < L/2$: $M(x) = V_A \cdot x$
 Pour $L/2 < x < L$: $M(x) = V_A \cdot x - P \cdot (x - L/2)$

L'équation du moment fléchissant dans la structure (\bar{S}) est :



Pour $0 < x < L$: $\bar{M}(x) = x.1$

Par application du théorème de Bertrand de FONTVIOLANT, on obtient :

$$1.\lambda_B = 0 = \int_0^l \frac{M.\bar{M}}{E.I} dx$$

$$0 = \frac{1}{E.I} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} V_B .x^2 .dx + \int_0^{\frac{l}{2}} V_B .x^2 - P.x \left(x - \frac{l}{2} \right) .dx \right] \quad \text{d'où : } V_A = \frac{5.P}{16}$$

III.4. ETUDE DES POUTRES CONTINUES : UTILISATION DES FORMULAIRES

Dans les constructions industrielles, l'étude des structures se ramène souvent au calcul d'ensembles de poutres droites assemblées en continuité les unes par rapport aux autres, et liées à un système d'éléments porteurs.

III.4.1. Méthode de résolution

1°) On définit une **structure isostatique associée** ayant:

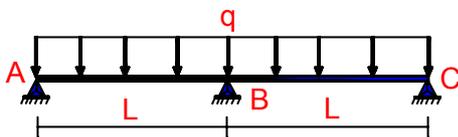
- ⇒ Même géométrie, même matériau, même section des poutres.
- ⇒ Même chargement extérieur que la structure initiale.
- ⇒ Par contre certaines liaisons internes ou avec l'extérieur sont relaxées, de façon à rendre isostatique la structure initiale. Les liaisons relaxées sont remplacées par des forces ponctuelles, correspondant aux degrés de liaison libérés.

2°) On effectue l'étude sur la structure isostatique associée recevant en plus du chargement initial connu, des forces ponctuelles inconnues correspondant aux inconnues des liaisons relaxées.

3°) On écrit les conditions de déformation traduisant l'identité entre les lignes déformées de la structure hyperstatique initiale et de la structure isostatique associée.

C'est cette dernière condition qui permet d'atteindre les valeurs des inconnues hyperstatiques.

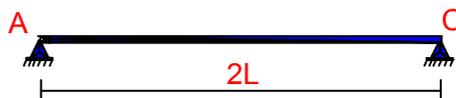
Exemple



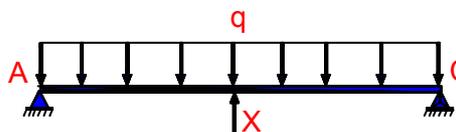
Poutre continue sur 3 appuis, uniformément chargée.

Le système est **hyperstatique d'ordre 1**

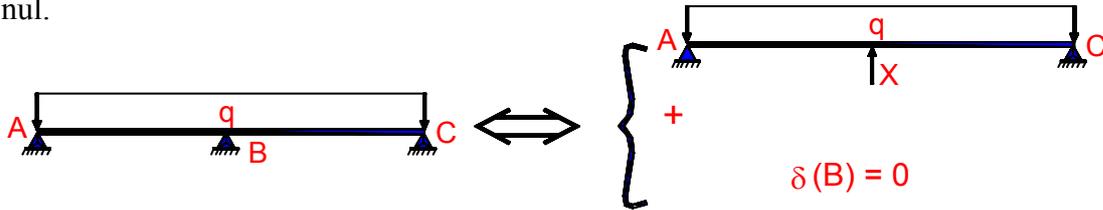
Poutre isostatique associée:



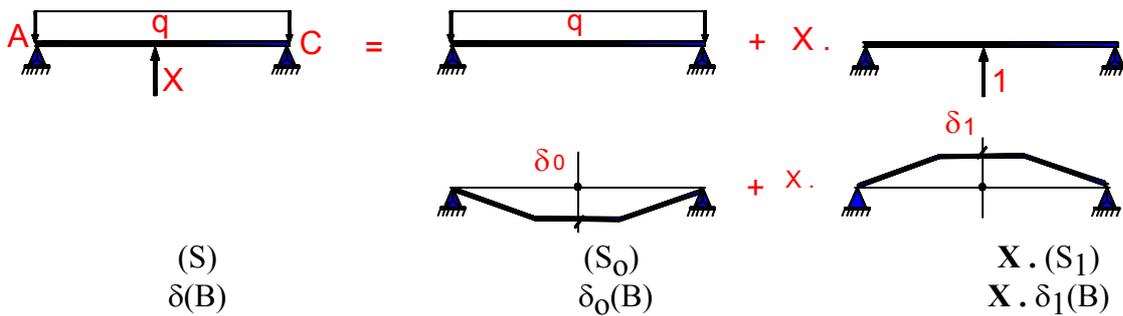
Chargement total de la poutre isostatique associée:



La condition qui traduit la similitude entre le système initial et la poutre isostatique associée chargée par q et la force "supplémentaire" X est que le déplacement vertical du point **B** est nul.



Calcul du déplacement vertical du point B: (application du théorème de superposition)



En consultant un formulaire.

$$|\delta_0(B)| = 5qL^4 / 24EI$$

$$|\delta_1(B)| = 1.L^3 / 6EI$$

Il reste à écrire la condition de déplacement au droit de l'appui hyperstatique, et à en déduire la valeur de l'inconnue hyperstatique X .

$$\text{Soit } \begin{cases} \delta(B) = 0 \\ -\frac{5}{24} \frac{qL^4}{EI} + X \cdot \frac{L^3}{6EI} = 0 \end{cases}$$

Donc

$$X = \frac{5}{4} qL$$

⇒ ce qu'il faut retenir à ce stade : le théorème de superposition est valable pour :

- la superposition des cas de charges
- mais aussi
- la superposition des déformations.

La décomposition d'une poutre continue (non décrit dans les formulaires) en poutres isostatiques simples permet de résoudre les problèmes de poutre continue les plus compliqués (nombre de travées, type de chargement).

Réactions d'appui.

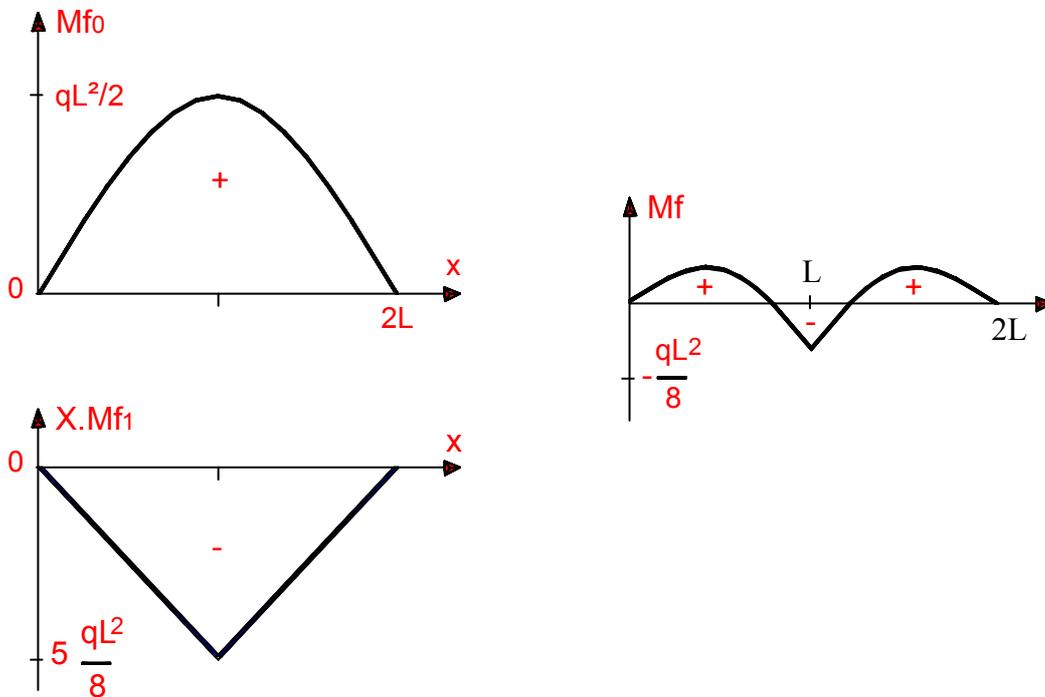
La valeur de la réaction d'appui hyperstatique étant connue, le principe de superposition permet de trouver R_{Av} et R_{Cv} :

$$R_{Av} = R_{Cv} = qL - (5/8).qL = (3/8)qL$$

Diagramme de Moments fléchissants.

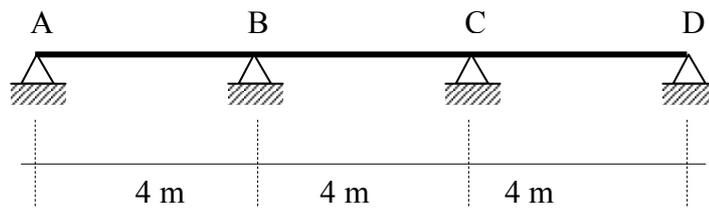
Cette fois, on applique le principe de superposition sur les courbes de moment fléchissant.

$$M_f(x) = M_{f0}(x) + X \cdot M_{f1}(x)$$



Exercice

Un plancher de stockage de céréales en sacs est supporté par des poutrelles IPE continues reposant sur 4 appuis.



Le poids propre du plancher correspond à une charge linéaire sur la poutre de 10 KN/ml. Lorsqu'une travée est utilisée pour stockage, la charge linéaire correspondante est de 30 KN/ml. Au milieu de la travée centrale, une force ponctuelle verticale de 15 KN correspondant à l'emploi d'un chariot porteur peut s'appliquer, indépendamment de l'occupation des divers travées.

1. A partir de vos formulaires donner les moments sur appuis M_B et M_C dans les cas de figure ci-après (expression en fonction de L, P et F).
2. Après avoir déterminé le cas de chargement le plus défavorable, déterminer le moment maxi sur appui en B (expression en fonction de L, P et F).

Cas I	Cas II	Cas III	Cas IV
$M_B = -\frac{3}{10} \cdot \frac{F.L}{4}$	$M_B =$	$M_B =$	$M_B =$
$M_C = -\frac{3}{10} \cdot \frac{F.L}{4}$	$M_C =$	$M_C =$	$M_C =$

Cas de charge où M_B est maxi (schéma) :

Valeurs de M_B :

IV. BIBLIOGRAPHIE

TITRES

Références Biblio. ETSHER

- Traité de Génie Civil : ANALYSE DES STRUCTURES ET MILIEUX CONTINUS ; Tome I- La statique Appliquée
- Précis de Structures de Génie Civil ; Projets, Dimensionnements, Normalisation
- La mécanique par les problèmes : 200 problèmes dont plus de 100 résolus – Résistance des matériaux GEN 2 (156)

V. ANNEXES

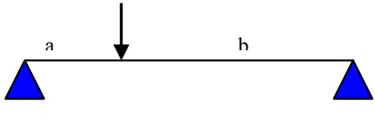
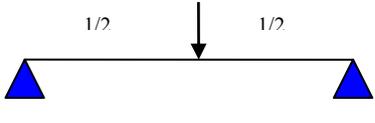
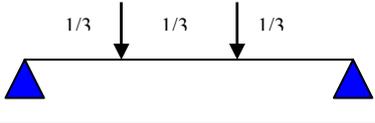
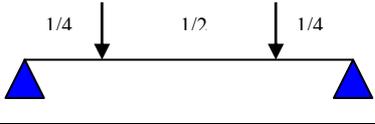
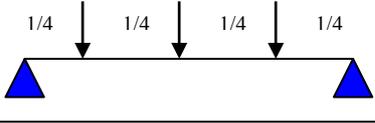
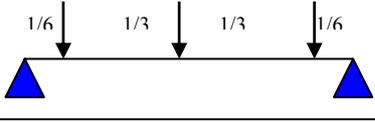
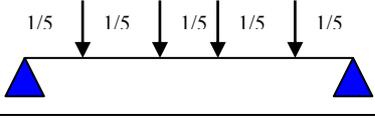
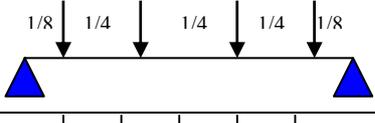
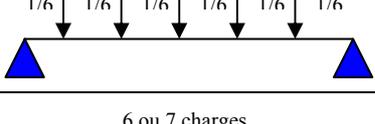
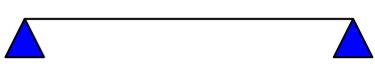
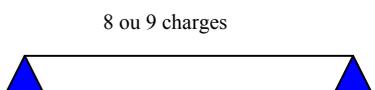
V.1. FORMULAIRE : POUTRES EN FLEXION A 1 TRAVÉE INDEPENDANTE

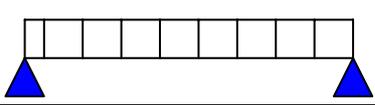
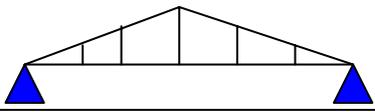
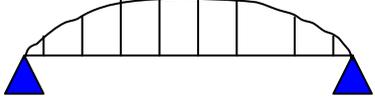
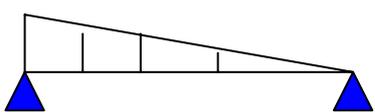
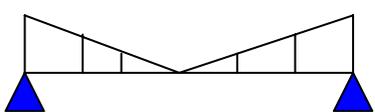
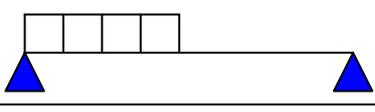
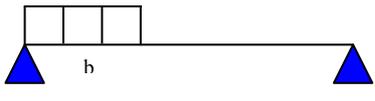
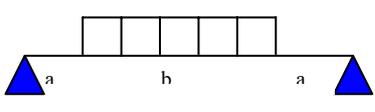
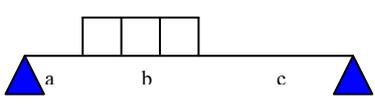
M_o Moment fléchissant maximum	E Coefficient d'élasticité de l'acier ou autre
P Charge totale sur la travée	I Moment d'inertie
L Longueur de la poutre	f_o Flèche maximale

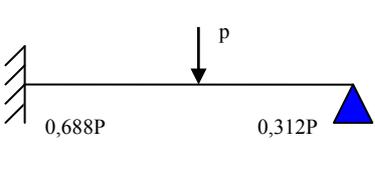
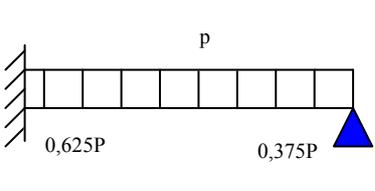
ATTENTION : Ainsi en formule $f_o = C \frac{n l^2}{h}$ utiliser les unités

Références : STAMBLAU 1956 – Tome I page 128.

f Flèche en mm
n Contrainte en kg/mm
l Portée en mètres
h Hauteur de la poutre en cm

	$M_o = \frac{ab}{L^2} PL$	$f_o = 0,333 \frac{Pa^2b^2}{EIL}$
	$M_o = 0,25 PL = \frac{PL}{4}$	$f_o = 0,0208 \frac{PL^3}{EI} = 0,8 \frac{nl^2}{h}$
	$M_o = 0,166 PL = \frac{PL}{6}$	$f_o = 0,0177 \frac{PL^3}{EI} = 1,02 \frac{nl^2}{h}$
	$M_o = 0,125 PL = \frac{PL}{8}$	$f_o = 0,0143 \frac{PL^3}{EI} = 1,10 \frac{nl^2}{h}$
	$M_o = 0,166 PL = \frac{PL}{6}$	$f_o = 0,0165 \frac{PL^3}{EI} = 0,95 \frac{nl^2}{h}$
	$M_o = 0,138 PL = \frac{PL}{7,2}$	$f_o = 0,0136 \frac{PL^3}{EI} = 0,95 \frac{nl^2}{h}$
	$M_o = 0,150 PL = \frac{PL}{6,66}$	$f_o = 0,0157 \frac{PL^3}{EI} = 1,02 \frac{nl^2}{h}$
	$M_o = 0,125 PL = \frac{PL}{8}$	$f_o = 0,0123 \frac{PL^3}{EI} = 0,95 \frac{nl^2}{h}$
	$M_o = 0,150 PL = \frac{PL}{6,66}$	$f_o = 0,0153 \frac{PL^3}{EI} = 1,00 \frac{nl^2}{h}$
	$M_o = 0,143 PL = \frac{PL}{7}$	$f_o = 1,00 \frac{nl^2}{h}$
	$M_o = 0,138 PL = \frac{PL}{7,2}$	$f_o = 1,00 \frac{nl^2}{h}$

	$M_o = 0,125 PL = \frac{PL}{8}$	$f_o = 0,0130 \frac{PL^3}{EI} = 1,00 \frac{nl^2}{h}$
	$M_o = 0,166 PL = \frac{PL}{6}$	$f_o = 0,0166 \frac{PL^3}{EI} = 0,96 \frac{nl^2}{h}$
	$M_o = 0,156 PL = \frac{PL}{6,4}$	$f_o = 0,0159 \frac{PL^3}{EI} = 0,98 \frac{nl^2}{h}$
	$M_o = 0,128 PL = \frac{PL}{7,78}$	$f_o = 0,0130 \frac{PL^3}{EI} = 0,98 \frac{nl^2}{h}$
	$M_o = 0,083 PL = \frac{PL}{12}$	$f_o = 0,0094 \frac{PL^3}{EI} = 1,08 \frac{nl^2}{h}$
	$M_o = 0,14 PL = \frac{PL}{7,11}$	$f_o = 0,013 \frac{PL^3}{EI} = 0,9 \frac{nl^2}{h}$
	$M_o = \frac{P_a}{2} \left(1 - \frac{a}{2L}\right)^2$	$f_o = 0,01134 \frac{P}{EI} \frac{a}{L} \sqrt{(2L^2 - a^2)^3}$
	$M_o = \frac{P}{8} (2L - b)$	$f_o = 0,02602 \frac{P}{EI} (8L^3 - 4Lb^2 + b^3)$
	$M_o = R_G \left(a + \frac{R_G b}{2P}\right)$	

	$M_G = 0,187 PL = \frac{PL}{5,33}$	$M_t = 0,156 PL = \frac{PL}{6,42}$
$f = 0,009317 \frac{PL^3}{EI} = 0,48 \frac{n_G l^2}{h}$		
	$M_G = 0,125 PL = \frac{PL}{8}$	$M_t = 0,070 PL = \frac{PL}{14,2}$
$f = 0,005405 \frac{PL^3}{EI} = 0,42 \frac{n_G l^2}{h}$		

	$M_G = 0,133 PL = \frac{PL}{7,5}$	$M_t = 0,06 PL = \frac{PL}{17}$
$f = 0,004780 \frac{PL^3}{EI} = 0,34 \frac{n_G l^2}{h}$		
	$M_G = 0,116 PL = \frac{PL}{8,56}$	$M_t = 0,084 PL = \frac{PL}{11,8}$
$f = 0,003048 \frac{PL^3}{EI} = 0,5 \frac{n_G l^2}{h}$		
	$M_G = 0,109 PL = \frac{PL}{9,14}$	$M_t = 0,102 PL = \frac{PL}{9,75}$
$f = 0,006767 \frac{PL^3}{EI} = 0,6 \frac{n_G l^2}{h}$		
	$M_G = 0,125 PL = \frac{PL}{8}$	$M_t = 0,125 PL = \frac{PL}{8}$
$f = 0,00521 \frac{PL^3}{EI} = 0,4 \frac{n_G l^2}{h}$		
	$M_G = 0,083 PL = \frac{PL}{12}$	$M_t = 0,042 PL = \frac{PL}{24}$
$f = 0,002604 \frac{PL^3}{EI} = 0,3 \frac{n_G l^2}{h}$		
	$M_G = 0,100 PL = \frac{PL}{10}$	$M_t = 0,043 PL = \frac{PL}{23,3}$
$f = 0,002602 \frac{PL^3}{EI} = 0,25 \frac{n_G l^2}{h}$		

	$M_G = 0,104 PL = \frac{PL}{9,6}$	$M_t = 0,062 PL = \frac{PL}{16}$
$f = 0,003646 \frac{PL^3}{EI} = 0,34 \frac{n_G l^2}{h}$		
	$M_G = 0,115 PL = \frac{PL}{8,72}$	$M_t = 0,051 PL = \frac{PL}{19,8}$
$f = 0,003000 \frac{PL^3}{EI} = 0,25 \frac{n_G l^2}{h}$		

	$M_G = 1,00 PL = \frac{PL}{1}$	
$f = 0,333 \frac{PL^3}{EI} = 3,18 \frac{n_G l^2}{h}$		
	$M_G = 0,50 PL = \frac{PL}{2}$	
$f = 0,125 \frac{PL^3}{EI} = 2,38 \frac{n_G l^2}{h}$		
	$M_G = 0,33 PL = \frac{PL}{3}$	
$f = 0,066 \frac{PL^3}{EI} = 1,93 \frac{n_G l^2}{h}$		
	$M_G = 0,66 PL = \frac{PL}{10}$	
$f = 0,183 \frac{PL^3}{EI} = 2,65 \frac{n_G l^2}{h}$		

V.2. FORMULAIRE : POUTRES CONTINUES

CHARGE UNIFORME $\rightarrow M_A \frac{l_1}{I_1} + 2M_B \left(\frac{l_1}{I_1} + \frac{l_2}{I_2} \right) + M_C \frac{l_2}{I_2} = -\frac{1}{4} \left(\frac{p_1 l_1^3}{I_1} + \frac{p_2 l_2^3}{I_2} \right)$

CHARGES CONCENTREES $\rightarrow M_A \frac{l_1}{I_1} + 2M_B \left(\frac{l_1}{I_1} + \frac{l_2}{I_2} \right) + M_C \frac{l_2}{I_2} = -\frac{P_1 a_1 b_1}{I_1} \left(1 + \frac{a_1}{l_1} \right) - \frac{P_2 a_2 b_2}{I_2} \left(1 + \frac{b_2}{l_2} \right)$

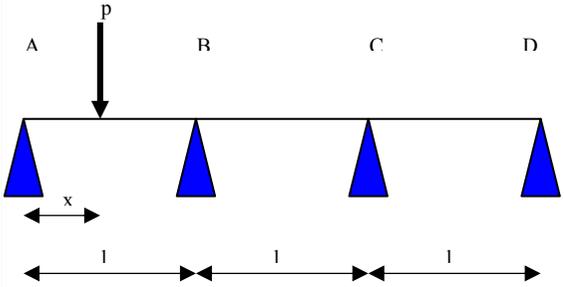
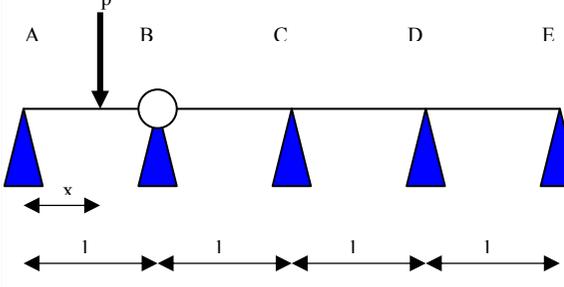
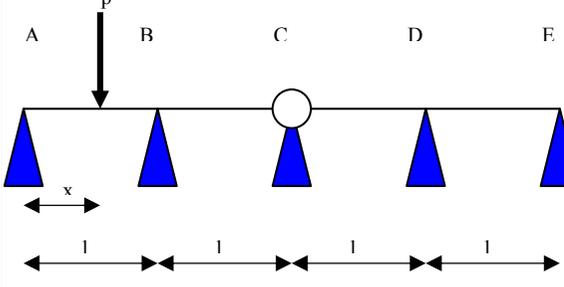
L'équation des 3 moments s'établit de proche en proche en prenant successivement 2 travées adjacentes et en tenant compte de ce que les moments sur les appuis extrêmes sont nuls.

- indice 1 : gauche - indice 2 : droite

Disposition de la charge	Réactions d'appui	x	M _x	x	M _x
	$V_A = V_C = 0,375 pl$ $V_B = 1,25 pl$	0 0,10 l 0,20 l 0,30 l 0,40 l 0,50 l 0,60 l 0,70 l 0,80 l 0,90 l 1	0 0,0325 pl ² 0,0550 pl ² 0,0675 pl ² 0,0700 pl ² 0,0625 pl ² 0,0450 pl ² 0,0175 pl ² -0,0200 pl ² -0,0675 pl ² -0,1250 pl ²	1 1,10 l 1,20 l 1,30 l 1,40 l 1,50 l 1,60 l 1,70 l 1,80 l 1,90 l 2	0 -0,1250 pl ² -0,0675 pl ² -0,0200 pl ² 0,0175 pl ² 0,0450 pl ² 0,0625 pl ² 0,0700 pl ² 0,0675 pl ² 0,0550 pl ² 0,325 pl ² 0
	$V_A = 0,437 pl$ $V_B = 0,625 pl$ $V_C = -0,063 pl$	0 0,10 l 0,20 l 0,30 l 0,40 l 0,50 l 0,60 l 0,70 l 0,80 l 0,90 l 1	0 0,0388 pl ² 0,0675 pl ² 0,0863 pl ² 0,0950 pl ² 0,0938 pl ² 0,0825 pl ² 0,0613 pl ² 0,0300 pl ² -0,0113 pl ² -0,0625 pl ²	1 1,10 l 1,20 l 1,30 l 1,40 l 1,50 l 1,60 l 1,70 l 1,80 l 1,90 l 2	-0,0625 pl ² -0,0563 pl ² -0,0500 pl ² -0,0438 pl ² -0,0375 pl ² -0,0313 pl ² -0,0250 pl ² -0,0188 pl ² -0,0125 pl ² -0,0063 pl ² 0
	$V_A = \frac{P(4l^3 - 4x l^2 - x^2 l + x^3)}{4l^3}$ $M_B = -\frac{P_x(l^2 - x^2)}{4l^2}$	0 0,10 l 0,20 l 0,30 l 0,40 l 0,50 l 0,60 l 0,70 l 0,80 l 0,90 l 1	0 -0,0248 pl -0,0480 pl -0,0683 pl -0,0840 pl -0,0938 pl -0,0960 pl -0,0893 pl -0,0720 pl -0,0428 pl 0	1 1,10 l 1,20 l 1,30 l 1,40 l 1,50 l 1,60 l 1,70 l 1,80 l 1,90 l 2	0 -0,0428 pl -0,0720 pl -0,0893 pl -0,0960 pl -0,0938 pl -0,0840 pl -0,0683 pl -0,0480 pl -0,0248 pl 0

Disposition de la charge	Réactions d'appui	Moments de flexion					
		x	M _x	x	M _x	x	M _x
	$V_A = V_D = 0,40 pl$ $V_B = V_C = 1,10 pl$	0 0,10 l 0,20 l 0,30 l 0,40 l 0,50 l 0,60 l 0,70 l 0,80 l 0,90 l 1	0 0,0350 pl ² 0,0600 pl ² 0,0750 pl ² 0,0800 pl ² 0,0750 pl ² 0,0600 pl ² 0,0350 pl ² 0,0000 pl ² -0,0450 pl ² -0,1000 pl ²	1 1,10 l 1,20 l 1,30 l 1,40 l 1,50 l 1,60 l 1,70 l 1,80 l 1,90 l 2 1	-0,1000 pl ² -0,0550 pl ² -0,0200 pl ² 0,0050 pl ² 0,0200 pl ² 0,0250 pl ² 0,0200 pl ² 0,0050 pl ² -0,0200 pl ² -0,0550 pl ² -0,1000 pl ²	2 l 2,10 l 2,20 l 2,30 l 2,40 l 2,50 l 2,60 l 2,70 l 2,80 l 2,90 l 3 1	-0,1000 pl ² -0,0450 pl ² 0,0000 pl ² 0,0350 pl ² 0,0600 pl ² 0,0750 pl ² 0,0800 pl ² 0,0750 pl ² 0,0600 pl ² 0,0350 pl ² 0
	$V_A = 0,433 pl$ $V_B = 0,650 pl$ $V_C = 0,100 pl$ $V_D = 0,017 pl$	0 0,10 l 0,20 l 0,30 l 0,40 l 0,50 l 0,60 l 0,70 l 0,80 l 0,90 l 1	0 0,0383 pl ² 0,0667 pl ² 0,0850 pl ² 0,0933 pl ² 0,0917 pl ² 0,0800 pl ² 0,0583 pl ² 0,0267 pl ² -0,0150 pl ² -0,0667 pl ²	1 1,10 l 1,20 l 1,30 l 1,40 l 1,50 l 1,60 l 1,70 l 1,80 l 1,90 l 2 1	-0,0667 pl ² -0,0583 pl ² -0,0500 pl ² -0,0417 pl ² -0,0333 pl ² -0,0250 pl ² -0,0167 pl ² -0,0083 pl ² 0,0000 pl ² 0,0083 pl ² 0,0167 pl ²	2 l 2,10 l 2,20 l 2,30 l 2,40 l 2,50 l 2,60 l 2,70 l 2,80 l 2,90 l 3 1	0,0167 pl ² 0,0150 pl ² 0,0133 pl ² 0,0117 pl ² 0,0100 pl ² 0,0083 pl ² 0,0067 pl ² 0,0050 pl ² 0,0033 pl ² 0,0017 pl ² 0
	$V_A = V_D = 0,05 pl$ $V_B = V_C = 0,55 pl$	0 0,10 l 0,20 l 0,30 l 0,40 l 0,50 l 0,60 l 0,70 l 0,80 l 0,90 l 1	0 -0,0050 pl ² -0,0100 pl ² -0,0150 pl ² -0,0200 pl ² -0,0250 pl ² -0,0300 pl ² -0,0350 pl ² -0,0400 pl ² -0,0450 pl ² -0,0500 pl ²	1 1,10 l 1,20 l 1,30 l 1,40 l 1,50 l 1,60 l 1,70 l 1,80 l 1,90 l 2 1	-0,0500 pl ² -0,0050 pl ² 0,0300 pl ² 0,0550 pl ² 0,0700 pl ² 0,0750 pl ² 0,0700 pl ² 0,0550 pl ² 0,0300 pl ² -0,0050 pl ² -0,0500 pl ²	2 l 2,10 l 2,20 l 2,30 l 2,40 l 2,50 l 2,60 l 2,70 l 2,80 l 2,90 l 3 1	-0,0600 pl ² -0,0450 pl ² -0,0400 pl ² -0,0350 pl ² -0,0300 pl ² -0,0250 pl ² -0,0200 pl ² -0,0150 pl ² -0,0100 pl ² -0,0050 pl ² 0

Disposition de la charge	Réactions d'appui	Moments de flexion							
		x	M _x	x	M _x	x	M _x	x	M _x
	$V_A = V_E = 0,3929 pl$ $V_B = V_D = 1,1429 pl$ $V_C = 0,9286 pl$	0 0,10 l 0,20 l 0,30 l 0,40 l 0,50 l 0,60 l 0,70 l 0,80 l 0,90 l 1	0 $0,0343 pl^2$ $0,0586 pl^2$ $0,0729 pl^2$ $0,0771 pl^2$ $0,0714 pl^2$ $0,0557 pl^2$ $0,0300 pl^2$ $-0,0057 pl^2$ $-0,0514 pl^2$ $-0,1071 pl^2$	1 1,10 l 1,20 l 1,30 l 1,40 l 1,50 l 1,60 l 1,70 l 1,80 l 1,90 l 2 1	$-0,1071 pl^2$ $-0,0586 pl^2$ $-0,0200 pl^2$ $0,0086 pl^2$ $0,0271 pl^2$ $0,0357 pl^2$ $0,0343 pl^2$ $0,0229 pl^2$ $0,0014 pl^2$ $-0,0300 pl^2$ $-0,0714 pl^2$	2 1 2,10 l 2,20 l 2,30 l 2,40 l 2,50 l 2,60 l 2,70 l 2,80 l 2,90 l 3 1	$-0,0714 pl^2$ $-0,0300 pl^2$ $0,0014 pl^2$ $0,0229 pl^2$ $0,0343 pl^2$ $0,0357 pl^2$ $0,0271 pl^2$ $0,0086 pl^2$ $-0,0200 pl^2$ $-0,0586 pl^2$ $-0,1071 pl^2$	3 1 3,10 l 3,20 l 3,30 l 3,40 l 3,50 l 3,60 l 3,70 l 3,80 l 3,90 l 4 1	$-0,1071 pl^2$ $-0,0514 pl^2$ $-0,0057 pl^2$ $0,0300 pl^2$ $0,0557 pl^2$ $0,0714 pl^2$ $0,0771 pl^2$ $0,0586 pl^2$ $0,0343 pl^2$ 0
	$V_A = 0,4330 pl$ $V_B = 0,6518 pl$ $V_C = 0,1071 pl$ $V_D = 0,0268 pl$ $V_E = 0,0045 pl$	0 0,10 l 0,20 l 0,30 l 0,40 l 0,50 l 0,60 l 0,70 l 0,80 l 0,90 l 1	0 $0,0383 pl^2$ $0,0666 pl^2$ $0,0849 pl^2$ $0,0932 pl^2$ $0,0915 pl^2$ $0,0798 pl^2$ $0,0581 pl^2$ $0,0264 pl^2$ $-0,0153 pl^2$ $-0,0670 pl^2$	1 1,10 l 1,20 l 1,30 l 1,40 l 1,50 l 1,60 l 1,70 l 1,80 l 1,90 l 2 1	$-0,0670 pl^2$ $-0,0585 pl^2$ $-0,0500 pl^2$ $-0,0415 pl^2$ $-0,0330 pl^2$ $-0,0246 pl^2$ $-0,0161 pl^2$ $-0,0076 pl^2$ $0,0009 pl^2$ $0,0094 pl^2$ $0,0179 pl^2$	2 1 2,10 l 2,20 l 2,30 l 2,40 l 2,50 l 2,60 l 2,70 l 2,80 l 2,90 l 3 1	$0,0179 pl^2$ $0,0156 pl^2$ $0,0134 pl^2$ $0,0112 pl^2$ $0,0089 pl^2$ $0,0067 pl^2$ $0,0045 pl^2$ $0,0022 pl^2$ $0,0000 pl^2$ $-0,0022 pl^2$ $-0,0045 pl^2$	3 1 3,10 l 3,20 l 3,30 l 3,40 l 3,50 l 3,60 l 3,70 l 3,80 l 3,90 l 4 1	$-0,0045 pl^2$ $-0,0040 pl^2$ $-0,0036 pl^2$ $-0,0031 pl^2$ $-0,0027 pl^2$ $-0,0022 pl^2$ $-0,0018 pl^2$ $-0,0018 pl^2$ $-0,0009 pl^2$ $-0,0005 pl^2$ 0
	$V_A = 0,0491 pl$ $V_B = 0,5446 pl$ $V_C = 0,5714 pl$ $V_D = 0,0804 pl$ $V_E = 0,0134 pl$	0 0,10 l 0,20 l 0,30 l 0,40 l 0,50 l 0,60 l 0,70 l 0,80 l 0,90 l 1	0 $-0,0049 pl^2$ $-0,0098 pl^2$ $-0,0147 pl^2$ $-0,0196 pl^2$ $-0,0246 pl^2$ $-0,0295 pl^2$ $-0,0344 pl^2$ $-0,0393 pl^2$ $-0,0442 pl^2$ $-0,0491 pl^2$	1 1,10 l 1,20 l 1,30 l 1,40 l 1,50 l 1,60 l 1,70 l 1,80 l 1,90 l 2 1	$-0,0491 pl^2$ $-0,0046 pl^2$ $0,0300 pl^2$ $0,0546 pl^2$ $0,0691 pl^2$ $0,0737 pl^2$ $0,0682 pl^2$ $0,0528 pl^2$ $0,0273 pl^2$ $-0,0081 pl^2$ $-0,0536 pl^2$	2 1 2,10 l 2,20 l 2,30 l 2,40 l 2,50 l 2,60 l 2,70 l 2,80 l 2,90 l 3 1	$-0,0536 pl^2$ $-0,0489 pl^2$ $-0,0402 pl^2$ $-0,0335 pl^2$ $-0,0268 pl^2$ $-0,0201 pl^2$ $-0,0134 pl^2$ $-0,0067 pl^2$ $0,0000 pl^2$ $0,0067 pl^2$ $0,0134 pl^2$	3 1 3,10 l 3,20 l 3,30 l 3,40 l 3,50 l 3,60 l 3,70 l 3,80 l 3,90 l 4 1	$0,0134 pl^2$ $0,0121 pl^2$ $0,0107 pl^2$ $0,0094 pl^2$ $0,0080 pl^2$ $0,0067 pl^2$ $0,0054 pl^2$ $0,0040 pl^2$ $0,0027 pl^2$ $0,0013 pl^2$ 0

Disposition de la charge		M_B	x	M_B	x	M_B	x	M_B		
	Si p entre A et B	$M_B = -\frac{4p_x(l^2 - x^2)}{15l^2}$	0	0	1	0	2l	0		
	Si p entre B et C		$M_B = -\frac{p_x(1-x)(7l-5x)}{15l^2}$	0,10 l	- 0,0264 pl	1,10 l	- 0,0390 pl	2,10 l	0,0114 pl	
			0,20 l	- 0,0512 pl	1,20 l	- 0,0640 pl	2,20 l	0,0192 pl		
			0,30 l	- 0,0728 pl	1,30 l	- 0,0770 pl	2,30 l	0,0238 pl		
			0,40 l	- 0,0896 pl	1,40 l	- 0,0800 pl	2,40 l	0,0256 pl		
			0,50 l	- 0,1000 pl	1,50 l	- 0,0750 pl	2,50 l	0,0250 pl		
			0,60 l	- 0,1024 pl	1,60 l	- 0,0640 pl	2,60 l	0,0224 pl		
			0,70 l	- 0,0952 pl	1,70 l	- 0,0490 pl	2,70 l	0,0182 pl		
			0,80 l	- 0,0768 pl	1,80 l	- 0,0320 pl	2,80 l	0,0128 pl		
			0,90 l	- 0,0456 pl	1,90 l	- 0,0150 pl	2,90 l	0,0066 pl		
			l	0	2 l	0	3 l	0		
		M_B, M_C	x	M_B, M_C	x	M_B, M_C	x	M_B, M_C		
	$0 < x < l$	$M_B = -\frac{15 p_x(l^2 x^2)}{56 l^2}$	0	0	1	0	2l	3l	0	
			0,10 l	- 0,0256 pl	1,10 l	- 0,0387 pl	2,10 l	0,0105 pl	3,10 l	- 0,0031 pl
			0,20 l	- 0,0514 pl	1,20 l	- 0,0634 pl	2,20 l	0,0171 pl	3,20 l	- 0,0051 pl
			0,30 l	- 0,0731 pl	1,30 l	- 0,0761 pl	2,30 l	0,0206 pl	3,30 l	- 0,0064 pl
			0,40 l	- 0,0900 pl	1,40 l	- 0,0789 pl	2,40 l	0,0214 pl	3,40 l	- 0,0069 pl
			0,50 l	- 0,1005 pl	1,50 l	- 0,0737 pl	2,50 l	0,0201 pl	3,50 l	- 0,0067 pl
			0,60 l	- 0,1029 pl	1,60 l	- 0,0626 pl	2,60 l	0,0171 pl	3,60 l	- 0,0060 pl
			0,70 l	- 0,0956 pl	1,70 l	- 0,0476 pl	2,70 l	0,0131 pl	3,70 l	- 0,0049 pl
			0,80 l	- 0,0771 pl	1,80 l	- 0,0309 pl	2,80 l	0,0086 pl	3,80 l	- 0,0034 pl
			0,90 l	- 0,0458 pl	1,90 l	- 0,0143 pl	2,90 l	0,0040 pl	3,90 l	- 0,0018 pl
			l	0	2 l	0	3 l	0	4 l	0
	$0 < x < l$	$M_C = -\frac{4 p_x(l^2 x^2)}{56 l^2}$	0	0	1	0	2l	3l	0	
			0,10 l	0,0071 pl	1,10 l	- 0,0161 pl	2,10 l	- 0,0418 pl	3,10 l	+ 0,0122 pl
			0,20 l	0,0137 pl	1,20 l	- 0,0343 pl	2,20 l	- 0,0686 pl	3,20 l	0,0206 pl
			0,30 l	0,0195 pl	1,30 l	- 0,0525 pl	2,30 l	- 0,0825 pl	3,30 l	0,0255 pl
			0,40 l	0,0240 pl	1,40 l	- 0,0686 pl	2,40 l	- 0,0857 pl	3,40 l	0,0274 pl
			0,50 l	0,0268 pl	1,50 l	- 0,0804 pl	2,50 l	- 0,0804 pl	3,50 l	0,0268 pl
			0,60 l	0,0274 pl	1,60 l	- 0,0857 pl	2,60 l	- 0,0686 pl	3,60 l	0,0240 pl
			0,70 l	0,0255 pl	1,70 l	- 0,0825 pl	2,70 l	- 0,0525 pl	3,70 l	0,0195 pl
			0,80 l	0,0206 pl	1,80 l	- 0,0686 pl	2,80 l	- 0,0343 pl	3,80 l	0,0137 pl
			0,90 l	0,0122 pl	1,90 l	- 0,0418 pl	2,90 l	- 0,0161 pl	3,90 l	0,0071 pl
			l	0	2 l	0	3 l	0	4 l	0

