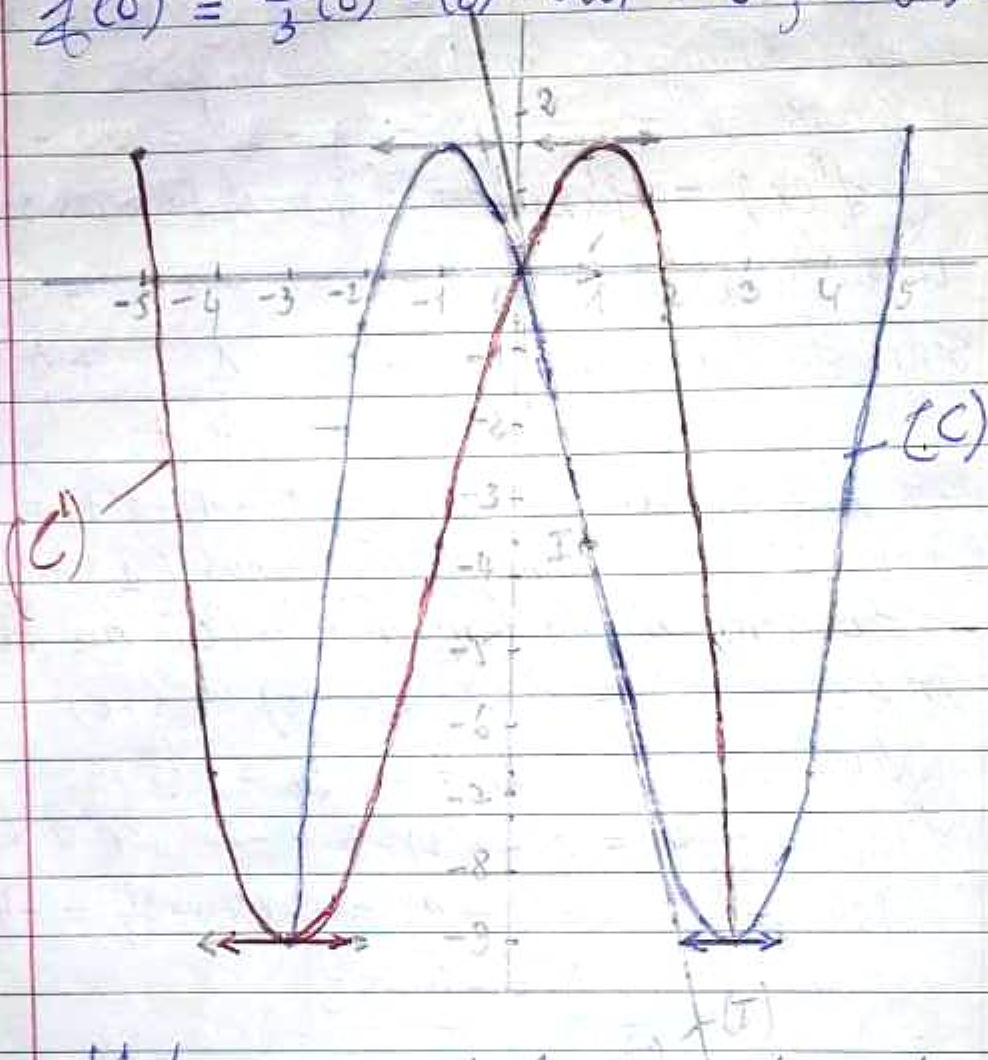
$f(0) = \frac{1}{3}(0)^3 - (0)^2 - 3(0) = 0$; $B(0;0)$



4) Montrons que I est le centre de symétrie de (C)

Methode de changement de base :

Nous pouvons montrer que dans le nouveau repère $(I; \vec{i}, \vec{j})$ la fonction f est impaire. Nous avons le système de changement de base suivant : $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$ avec $I(x_0; y_0)$

$(x; y)$ coordonnées dans $(0; \vec{i}, \vec{j})$ et $(X; Y)$ dans $(I; \vec{i}, \vec{j})$

$\rightarrow \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - \frac{11}{3} \end{cases}$ on a : $y = f(x) \Leftrightarrow Y - \frac{11}{3} = f(X+1)$

$y = f(x) \Leftrightarrow Y - \frac{11}{3} = \frac{1}{3}(X+1)^3 - (X+1)^2 - 3(X+1)$

La fonction f est est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = (x^2 - 2x - 3)' = 2x - 2$

($f''(x) = (f'(x))' \Leftrightarrow f''(x)$ est la dérivée de $f'(x)$)

On a : $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

Signe de $f''(x)$ →

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$\Rightarrow x_0 = 1$ donc $f(1) = \frac{1}{3}(1)^3 - 1^2 - 3(1) = -\frac{11}{3} = y_0$

Donc I est le point de coordonnée $(1 ; -\frac{11}{3})$

- Equation de la tangente à (C) au point I

On a : $f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Nous savons que $x_0 = 1$; $y_0 = -\frac{11}{3}$.

$f'(x_0) = f'(1) = 1^2 - 2(1) - 3 = -4$, on a donc :

$f(x) = -4(x-1) - \frac{11}{3} = -4x + 4 - \frac{11}{3} = -4x + \frac{1}{3}$.

d'où $\boxed{(T) : y = -4x + \frac{1}{3}}$

3) - Construisons la courbe (C)

Points particuliers : Intersection de la courbe Cf avec les axes.

- axes des abscisses : résolvons l'équation $f(x) = 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x = 0$

$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{3}x^2 - x - 3\right) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $\frac{1}{3}x^2 - x - 3 = 0$

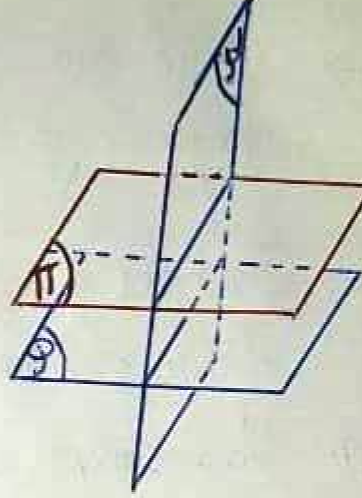
$\frac{1}{3}x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 9 = 0 \quad \Delta = 45 = (3\sqrt{5})^2$.

tcf $\Rightarrow x_1 = \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}$, $A_1(0;0)$

Soit les points $A_2\left(\frac{3-3\sqrt{5}}{2} ; 0\right)$ et $A_3\left(\frac{3+3\sqrt{5}}{2} ; 0\right)$

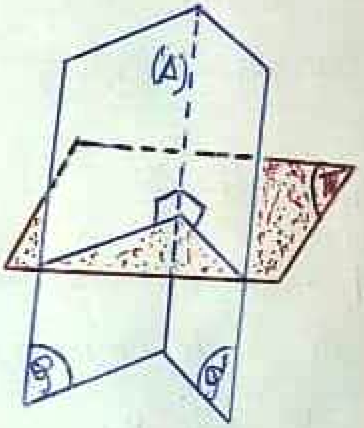
- axes des ordonnées : Calculons $f(0)$

3) Si deux plans sont perpendiculaires, alors tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.



$$\left.\begin{matrix}(P) \perp (P') \\ (P) \parallel (\pi)\end{matrix}\right\} \Rightarrow (P') \perp (\pi)$$

4) Un plan est perpendiculaire à deux plans sécants ssi il est orthogonal à leur droite d'intersection.



(P) et (P') sont sécants en (Δ)

$$\left.\begin{matrix}(\pi) \perp (P) \\ (\pi) \perp (P')\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow (\Delta) \perp (\pi)$$

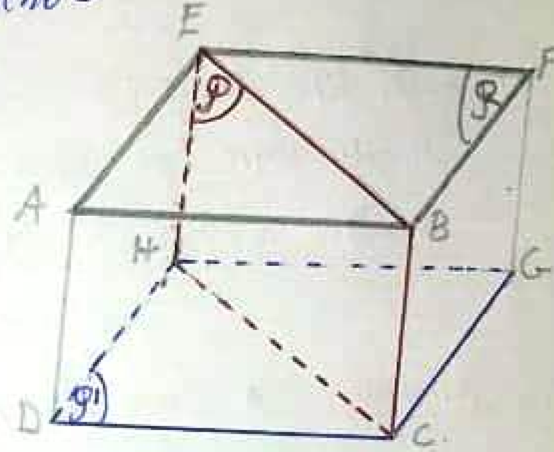
Remarque : • Si deux plans sont perpendiculaires, alors une droite parallèle à l'un n'est pas nécessairement orthogonale à l'autre : c'est-à-dire, c'est le cas de leur droite d'intersection par exemple.

• Deux plans perpendiculaires à un même plan ne sont pas nécessairement parallèles. Dans la propriété (4) ci-dessus, les plans (P) et (P') sont tous perpendiculaires au plan (π) cependant ils ne sont pas parallèles.

• perpendiculaire entraine orthogonaux. La réciproque est fausse.

Exemple : SABCD est une pyramide régulière à base carré et de sommet S.

Activité 1 : Objectifs : - Définir et reconnaître deux plans perpendiculaires de l'espace.
- utiliser les propriétés des plans perpendiculaires de l'espace.



a) Citer une droite du plan (P) orthogonale au plan (P').

→ Nous avons la droite (BC) car elle est orthogonale à (CG) et (CD) incluses dans (P') et sécant en C.

b) Citer une droite du plan (P') orthogonale au plan (P).

→ Nous avons la droite (DC); car elle est orthogonale aux droites (CH) et (BC) toutes incluses dans (P) et sécant en C.

c) Justifier que le plan (R) est parallèle au plan (P').

On a (BC) ⊥ (P'); or ~~les~~ ~~parallèles~~ à (DC) et (CG) ~~sont~~ ~~orth~~ incluses dans (R) sont orthogonales à (BC) ainsi

si $\left.\begin{array}{l}(BC) \perp (P') \\ (BC) \perp (R)\end{array}\right\} \Rightarrow (P') \parallel (R)$

d) Citer sur la figure ci-contre une droite strictement parallèle à (P).

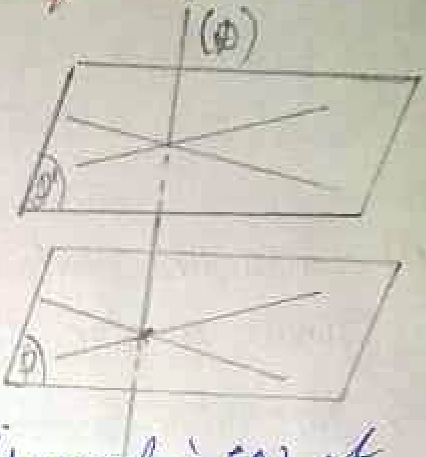
→ Nous avons la droite (HC) ou (BE)

Activité 2 : • préciser la droite d'intersection des plans (P) et (BCG)

→ Il s'agit de la droite (BC)

• Le plan (P') est-il orthogonal à cette droite d'intersection ?

4) - Si deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont orthogonaux à une droite $(\mathcal{D})$ alors ils sont parallèles



$$\left.\begin{array}{l}(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P}) \\ (\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P}')\end{array}\right\} \Rightarrow (\mathcal{P}) \parallel (\mathcal{P}')$$

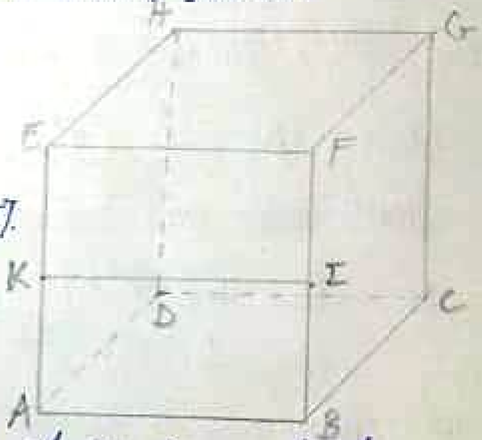
5) - Si une droite $(\mathcal{D})$ est orthogonale à un plan $(\mathcal{P})$, alors toute droite orthogonale à $(\mathcal{D})$ est parallèle à $(\mathcal{P})$

$$\left.\begin{array}{l}(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P}) \\ (\mathcal{D}) \perp (\mathcal{D}')\end{array}\right\} \Rightarrow (\mathcal{P}) \parallel (\mathcal{D}')$$

Remarque : • Pour démontrer que 2 droites sont parallèles, il suffit de montrer qu'elles sont orthogonales à un même plan

• Pour démontrer que deux plans sont parallèles, il suffit de montrer qu'ils sont orthogonaux à une même droite.

Exemple :



Soit ABCDEFGH un cube, I et K les milieux respectifs des segments [BF] et [AE].

• Démontrons que la droite (IK) est orthogonale au plan (ADE)

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l}(AB) \perp (AD) \\ (AB) \perp (AE)\end{array}\right\} (AB) \perp (ADE)$$ car (AD) et (AE) sont deux droites sécante du plan (ADE)

$$\left.\begin{array}{l}(AB) \perp (ADE) \\ (AB) \parallel (IK)\end{array}\right\} \Rightarrow (IK) \perp (ADE).$$

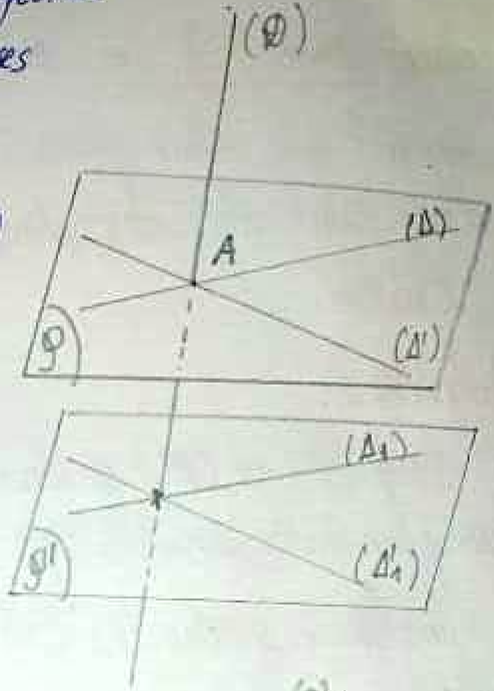
I.3 - Plans perpendiculaires

On considère un pavé droit ABCDEFGH.

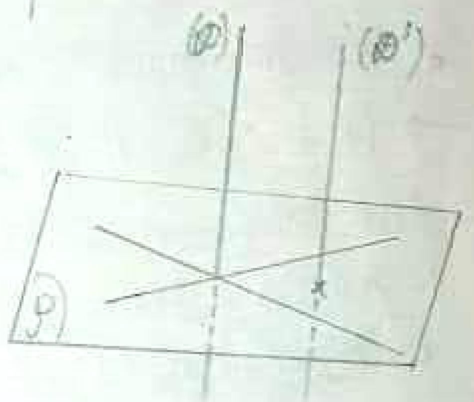
- Construire 2 droites (Δ_1) et (Δ'_1) respectivement parallèles à (Δ) et (Δ') et incluses dans $(\mathcal{P}')$

- Montrer que (D) est orthogonale à $(\mathcal{P}')$

→ On a : $\left.\begin{array}{l}(\mathcal{P}) \parallel (\mathcal{P}') \\ (D) \perp (\mathcal{P})\end{array}\right\} \Rightarrow (D) \perp (\mathcal{P}')$

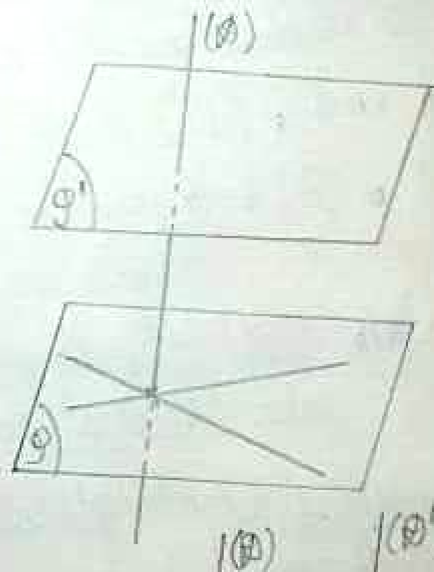


Propriétés



1) - Si deux droites (D) et (D') sont parallèles, alors tout plan $(\mathcal{P})$ orthogonal à (D) est orthogonal à (D')

$\left.\begin{array}{l}(D) \parallel (D') \\ (D) \perp (\mathcal{P})\end{array}\right\} \Rightarrow (D') \perp (\mathcal{P})$



2) Si deux plan $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont parallèles, alors (D) orthogonale à $(\mathcal{P})$ est orthogonal à $(\mathcal{P}')$

$\left.\begin{array}{l}(\mathcal{P}) \parallel (\mathcal{P}') \\ (D) \perp (\mathcal{P})\end{array}\right\} \Rightarrow (D) \perp (\mathcal{P})$

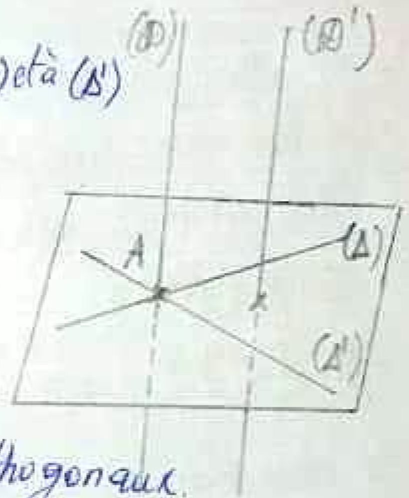
3) Si deux droites (D) et (D') sont orthogonales à un plan $(\mathcal{P})$ alors elles sont parallèles. $\left.\begin{array}{l}(D) \perp (\mathcal{P}) \\ (D') \perp (\mathcal{P})\end{array}\right\} \Rightarrow (D) \parallel (D')$

- Si la droite $(\mathscr{D})$ est parallèle au plan $(\mathscr{P})$, alors toute droite parallèle à $(\mathscr{D})$ est parallèle à $(\mathscr{P})$.
- On dit que deux plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont parallèles si l'un d'eux contient des droites toutes parallèles à celles de l'autre.

Activite 2:

1) Soit $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ 2 droites parallèles. Soit $(\mathscr{P})$ un plan orthogonal à $(\mathscr{D})$ en un point A.

- Construire 2 droites (Δ) et (Δ') sécantes en A et incluses dans $(\mathscr{P})$



- Justifier que $(\mathscr{D}')$ est orthogonale à (Δ) et à (Δ')

→ On a : $(\mathscr{D}') \parallel (\mathscr{D})$, or $(\mathscr{D})$ est orthogonale à (Δ) et (Δ') sécantes au point A. Donc $(\mathscr{D}')$ est également orthogonale à (Δ) et à (Δ').

- En déduire que $(\mathscr{D}')$ et $(\mathscr{P})$ sont orthogonaux.

→ On a : • $(\mathscr{D}') \parallel (\mathscr{D})$

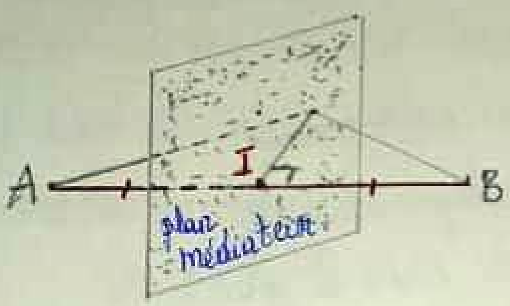
• $(\mathscr{D})$ orthogonale à (Δ) et (Δ') sécantes au poin A

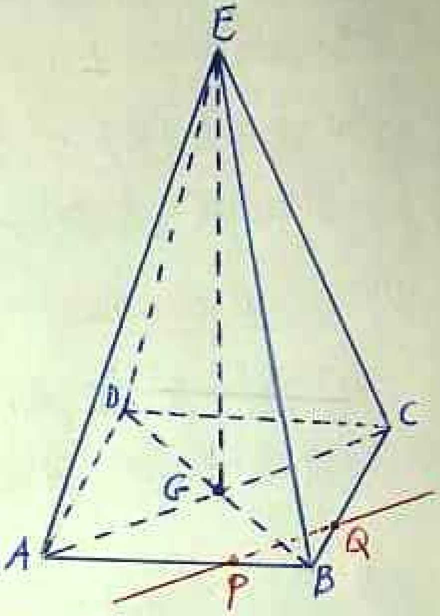
• Donc $(\mathscr{D}')$ est orthogonale à (Δ) et (Δ') avec (Δ) et (Δ') incluses dans $(\mathscr{P})$

→ $(\mathscr{D}')$ et $(\mathscr{P})$ sont orthogonaux.

2). Soit $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ deux plan parallèles. Soit $(\mathscr{D})$ une droite orthogonale à $(\mathscr{P})$ en un point A.

- Construire deux droites (Δ) et (Δ') sécantes en A et incluses dans $(\mathscr{P})$





Exemple

ABCDE est une pyramide régulière à base carré. La droite (EG) est le support de la hauteur de cette pyramide.

- La droite (EG) est orthogonale au plan (ABC) car elle est ~~incluse~~ perpendiculaire aux droites (AC) et (BD)
- Soit $P \in (AB)$ et $Q \in (BC)$ 2 points. La droite (PQ) est incluse dans le plan (ABC), donc la droite (EG) est orthogonale à la droite (PQ)

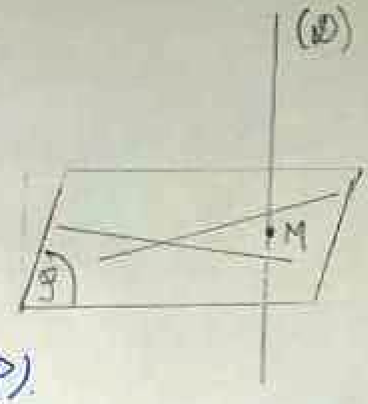
(Devoirs, 1d ; 1e p 388)

I. 2. 2- Orthogonalité et parallélisme de droites et de plans.

Activité 1 : Soit (D) une droite et (P) un plan de l'espace ℰ
Recopier et compléter :

- On dit que (D) est parallèle au plan (P) lorsque $(P) \cap (D) =$ sont confondus ou $(D) \cap (P) =$ sont disjoints
- (D) est parallèle au plan (P) ssi le plan (P) contient une droite parallèle à (D).

Propriétés : 1) Soient $(\mathcal{D})$ une droite et $(\mathcal{P})$ un plan de l'espace $\mathcal{E}$.



On dit que $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ sont orthogonaux lorsque $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$ est orthogonale à 2 droites sécantes incluses dans le plan $(\mathcal{P})$.

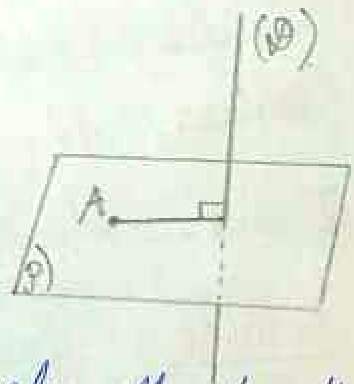
On note $(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{P})$

La droite $(\mathcal{D})$ et le plan $(\mathcal{P})$ sont orthogonaux en M (position relative de la droite $(\mathcal{D})$ et du plan $(\mathcal{P})$)

2) - Conséquences

a) Soit A un point et $(\mathcal{P})$ un plan. Il existe une seule droite passant par A et orthogonale à $(\mathcal{P})$

b) Soit A un point et $(\mathcal{D})$ une droite. Il existe un seul plan passant par A et orthogonal à $(\mathcal{D})$

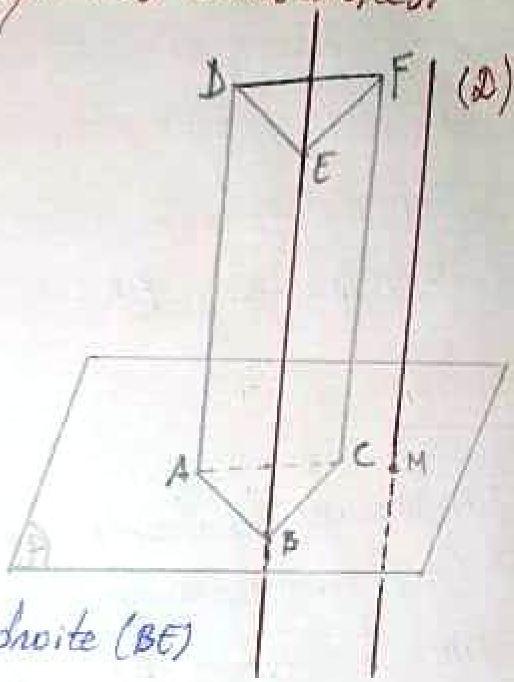


c) Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

d) Soit [AB] un segment de milieu I. Le plan passant par I et orthogonal au support du segment [AB] est appelé plan médiateur du segment [AB].

$\Longrightarrow$ c'est-à-dire (illustration)

I.2.1 - Présentation et Conséquences immédiates.



Sur la figure ci-contre, ABCDEF est un prisme droit et (P) un plan sur lequel repose la base ABC du prisme.

La droite (Ø) est parallèle à la droite (BE)

- Donner la position relative de la droite (BE) et du plan (P)

→ La droite (BE) est orthogonale au plan (P) en B.

- Justifier que (Ø) est orthogonale à (AB) et (Ø) est orthogonale à (BC)

→ Nous constatons que la parallèle à (Ø) qui est la droite (BE) est orthogonale aux droites (AB) et (BC) qui sont cependant sécantes au point B.

Ainsi, si (Ø) // (BE) et que (BE) est orthogonale aux 2 droites sécantes (AB) et (BC) alors (Ø) est orthogonale à (AB) et (BC).

- Donner la position relative de la droite (Ø) et du plan (P)

→ La droite (Ø) et le plan (P) sont orthogonaux en M

- Nommer sur cette figure une autre droite distincte de (BE) et parallèle à (Ø)

→ Nous avons la droite (CF), car (CF) est orthogonale à deux droites (AC) et (BC) sécantes et appartenant au plan (P)

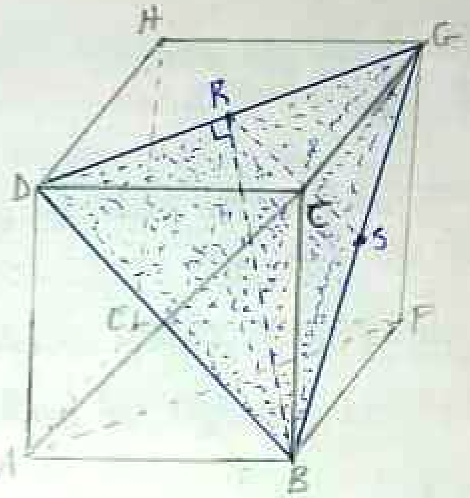
Exercice d'application

Sur la figure ci-contre, ABCDEFGH est un cube. R et S sont les milieux respectifs des segments [DG] et [BG]

1- Montrer que les droites (RS) et (AC) sont orthogonales.

2- Montrer que (BR) est orthogonale à (AF).

Solution.



1) Montrons que les droites (RS) et (AC) sont orthogonales.

→ Dans le triangle (BDG), (RS) est la droite des milieux (car R = milieu [DG] et S = milieu [BG]) donc (RS) // (BD). Or (BD) ⊥ (AC)

[(BD) et (AC) sont perpendiculaires, car elles sont les diagonales du carré ABCD] donc (RS) ⊥ (AC)

2) - Montrons que (BR) est orthogonale à (AF)

→ Le triangle BDG est équilatéral, donc (BR) ⊥ (DG)

$$\left.\begin{array}{l}(BR) \perp (DG)\\ (DG) \parallel (AF)\end{array}\right\} \rightarrow (BR) \perp (AF)$$

I 2 - Droite et plan orthogonaux

Objectifs : - Définir et reconnaître une droite et un plan orthogonaux de l'espace

- Utiliser les propriétés des droites et plans orthogonaux
- Définir et utiliser le plan médiateur d'un segment.

Exemples : dans le cube ABCDEFGH : Comme

$$\left.\begin{array}{l}(AE) \perp (FG) \\ (BF) \parallel (AE)\end{array}\right\} \Rightarrow (BF) \perp (FG).$$

3) Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

$$\left.\begin{array}{l}(D) \parallel (D') \\ (\Delta) \perp (D)\end{array}\right\} \Rightarrow (\Delta) \perp (D')$$

Exemples dans le cube ABCDEFGH ; on a :

$$\left.\begin{array}{l}(FG) \parallel (EH) \\ (BF) \perp (FG)\end{array}\right\} \Rightarrow (BF) \perp (EH).$$

Remarque : Dans l'espace,

- Deux droites orthogonales et sécantes [$(BF) \perp (FG)$] sont perpendiculaires
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales ; [$(HG) \perp (FG)$]
- Deux droites orthogonales et non ~~séquente~~ sécantes sont dites strictement orthogonales. [(AD) et (BF)]
- Deux droites strictement orthogonales ne sont pas coplanaires
- Deux droites peuvent être orthogonales à une même 3ème droite sans être parallèles.

Exple : dans le cube ABCDEFGH, $(AE) \perp (GH)$ or (AE) et (GH) sont toutes orthogonale à la droite (BC), mais (AE) et (EH) ne sont pas parallèles.

- Soit M un point quelconque de l'espace, $(\mathcal{D})$ la parallèle à (AE) passant par M et $(\mathcal{D}')$ la parallèle à (FG) passant par M.

i) Citer une droite de la figure, parallèle à (FG) et perpendiculaire à (AE).

⟶ Nous avons : la droite (EH) ~~ou la~~.

ii) Citer deux droites perpendiculaires de la figure dont l'une est parallèle à $(\mathcal{D})$ et l'autre parallèle à $(\mathcal{D}')$

⟶ Nous avons : les droites (AE) et (EH)

iii) Les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont-elles coplanaires ? perpendiculaires ?

⟶ Les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont ni coplanaires, ni perpendiculaires car leur parallèle dans la figure n'appartiennent pas à un même plan ($(\mathcal{D}) \parallel (AE)$ et $(\mathcal{D}') \in (FG)$) et de plus les droites (AE) et (FG) sont disjoints.

Propriétés : 1) Soient $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ 2 droites de l'espace $\mathcal{E}$.
On dit que $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont **orthogonales** si les parallèles à $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ passant par un point quelconque choisi de l'espace $\mathcal{E}$ sont **perpendiculaires**. On note $(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{D}')$

Exemple : dans le cube ABCDEFGH, les droites (AE) et (FG) sont orthogonales

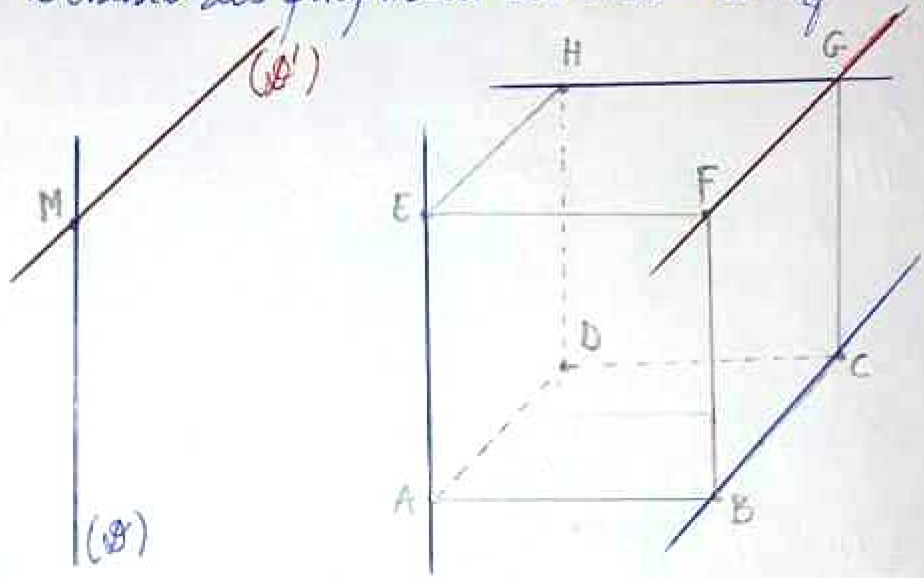
Conséquences : 2) Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre

$$\left.\begin{array}{l}(\mathcal{D}) \perp (\mathcal{D}') \\ (\Delta) \parallel (\mathcal{D})\end{array}\right\} \Longrightarrow (\Delta) \perp (\mathcal{D}')$$

I.1 - Droites Orthogonales

Activité : -

Objectifs : - Définir et reconnaître 2 droites orthogonales de l'espace
- Utiliser les propriétés des droites orthogonales



Sur la figure ci-dessus, ABCDEFGH est un cube.

- Les droites (HG) et (FG) sont-elles coplanaires ? perpendiculaires dans l'espa ?

→ Les droites (HG) et (FG) sont coplanaires (car elles sont contenuent dans un même plan. exemple : le plan (HGF)
De plus les droites (HG) et (FG) sont perpendiculaire dans l'espace, car elles sont secantes au point G et formant un angle droit en ce même point G.

- Justifier que les droites (AE) et (FG) ne sont pas perpendiculaires.

→ Les droites (AE) et (FG) ne sont pas perpendiculaires parce qu'elles n'appartiennent pas à un même plan : par conséquent les droites (AE) et (FG) ne sont pas coplanaires

CEBER	Département de Mathématiques	
Cours Numériques de Mathématiques		
Classe de 1ère C	Date : 02.	
Enseignant	Mahop Mahop Hervé Roland	E-Mail : rzax45@yahoo.fr Whatsapp : 697-210-320 Tél : 691/176/451 - 675727940.

Module 24, CHAP 12 : Orthogonalité dans l'espace.

Leçon 1 : Droites et plans orthogonaux

Compétences visées : - Définir et reconnaître deux droites orthogonales de l'espace.

- Utiliser les propriétés des droites orthogonales.
- Définir et reconnaître une droite et un plan orthogonaux de l'espace.
- Utiliser les propriétés des droites et plans orthogonaux
- Définir et utiliser le plan médiateur d'un segment.
- Définir et reconnaître deux plans perpendiculaires de l'espace.
- Utiliser les propriétés des plans perpendiculaires de l'espace.

Exercice 11

1-a) Ensemble de définition.

La lecture graphique nous permet de dire que f est définie sur IR ; $D_f =]-\infty ; +\infty[$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

1-b) Nous pouvons déduire que la courbe (C) de f admet une seule asymptote parallèle à l'axe des abscisse et d'équation $y = 1$ (asymptote horizontale)

2). Tableau de variations de f

La fonction est décroissante dans l'intervalle $]-\infty ; \frac{1}{2}]$ et croissante dans l'intervalle $[\frac{1}{2} ; +\infty[$.

Le point de coordonnées $(\frac{1}{2} ; -3)$ est le sommet de la courbe, cela signifie que la dérivée f' de f s'annule en $x_0 = \frac{1}{2}$ $(f'(\frac{1}{2}) = 0)$.

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

3) Solutions des équations et des inéquations

a). $f(x) = 0 \iff x = -1$ et $x = 2$; $S = \{-1 ; 2\}$

- $f(x) = 1$, la courbe (C) ne coupe pas la droite d'équation $y = 1$; donc on a : $S = \emptyset$

- $f(x) = -2$, on construit la droite d'équation $y = -2$ et nous voyons qu'elle coupe la courbe (C) en 2 pts. En projettant ces pts sur l'axe des abscisses $\Rightarrow x = 0$ et $x = 1$; $S = \{0 ; 1\}$.

$f(0) = -2 \Leftrightarrow b = -2$; $f(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} = 0$

$$\begin{cases} b = -2 \\ \frac{a+b}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = 2. \end{cases}$$

Donc $\forall x \in D_f$ on a : $f(x) = \frac{2x-2}{x+1}$.

4) Fonction dérivée f' de f.

f est dérivable sur D_f comme rapport de 2 fonctions dérivables.

$$\forall x \in D_f,\ f'(x) = \left(\frac{2x-2}{x+1}\right)' = \frac{(2x-2)'(x+1) - (2x-2)(x+1)'}{(x+1)^2}$$

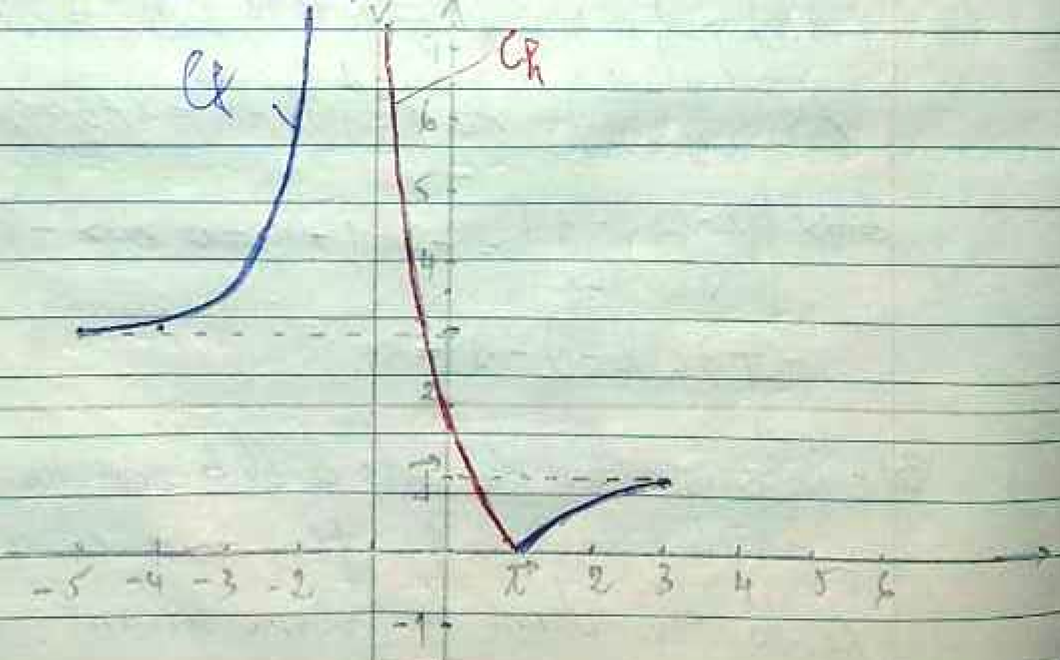
$$= \frac{2x+2-2x+2}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4}{(x+1)^2}$$

5) Déduction de la courbe H. $h(x) = |f(x)|$

$\rightarrow \forall x \in [-5;-1[\cup]1;3]$; $h(x) = f(x)$.

$\forall x \in]-1;1[$, $h(x) = -f(x)$.



30

d'où $I(1;4)$ est centre de symétrie de la courbe C_f.

Exercice 10

1) Tableau de variations de f.

f est une fonction croissante sur son D_f. Voici son tableau de variations:

x	-5	-1	3
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$3 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 1$

2) - La tangente (T) à C_f au point d'abscisse $x_0 = 1$ passe par les points de coordonnées $(1;0)$ et $(0;-1)$

Désignons par A et B ces points; nous avons $A(1;0)$ et $B(0;-1)$.

Il s'agit d'une ~~une~~ équation de la droite qui passe par les points A et B.

$(AB) = \{\forall M \in \mathcal{P}, \exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}\}$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) = 0$

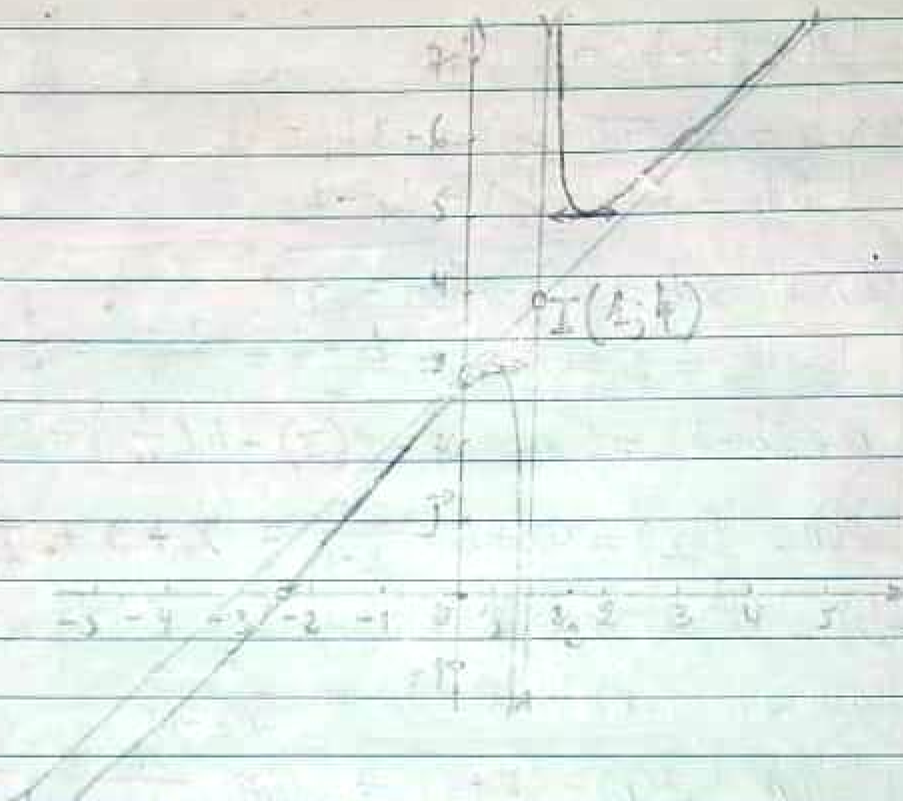
$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y & -1 \end{vmatrix} = -x+1+y = 0 \Longleftrightarrow -x+y+1=0$

$(T): x-y-1=0$.

3) - Détermination des réels a et b pour tout $x \in D_f$.

$\rightarrow$ graphiquement on a: $f(0) = -2$ et que $f(1) = 0$.

Cela nous donne le système suivant:



4) - Montrons que le point de concours des asymptotes est le centre de symétrie.

Nous avons 2 asymptotes d'équation $x = 1$ et $y = x+3$

Cela nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = x+3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad \text{soit } I(1;4)$$

Montrons que $f(2(1)-x) + f(x) = 2\times(4)$

$$f(2-x) = (2-x) + 3 + \frac{1}{4[(2-x)-1]} = -x+5+\frac{1}{4-4x}$$

$$\Rightarrow f(2-x) + f(x) = (-x+5) + \frac{1}{4-4x} + (x+3) + \frac{1}{4x-4}$$

$$= 8 + \frac{1}{4-4x} + \frac{1}{4x-4}$$

$$= 8 - \cancel{\left(\frac{1}{4x-4}\right)} + \cancel{\frac{1}{4x-4}}$$

Donc $f(2-x) + f(x) = 8 = 2\times(4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b-4c=6 & (L_1) \\ b-4c=2 & (L'_2) = -3L_1+L_2 \\ 2b=6 & (L'_3) = L_1-L_3 \end{cases}$$

On a : $2b = 6 \Leftrightarrow \boxed{b = 3}$

$b-4c = 2 \Leftrightarrow c = \frac{b-2}{4} = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4}$; $\boxed{c = \frac{1}{4}}$

$a+2b-4c=6 \Leftrightarrow a+2(3)-4\left(\frac{1}{4}\right)=6 \Rightarrow \boxed{a=1}$

Donc $f(x) = ax+b+\frac{c}{x-1} = x+3+\frac{1}{4(x-1)}$

2-b) - Équation de l'asymptote oblique.

On a : $f(x)-(x+3) = \frac{1}{4(x-1)}$

$\lim\limits_{x \to \infty} [f(x)-(x+3)] = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{4(x-1)} = 0.$

Nous Concluons qu'en $-\infty$ et en $+\infty$, la droite d'équation $y = x+3$ est asymptote oblique à la courbe C_f.

3) - Intersection de la courbe avec les axes.

* axe des abscisses : Resolvons $f(x) = 0$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow (x+3)+\frac{1}{4(x-1)} = \frac{(x+3)4(x-1)+1}{4x-4} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{4x^2+8x-11}{4x-4} = 0 \Leftrightarrow 4x^2+8x-11=0$

$\Delta' = 16-4(-11) = 27 = (3\sqrt{3})^2 > 0$. on a :

$x_1 = \frac{-4-3\sqrt{3}}{4}$; $x_2 = \frac{-4+3\sqrt{3}}{4}$

On a les points $A_1(x_1, 0)$ et $A_2(x_2, 0)$

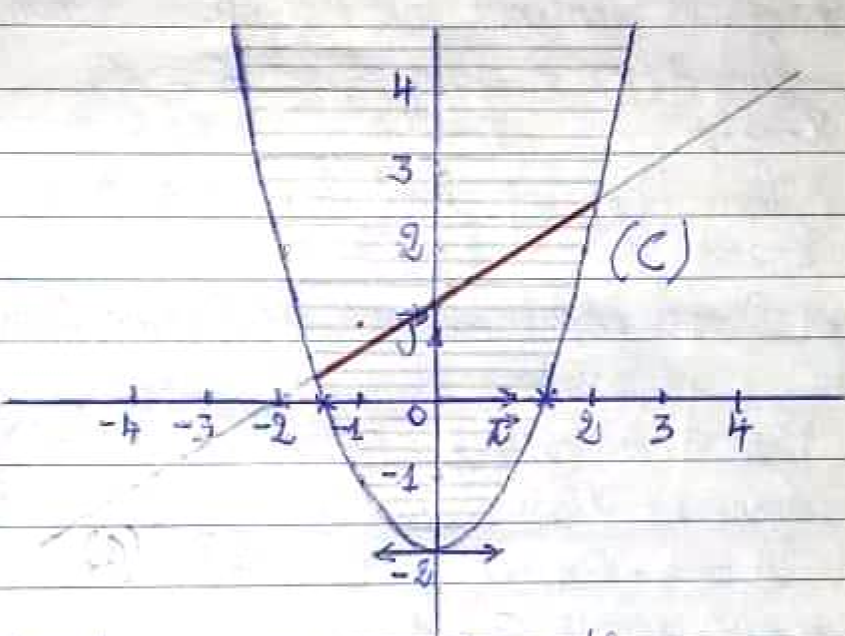
* axe des ordonnées : Calculons $f(0)$.

$f(0) = (0)+3+\frac{1}{4[0-1]} = \frac{11}{4} \Rightarrow B\left(0; \frac{11}{4}\right)$

Nous avons les points $A_1(-\sqrt{2};0)$ et $A_2(\sqrt{2};0)$

- Axe des ordonnées : calculons $f(0)$.

$f(0) = (0)^2 - 2 = -2 \rightarrow B(0;-2)$



4) Résolution graphique du système

$\begin{cases} y - x^2 + 2 \geq 0 \\ 2x - 3y + 4 = 0 \end{cases}$ La courbe d'équation $y - x^2 + 2 = 0$ est déjà tracée

. Soit $O(0;0)$ les coordonnées de O vérifient-elles l'inéquation $y - x^2 + 2 \geq 0$? ✗.

Nous avons $0 - (0)^2 + 2 \geq 0$; $2 \geq 0$ qui est une proposition vraie.

La solution de l'inéquation $y - x^2 + 2 \geq 0$ est la partie du plan de frontière la courbe (C) contenant le pt O.

. Construisons ensuite la droite $2x - 3y + 4 = 0$

x	0	-2
y	4/3	0

La solution du système est la partie de la droite (en rouge) qui est incluse dans la partie hachurée.

13

3) On pose $m = 1$

a) montrons que f est paire. ($f = f_1$)

$f_1 = f_1(x) = x^2 - 2$.

$\longrightarrow$ f est une fonction paire si $\forall x \in \mathbb{R}$ et $-x \in \mathbb{R}$,

$f(-x) = f(x)$.

On a : $f(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = f(x)$

Donc f est une fonction paire.

b) Etude des variations de f_1.

$f_1(x) = x^2 - 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

• f_1 est continue sur D_{f_1} comme somme de fonctions continues.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$

• f_1 est dérivable sur D_{f_1} comme somme de fonctions dérivables ~~sur~~)

$\forall x \in D_{f_1}$ on a : $f_1'(x) = (x^2 - 2)' = 2x$.

• Signe de $f_1'(x) \longrightarrow$, $f_1'(x) = 0 \iff 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

Tableau de Variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$\begin{cases} f_1'(0) = 0 \\ f_1(0) = -2 \end{cases}$

c) Construction de la courbe C_{f_1}.

points particuliers

Intersection de la courbe C_{f_1} avec les axes de coordonnées

– axe des abscisses : résolvons l'équation $f_1(x) = 0$

$f_1(x) = 0 \iff x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}$ et $x_2 = \sqrt{2}$

Résolution de l'équation (2).

$x^2 - x - 2 = 0$ $\Delta = 1 - 4(1)(-2) = 9 \Rightarrow$ tcf:

on a $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$.

Donc pour $x = -1$; $y - x = 0 \Rightarrow y = -1$

pour $x = 2$; $y = 2$.

Les courbe C_m passant par les deux points fixes $A(-1;-1)$ et $B(2;2)$

2). Coordonnées de S_m.

→ Nous savons que les sommets des courbes correspondent aux extremums.

f_m est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_m(x) = 2mx + 1 - m$.

$f'_m(x) = 0 \Leftrightarrow 2mx + 1 - m = 0$.

Si $m = 0$, nous avons $1 = 0$ (qui est une proposition fausse).

Pour $m = 0$, C_0 n'admet pas de sommets.

Si $m \neq 0$ nous avons : $2mx_0 + 1 - m = 0$

$\Rightarrow x_0 = \frac{m-1}{2m}$ (abscisse du point au sommets)

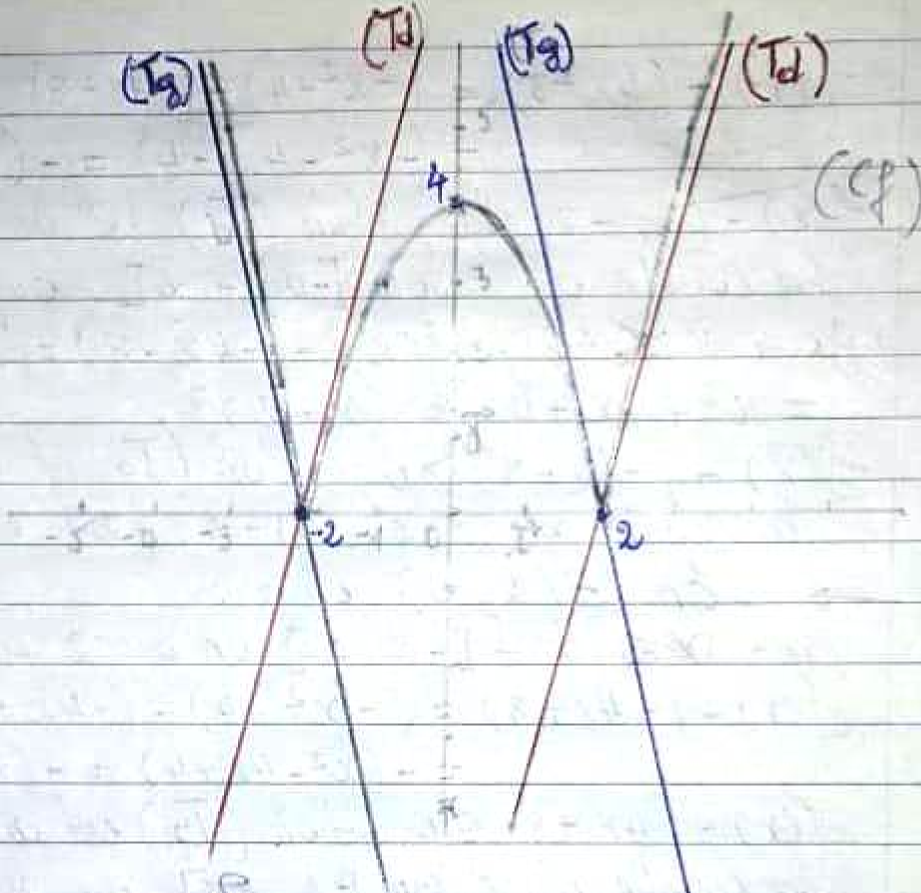
$$y_0 = f(x_0) = m\left(\frac{m-1}{2m}\right)^2 + (1-m)\left(\frac{m-1}{2m}\right) - 2m$$

$$= \frac{(m-1)^2}{4m} - \frac{(m-1)^2}{2m} - 2m$$

$$= \frac{-9m^2 + 2m - 1}{4m}$$

Les sommets des courbes C_m sont les point S_m de coordonnées : $\left(\frac{m-1}{2m} ; \frac{-9m^2 + 2m - 1}{4m}\right)$

(11



4) impossible de construire la courbe (Γ) car pour représenter $g(x) = |f(x)|$ il suffit de remonter la partie de la courbe Cf qui est en dessous de l'axe des abscisses symétriquement à cet axe. Or il n'existe aucune partie de (Cf) en dessous de l'axe des abscisses.

Exercice 4

Solution : 1 - Pour que les courbes C_m passent par 2 points fixes il suffit que $y - f_m(x) = 0$ quelque soit m

Nous avons :

$$y - mx^2 - (1-m)x + 2m = 0$$

$$y - x - m(x^2 - x - 2) = 0.$$

Nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} y - x = 0 & (1) \\ x^2 - x - 2 = 0 & (2). \end{cases}$$

$f(x)-(4x+8)=(-x^2+4)-(4x+8)$
$=(-x^2-4x-4)=-(x+2)^2$

$f(x)-(4x+8)\leq 0$; D'où (T_d) est au-dessus de la courbe de f sur $[-2;+\infty[$. ou $x\geq -2$.

Pour $x \leq -2$; $f(x)-(-4x-8)=(x^2-4)-(-4x-8)$
$=x^2+4x+4=(x+2)^2$

$f(x)-(-4x-8)\geq 0$; d'où (T_g) est en-dessous de la courbe de f sur $]-\infty;-2]$ ou $x\leq -2$.

En $B(2;0)$ on a :

Pour $x\in[-2;2]$ on a ; 2 à gauche,
$f(x)-(-4x+8)=(-x^2+4)-(-4x+8)$
$=-(x^2-4x+4)=-(x-2)^2$

$f(x)-(4x+8)\leq 0$; d'où (T_g) est au-dessus de la courbe de f sur $[-2;2]$ ou $x\leq 2$.

Pour $x\geq 2$; $f(x)-(4x-8)=(x^2-4)-(4x-8)$
$=x^2-4x+4=(x-2)^2\geq 0$

D'où la courbe de f est au-dessus de T_d sur $[2;+\infty[$.

3) Construire (C_f) et les demi-tangentes aux points anguleux.

- Points particuliers (intersection de C_f avec les axes)

• axe des abscisses : resolvons l'équation $f(x)=0$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4=0 \text{ si } x\in]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[\\ -x^2+4=0 \text{ si } x\in[-2;2] \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x_1=-2$ et $x_2=2 \Rightarrow A_1(-2,0)$ et $A_2(2;0)$

• axe des ordonnées : calculons $f(0)$ or $0\in[-2;2]$

$$f(0) \Leftrightarrow \begin{cases} (0)^2-4=-4 \text{ si } x\in]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[\\ -(0)^2+4=4 \text{ si } x\in[-2;2] \end{cases}$$

$\Rightarrow y_1=-4$ et $y_2=4 \Rightarrow \cancel{B_1\binom{0}{-4}}$ et $B_2\binom{0}{4}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 4) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 4) = +\infty$.
- f est continue et dérivable pour $\forall x \in Df \setminus \{-2; 2\}$. (car f n'est pas dérivable en -2 et 2, et Cf admet les demi-tangentes de même origine aux points $A(-2;0)$ et $B(2;0)$.
- Dérivée de la fonction f.

$\forall x \in Df \setminus \{-2; 2\}$, on a : $f'(x) =$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\\ -2x & \text{si } x \in]-2; 2[\end{cases}$$

- Signe de $f'(x)$

si $x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$, on a : $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

si $x \in]-2; 2[$, on a $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-4 \parallel 4$	$+$	0	$-$	$-4 \parallel 4$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) ~~Construire la courbe $C(f)$ et les demi-ta~~

Etude de la position de la courbe par rapport à ses demi-tangentes en $A(-2;0)$ et $B(2;0)$

$\rightarrow \forall x \in [-2; 2]$: En $A(-2;0)$ on a : -2 à droite