En conclusion, $(x;y)+(x';y') \in F$

* Montrons enfin que, $\forall (x;y) \in F$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha(x;y) \in F$

Soit $(x;y) \in F$, soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha(x;y) = (\alpha x ; \alpha y)$

Montrons que $(\alpha x ; \alpha y)$ vérifie l'équation de F.

$$(\alpha x) + 2(\alpha y) = \alpha \underbrace{(x+2y)}_{0} = \alpha . 0 = 0.$$

Donc $\alpha(x;y) \in F$.

Nous pouvons dire que F est non vide, F est stable pour l'addition et pour la multiplication externe ; donc F est un s.e.v réel de E.

1-b) · Déterminons une base de F.

Nous savons que pour tout couple $(x;y) \in F$, on a $x + 2y = 0$. Nous pouvons exprimer ici x en fonction de y ou bien y en fonction de x.

$\Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y$. Le couple $(x;y)$ s'écrit : $(x;y) = (-2y ; y) = y(-2;1)$.

Tout élt de F est combinaison linéaire du couple $(-2;1)$ qui est non nul : ~~donc une base de E qui est non nul~~ : Donc une base de F est $e(-2;1)$.

Comme une quelconque base de F possède un vecteur, Nous pouvons dire que $\dim F = 1$

2) · G est le s.e.v réel de E définie par :

$G = \{(x;y) / 2x - y = 0\}$.

→ Déterminons une base de G ; $\forall$ couple $(x;y)$ de G nous avons $2x - y = 0$

- $\forall (x;y;z)\in F, \forall \alpha\in\mathbb{R}, \alpha(x;y;z)\in F$.

- Montrons que F contient l'élément neutre de E ($\{\vec{0}_E\}$)

Cet élément neutre est $(0;0;0)$ nous avons:

$2(0)-3(0)-0=0 \Rightarrow$ alors $(0;0;0)\in F$ donc $F\neq\emptyset$

- Soit $(x;y;z),(x';y';z')\in F$ on a:

$(x;y;z)+(x';y';z')=(x+x';y+y';z+z')$

$\Rightarrow 2(x+x')-3(y+y')-(z+z')$

$=\underbrace{(2x-3y-z)}_{0}+\underbrace{(2x'-3y'-z')}_{0}=0$

donc, $(x;y;z)+(x';y';z')\in F$.

- Soit $(x;y;z)\in F$, soit $\alpha\in\mathbb{R}$ on a:

$\alpha(x;y;z)=(\alpha x;\alpha y;\alpha z)$

$\Rightarrow 2(\alpha x)-3(\alpha y)-(\alpha z)=\alpha\underbrace{(2x-3y-z)}_{0}$

$=\alpha.0$

$=0$

Donc $\alpha(x;y;z)\in F$.

D'où F est un s.e.v réel de E.

1-b) - Déterminons une base de F.

Nous savons que pour tout triplet $(x;y;z)\in F$ on a:

$2x-3y-z=0 \rightarrow$ Nous pouvons exprimer l'une des inconnues en fonction de 2 autres.

$z=2x-3y$, le triplet (x,y,z) devient:

$(x;y;z)=(x;0;2x)+(0;y;-3y)$

$=x(1;0;2)+y(0;1;-3)$

On pose $\vec{e_1}=(1;0;2)$ et $\vec{e_2}=(0;1;-3)$

$(\vec{e_1}; \vec{e_2})$ est une famille génératrice de F.

Montrons que cette famille $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est libre:

Il suffit de Mq $x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = (0_F) \Leftrightarrow x = y = 0$

On a donc: $x\vec{e_1} + y\vec{e_2} = x(1;0;2) + y(0;1;-3)$

$= (x;0,2x) + (0;y;-3y)$

$= (x;y;2x-3y) = (0;0;0)$

Nous obtenons le système:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$(\vec{e_1}; \vec{e_2})$ est une famille génératrice et libre de F donc $(\vec{e_1}; \vec{e_2})$ est une base de F.

-Toute base de F qui possède 2 vecteurs a donc pour dimension 2 $(\dim F = 2)$

2)- G est le s.e.v réel de E définie par:

$G = \{(x;y,z) \mid x - 2y + z = 0\}$.

-Déterminons une base de G.

$\forall$ triplet $(x;y;z) \in G$, nous avons $x - 2y + z = 0$

En exprimant x en fonction de y et z nous avons

$x = 2y - z$, le triplet $(x;y;z)$ devient:

$(x;y;z) = (2y - z;y;z)$

$= (2y;y;0) + (-z;0;z)$

$= y(2;1;0) + z(-1;0;1)$

Posons $\vec{e}_1' = (2;1;0)$ et $\vec{e}_2' = (-1;0;1)$

$(\vec{e}_1', \vec{e}_2')$ est une famille à la fois libre et génératrice de G. Donc $(\vec{e}_1', \vec{e}_2')$ est une base.

3)-Déterminons $H = F \cap G$.

En exprimant y en fonction de x on a :
$2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x$; le couple $(x;y)$ s'écrit :
$(x;y) = (x;2x) = x(1;2)$
Tout élément de G est combinaison linéaire du couple $(1;2)$ qui est non nul ; donc une base de G est $e'(1;2)$. Nous en déduisons que $\dim G = 1$.

3). On pose $H = F \cap G$.
a). Détermination de H. → Nous savons que F et G sont 2 droites vectorielles car leur dimension est 1.
Il s'agit donc ici de trouver l'intersection de 2 droites vectorielles :
→ Résolvons le système : $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

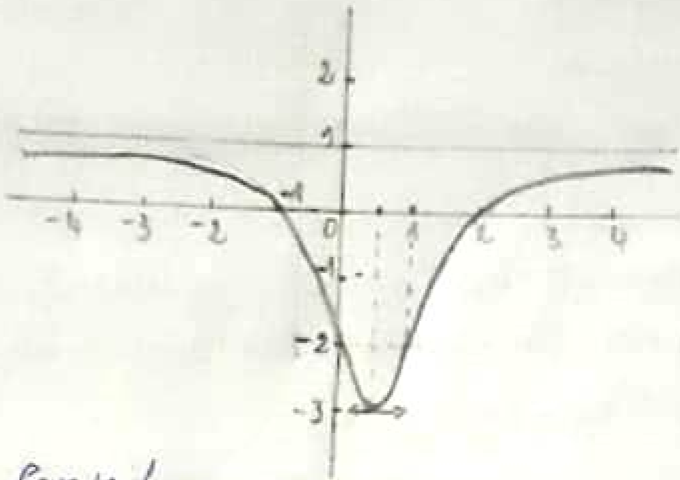
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0$$

C'est un système homogène dont le déterminant est non nul ; donc il admet une seule solution qui est $(0;0)$ → Donc $H = \{(0;0)\} = \{0_E\}$.
b). Base de H
Nous savons que le sous espace vectoriel réduit au vecteur nul n'a pas de base ; donc H n'a pas de base.

Exercice 2
1.a) - Mq F est un s.e.v réel de E.
* Montrons que : $- F \neq \emptyset$
$- \forall (x;y;z) ; (x';y';z') \in F$,
$(x;y;z) + (x';y';z') \in F$

Exercice 11

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. f est une fonction rationnelle dont la courbe (C) est donnée ci-dessous :



1) Faire des conjectures sur :

a) l'ensemble de définition et les limites aux bornes de cet ensemble.

b) les asymptotes à (C).

2) Dresser le tableau de variations de f

3) Quelles sont les solutions dans $\mathbb{R}$:

a) des équations ; $f(x) = 0$; $f(x) = 1$ et $f(x) = -2$?

b) des inéquations ; $f(x) \geq 0$; $f(x) < -2$?

4) La fonction f est définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$

Déterminer les réels $a ; b ; c$ et d.

II - Espaces vectoriels réels

Exercice 1

E est un espace vectoriel réel de dimension 2 défini par $E = \mathbb{R}^2$. F est un ensemble défini par : $F = \{(x;y) \mid x + 2y = 0\}$

1-a) Montrer que F est un ~~ensemble~~ sous-espace-vectoriel réel de E.

1.b) Déterminer une base de F et en déduire sa dimension.

Exercice 2

f est la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = -2x^2 + x + 1$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$:

1- a) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations

1- b) Construire avec soin la courbe (C_f).

2/ g est la fonction définie par : $g(x) = -f(x)$. Déduire de la courbe (C_f) la courbe (C_g)

3/ Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 3

Soit la fonction f définie par $f(x) = |x^2 - 4|$

Sachant que : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[\\ -x^2 + 4 & \text{si } x \in [-2; 2] \end{cases}$

1/ Étudier les variations de f après avoir étudier la dérivabilité de f en -2 et en 2. Interpréter géométriquement le résultat.

2/ Étudier la position de la courbe de f par rapport à ses demi-tangentes en $B(2; 0)$

3/ Construire la courbe (C_f) et les demi-tangentes aux points anguleux.

4/ En déduire de la courbe (C_f) la construction de la courbe (Γ) représentative de la fonction g définie par :

$$g(x) = |f(x)|.$$

Il est question de déterminer l'intersection de 2 ~~droit~~ plans vectoriels

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}z = y \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z = y \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \; ; \; D = \frac{1}{2}.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} y & -\frac{1}{3} \\ y & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{y}{2} + \frac{y}{3} = \frac{5}{6}y \; ; \; x = \frac{5/6\, y}{1/2} = \frac{5}{3}y$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2/3 & y \\ 1/2 & y \end{vmatrix} = \frac{2}{3}y - \frac{1}{2}y = \frac{1}{6}y \; ; \; z = \frac{1/6\, y}{1/2} = \frac{1}{3}y$$

Le triplet (x, y, z) devient : $x = \frac{5}{3}y$ et $z = \frac{1}{3}y$.

$(x; y; z) = \left(\frac{5}{3}y; y; \frac{1}{3}y\right) = \frac{1}{3}y(5; 3; 1)$

On pose $\vec{e} = (5; 3; 1)$. Toute base de H est constituée d'un vecteur non nul ; donc H est une droite vectorielle. Dimension de H : $\dim H = 1$

4). Base et dimension de K.

a)- Nous savons que : $K = \{(x; y; z) / x - y = 0 \text{ et } y - z = 0\}$

$\forall$ triplet $(x; y; z) \in K$ nous avons :

$x - y = 0 \Rightarrow x = y$ et $y - z = 0 \Rightarrow y = z$. le triplet devient : $(x; y; z) = (y; y; y) = y(1; 1; 1)$

On pose $\vec{e}' = (1; 1; 1)$.

$\vec{e}'$ est un vecteur non nul de K, donc c'est une base de K.

Ainsi $\dim K = 1$

Nous savons qu'un s.e.v est non vide, stable pour l'addition et pour la multiplication externe. De plus $H_3 = F \cup G = \{\forall x / x \in F \text{ ou } x \in G\}$.
Prenons un élément a de F et un élément b de G, puis faisons la somme a+b.
$a(1;0;2)$; $b(2;1;0)$ on a :
$a+b = (1;0;2)+(2;1;0) = (3;1;2)$.
$(3;1;2)$ n'est ni un élément de F ni un élément de G donc n'appartient pas à $H_3 = F \cup G$. Donc H_3 n'est pas un s.e.v car il n'est pas stable pour l'addition.

$4/0$

b)- Déterminons H_1 et H_2 / $H_1 = F \cap K$ et $H_2 = G \cap K$

→ Le problème ici est de déterminer l'intersection d'un plan vectoriel (F) ou (G) et d'une droite vectorielle (K)

* Pour H_1 : Nous pouvons résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 & (1) \\ x - y = 0 & (2) \\ y - z = 0 & (3) \end{cases}$$

→ les équation (2) et (3) nous donne $x = y$ et $z = y$.

→ dans (1) on a : $2y - 3y - y = 0 \Rightarrow -2y = 0 \Rightarrow \underline{y = 0}$

Ainsi on a dans (2) et (3) : $x = 0$ et $z = 0$, donc $H_1 = \{0_E\}$

* pour H_2 : Nous pouvons résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 & (1) \\ x - y = 0 & (2) \\ y - z = 0 & (3) \end{cases}$$

→ les équation (2) et (3) nous donne $x = y$ et $z = y$.

→ dans (1) on a : $y - 2y + y = 0$, l'équation (1) est vérifiée (car on a $0 = 0$) pour tout triplet (x, y, z)

Cela signifie que le système se réduit à 2 équations

on a : $\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ → Nous pouvons dire que $H_2 = G$

N.B : l'intersection d'une droite et d'un plan vectoriel est cette droite si celle-ci est incluse dans le plan.

→ Une base de H_2 est donc une base de G car ces 2 s.e.v sont égaux.

5)- Soit $H_3 = F \cup G$

H_3 est-il un s.e.v de E ?

d'où : $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1}$

II - Correction sur l'espace vectoriels réel

Exercice 1

1-a) - Montrons que F est un sous-espaces vectoriel réel de E.

→ Pour répondre à cette question, nous allons montrer que :

- $F \neq \emptyset$
- $\forall (x;y);(x';y') \in F$; $(x;y)+(x';y') \in F$
- $\forall (x;y) \in F$; $\forall \alpha \in \mathbb{R}$; Mq $\alpha(x;y) \in F$

* Pour mq F est non vide, il suffit de mq F contient le vecteur nul de E qui est $(0;0)$.
Nous avons : $1.(0) + 2.(0) = 0$; $(0;0)$ vérifie l'équation de F, donc il appartient à F. F est donc non vide.

* Soit $(x;y);(x';y') \in F$ Mq $(x;y)+(x';y') \in F$.
Nous savons que dans $\mathbb{R}^2$;
$(x;y) + (x';y') = (x+x'; y+y') \Rightarrow$ Montrons que $(x+x'; y+y')$ vérifie l'équation de F.
$(x+x') + 2(y+y') = (x+2y) + (x'+2y')$
Nous savons que $(x;y) \in F$, d'où $x+2y = 0$
de même, $(x';y') \in F$ d'où $x'+2y' = 0$.
Ceci nous permet de dire que :
$(x+x') + 2(y+y') = \underbrace{(x+2y)}_{0} + \underbrace{(x'+2y')}_{0} = 0$.

b). • $f(x) \geq 0$, Nous regardons les parties de la courbe (C) qui sont au-dessus de l'axe des abscisses, et nous lisons les intervalles correspondants.

$f(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \in]-\infty ; -1] \cup [2 ; +\infty[$

• $f(x) < -2$;

Nous construisons la droite d'équation $y = -2$ et nous regardons la partie de la courbe (C) qui se trouve en dessous de cette droite ($y = -2$) nous lisons les intervalles correspondants.

$f(x) < -2 \Longleftrightarrow x \in]0 ; 1[$

4). Déterminons les réels a; b; c et d

$f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$; Nous avons :

$f(0) = -2 \Longleftrightarrow \dfrac{b}{d} = -2 \Longleftrightarrow b = -2d$ (1)

$f(2) = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{4 + 2a + b}{4 + 2c + d} = 0 \Longleftrightarrow 2a + b = -4$ (2)

$f(-1) = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{1 - a + b}{1 - c + d} = 0 \Longleftrightarrow -a + b = -1$ (3)

$f(1) = -2 \Longleftrightarrow \dfrac{1 + a + b}{1 + c + d} = -2 \Longleftrightarrow a + b = -3 - 2c - 2d$ (4)

La résolution du système :

$$\begin{cases} b = -2d & (1) \\ 2a + b = -4 & (2) \\ -a + b = -1 & (3) \\ a + b = -3 - 2c - 2d & (4) \end{cases} \xLongleftrightarrow{\text{tcf}} \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -1 \\ d = 1 \end{cases}$$

→ Oui le plan (P') est orthogonal à (BC), car (BC) est orthogonale à (CH) et (CG) avec $\left\{\begin{array}{l}(CH) = (P) \cap (P') \\ (CG) = (BCG) \cap (P')\end{array}\right.$

- Justifier que chacun des plans (P) et (BCG) contient une droite orthogonale (P').

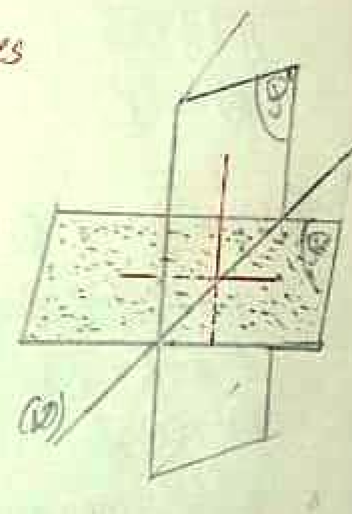
→ Nous savons que $(P) \cap (BCG) = (BC)$ donc on a :

$$\left.\begin{array}{l}(P') \perp (P) \\ (P') \perp (BCG)\end{array}\right\} \Rightarrow (BC) \perp (P')$$

Propriétés :

1) - On dit que deux plans sont perpendiculaires si l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre.

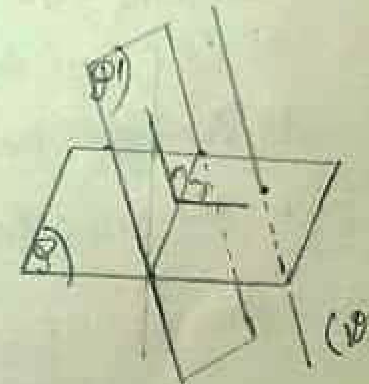
Deux plans perpendiculaires (P) et (P') sont sécants. On note $(P) \perp (P')$ et on a $(P) \cap (P') = (D)$.



2) - Conséquences

- Si une droite (D) est orthogonale à un plan (P) alors tout plan parallèle à (D) est orthogonal à (P).

$$\left.\begin{array}{l}(D) \perp (P) \\ (D) \parallel (P')\end{array}\right\} \Rightarrow (P) \perp (P')$$



- Si 2 plans sont perpendiculaires alors toute droite orthogonale à l'un est parallèle à l'autre :

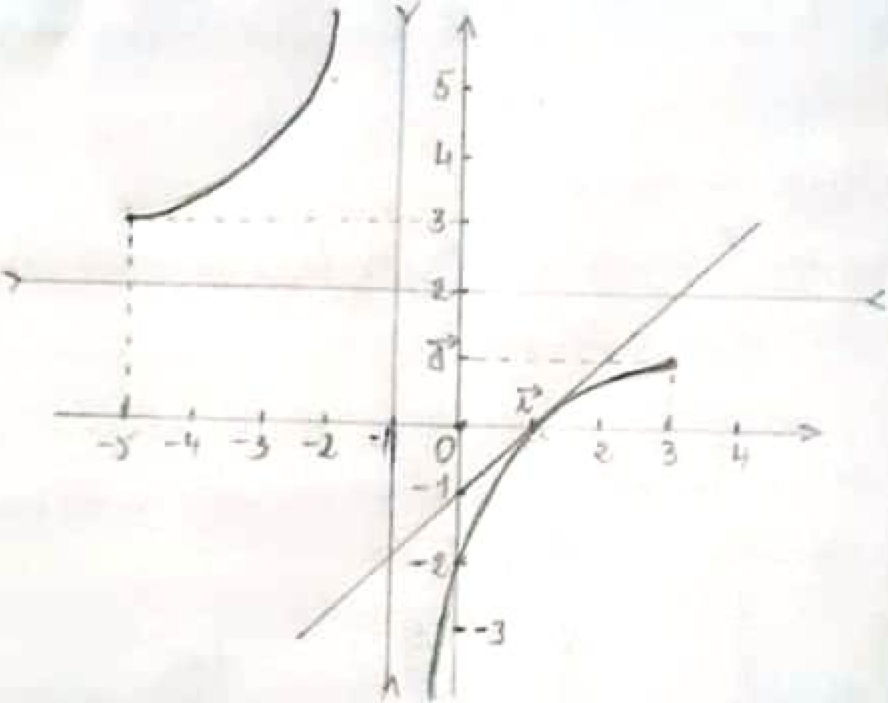
$$\left.\begin{array}{l}(P) \perp (P') \\ (D) \perp (P)\end{array}\right\} \Rightarrow (D) \parallel (P')$$

3) Déterminer les points d'intersections de (C_f) avec les axes de coordonnées.

4) Représenter avec soin la courbe (C_f). Montrer que le point de concours des asymptotes est le centre de symétrie de (C_f).

Exercice 10

La courbe représentative (C_f) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction numérique f définie sur un ensemble $D = [-5 ; 1[\cup]-1 ; 3]$.



1) Dresser le tableau de variations de f

2) Écrire une équation de la tangente (T) à (C_f) au point $x_0 = 1$

3) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout x élément de D_f,
$$f(x) = \frac{ax + b}{x+1}$$

4) Déterminer la fonction dérivée f' de f.

5) Déduire la courbe (H) représentative de la fonction h définie par $h(x) = |f(x)|$ de la courbe (C_f).

fonction g dans un autre repère.

Exercice 6

f est la fonction numérique d'une variable réelle définie par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$

1) Etudier les variations de f et donner son tableau de variations
2) Construire la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormé.
3) (D) est la droite d'équation $x - y - 2 = 0$
   Ecrire des équations des tangentes à la courbe (C) parallèles à la droite (D)
4) Déduire dans un autre repère la courbe (Γ) représentative de la fonction g définie par $g(x) = f(|x|)$.

Exercice 7

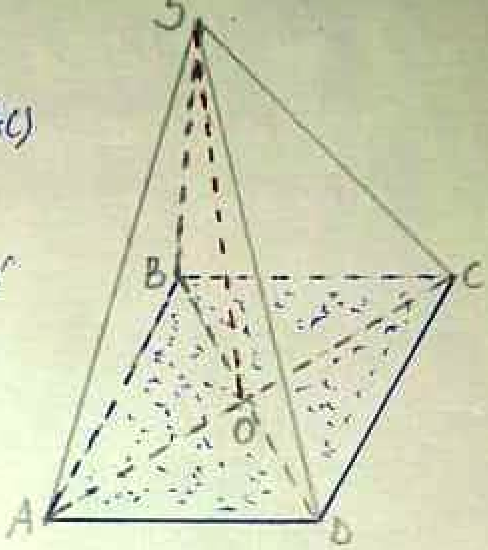
f est la fonction numérique d'une variable réelle définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de cet ensemble.
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 1$.
   Ecrire éventuellement les équations des demi-tangentes à la courbe C_f au point d'abscisse $x_0 = 1$.
3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
4) Construire la courbe (C_f) dans un repère orthonormé
5) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = m$, où m est un paramètre réel.

Le plan (IJK) est orthogonal à la droite d'intersection des plans sécants (SAC) et (SBD); donc (IJK) est perpendiculaire à chacun de ses 2 plans.

1)- Démontrons que les plans (ABC) et (SAC) sont perpendiculaires.

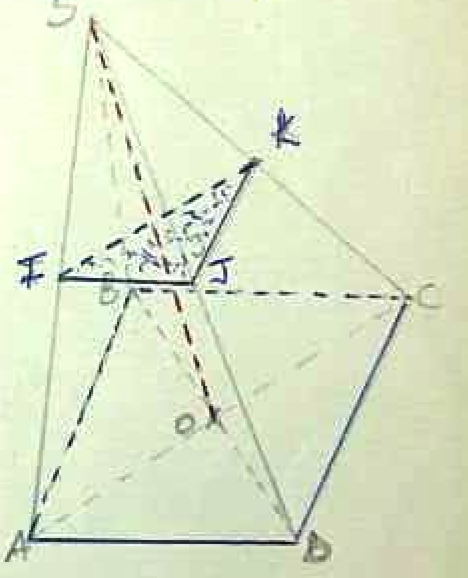


→ Considérons le point O centre de carré ABCD.

Le triangle SAC est isocèle en S; donc $(SO) \perp (AC)$ le même raisonnement sur le triangle SBD permet de montrer que $(SO) \perp (BD)$.

Ainsi (SO) est perpendiculaire à 2 droites sécantes du plan (ABC); donc $(SO) \perp (ABC)$; $\left.\begin{array}{l}(SO) \perp (ABC) \\ (SO) \subset (SAC)\end{array}\right\} \Rightarrow (ABC) \perp (SAC)$

2) Soient I; J et K les milieux respectifs des segments [SA]; [SD] et [SC]



a) Montrons que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

→ (IJ) est une droite de des milieux dans ~~respe~~ le triangle (SAD)

$\left.\begin{array}{l}(IJ) \parallel (AD) \\ (AD) \subset (ABC\end{array}\right\} \Rightarrow (IJ) \parallel (ABC)$ de même $(JK) \parallel (ABC$

Le plan (IJK) contient 2 droites sécantes et parallèles au plan (ABC); donc. $(IJK) \parallel (ABC)$.

b) Déduisons-en que le plan (IJK) est perpendiculaire aux plans (SAC) et (SBD) $\left.\begin{array}{l}(IJK) \parallel (ABC) \\ (SO) \perp (ADC)\end{array}\right\} \Rightarrow (SO) \perp (IJK)$

Exercice 8

f est la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$

1) Mettre $f(x)$ sous forme canonique.

2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

3) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 3$ est asymptote oblique à la courbe (C_f) et étudier la position de (C_f) par rapport à (D).

4) Construire la courbe (C_f)

5) Déduire de la courbe (C_f) la courbe (C_g) de la fonction g définie par $g(x) = f(-x)$.

Exercice 9

f est la fonction numérique d'une variable réelle dont son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1 | 1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

1) Préciser l'ensemble de définition de f ainsi que les limites aux bornes de cet ensemble

2) f est une fonction de la forme : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 1}$

a- Déterminer les réels a ; b et c

b- Montrer que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique dont on donnera une équation.

D'où $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

- Sa 2ème ligne, nous donne le signe de la dérivée et les valeurs qui l'annulent.
- Sa 3ème ligne, nous donne les valeurs $f(x)$ de la fonction f.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ (D) : $x = 1$ est Asymptote Verticale

2-a) - Déterminons les réels a, b et c. En lisant le tableau de variations, nous avons :

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$; $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; $f\left(\frac{3}{2}\right) = 5$; $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

Déterminer les réels a, b et c revient à résoudre un système de 3 équations à 3 inconnues. Nous choisissons trois équations parmi les 4 ci-dessus et nous avons :

$\forall x \in D_f$, on a : $f'(x) = \left(ax + b + \frac{c}{x-1}\right)' = a - \frac{c}{(x-1)^2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \Leftrightarrow a\left(\frac{1}{2}\right) + b + \frac{c}{\left(\frac{1}{2}\right) - 1} = a + 2b - 4c = 6$ (1)

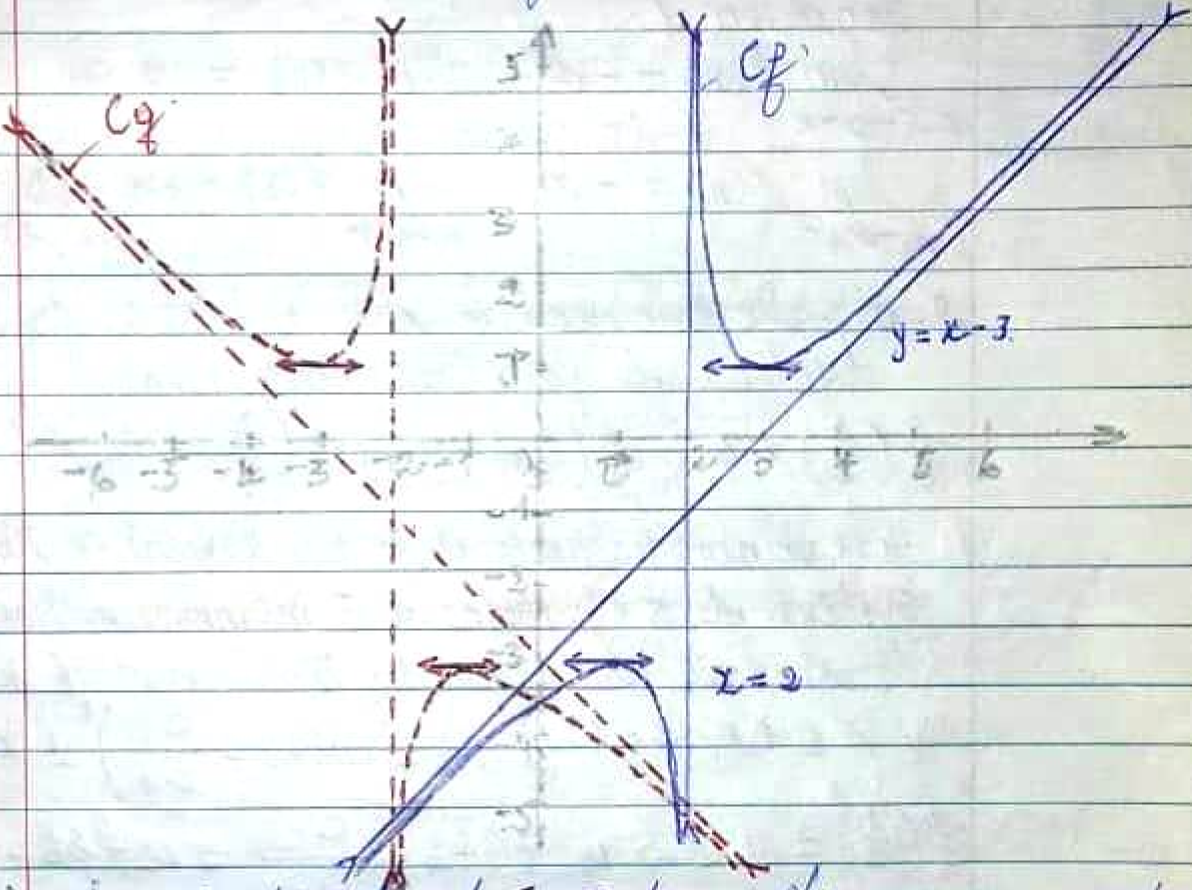
$f\left(\frac{3}{2}\right) = 5 \Leftrightarrow a\left(\frac{3}{2}\right) + b + \frac{c}{\left(\frac{3}{2}\right) - 1} = 5 \Leftrightarrow 3a + 2b + 4c = 10$ (2)

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow a - \frac{c}{\left[\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right]^2} = 0 \Leftrightarrow a - 4c = 0$ (3)

Nous avons le système suivant :

$$\begin{cases} a + 2b - 4c = 6 & (L_1) \\ 3a + 2b + 4c = 10 & (L_2) \\ a - 4c = 0 & (L_3) \end{cases}$$ (Pivot de GAUSS)

- axe des abscisses : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 7 = 0$
$\Delta = -3 \Rightarrow S = \emptyset$ pas de points d'intersection avec l'axe des abscisse.
- axe des ordonnées : $f(0) = -\frac{7}{2} \Rightarrow B(0; -7/2)$



5) - Les courbes C_f et C_g sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice 9

1) - Ensemble de définition de f sur un tableau de variations. → L'ens de déf de la fonction f se lit facilement sur la 1ère ligne. Nous avons les valeurs de x.
En dessous du réel 1 il y a une double barre ; cela signifie que f n'est pas définie en $x_0 = 1$

f est dérivable sur D_f comme somme et rapport de fonctions dérivables.

$\forall x \in D_f$, $f'(x) = \left(x-3+\frac{1}{x-2}\right)' = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$

$f'(x) = 0 \iff \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2} = 0 \iff (x-3)(x-1) = 0$

$x-3 = 0$ ou $x-1 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = 1$.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$ $-\infty$	|| $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3) - Montrons que la droite (D): $y = x-3$ est A.O

Il suffit de montrer que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - (x-3)] = 0$

on a: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x-3+\frac{1}{x-2} - (x-3)\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x-2} = 0$

Donc la droite (D): $y = x-3$ est Asymptote oblique à la courbe (C_f).

- Etudions les position de (C_f) par rapport à (D).

Nous avons: Il suffit d'étudier le signe $f(x) - (x-3)$

on a: $f(x) - (x-3) = \frac{1}{x-2}$. $1>0$; pour $x-2$;

$\forall x < 2$, $\frac{1}{x-2} < 0$, la courbe (C_f) est en dessous de (D)

$\forall x > 2$ $\frac{1}{x-2} > 0$, la courbe (C_f) est au-dessus de (D)

4) Représentation graphique.

Points particuliers

5) Résolution graphique de l'équation $f(x) = m$.

$$f(x) = m \Longleftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = m. \end{cases}$$

$m \in]-\infty; -1[$ il n'y a pas de solution.

$m = -1$ on une racine double

$m \in]-1; 1[$ on a 2 racines distinctes

$m \in]1, +\infty[$ on a une seule solution.

<u>Exercice 8</u>

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}.$$

1) Forme canonique : (Division euclidienne)

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 5x + 7 & x - 2 \\ \cline{2-2} -x^2 + 2x & x - 3 \\ \cline{1-1} -3x + 7 & \\ 3x - 6 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array} \Longrightarrow f(x) = x - 3 + \frac{1}{x-2}.$$

2) Etude des variations de f

$\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x)$ $\exists !$ $x - 2 \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

- f est continue sur D_f comme rapport de 2 fonctions continues.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} (x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 5x + 7}{0^-} = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x - 3 + \frac{1}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

$\rightarrow$ (D) : $x = 2$, est asymptote verticale à

. $\forall x \in]-\infty; 1[$; $f'(x) = 2x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; 1[$; $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow]-\infty; 0]$

. $\forall x \in [1; +\infty[$; $f'(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)' = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0$

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$ 2 ‖ 1/2 $+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-1 ↗	0 ↗	1

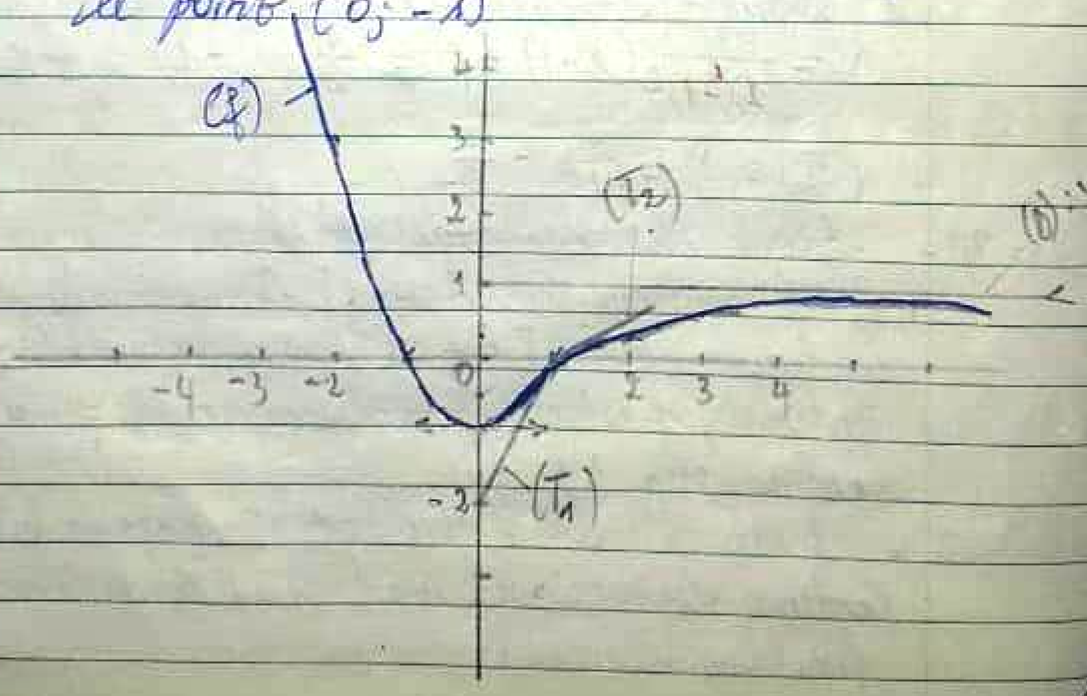
2) Représentation graphique de la courbe :

* Points particuliers

- axe des abscisses : $\forall x]-\infty; 1[$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$
  $\Rightarrow x = -1$. on a le point $(-1; 0)$

. $\forall x \in [1; +\infty[$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$
  $\Rightarrow x = 1$ on a le point $(1; 0)$

- axes des ordonnées : calculons $f(0)$.
  or $0 \in]-\infty; 1[$; $f(0) = 0^2 - 1 = -1$, on a le point $(0; -1)$



• Étudions la dérivabilité de f en $x_0 = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$$

$= \lim_{x\to 1^-}(x+1) = 2$. f est dérivable à gauche en $x_0 = 1$ et $f'_g(1) = 2$.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{x-1}{x+1}-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$. f est dérivable à droite en $x_0 = 1$ et $f'_d(1) = \frac{1}{2}$.

Nous constatons que: $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0 = 1$. On dit de ce point qu'il est un point anguleux.

– Équations des demi-tangentes.

* Demi-tangente à gauche : $y = f'_g(1)(x-1) + f(1)$

$y = 2(1)(x-1) + (1)^2 - 1 = 2(x-1) = 2x - 2$

(T_1) : $y = 2x - 2$.

* Demi-tangente à droite : $y = f'_d(1)(x-1) + f(1)$

$y = \frac{2}{((1)+1)^2}(x-1) + 0 = \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

(T_2) : $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

3)- Étude des variations de f.

• f est continue sur $]-\infty; 1[$ comme somme de fonction continues et sur $[1; +\infty[$ comme rapport de fonctions continues, f est ensuite continues en $x_0 = 1$ d'où f est continue sur D_f

• f est dérivable sur $]-\infty; 1[$ car somme de fonctions ~~continue~~ dérivables et sur $[1; +\infty[$ comme rapport de fonctions dérivables

4) Déduction de la Courbe (Γ)

$|x| = x$ si $x \geq 0$; $|x| = -x$ si $x \leq 0$.

$\Rightarrow$ si $x \geq 0$ alors $g(x) = f(x)$ de plus.

$g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$

$\rightarrow$ Donc g est une fonction paire. Nous allons donc trouver le symétrique de la partie de x positifs par rapport à l'axe des ordonnées et la Courbe (Γ) sera constituée de ces 2 parties.

Exercice 7

1)- Ens de définition et calcul des limites

f est une fonction définie par intervalle et l'ens de définition de f est la réunion des différents intervalles sur lesquels f est définie.

$$D_f =]-\infty ; 1[\cup [1 ; +\infty[$$

- Calcul des limites

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1.$$

$\rightarrow$ En $+\infty$ la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale.

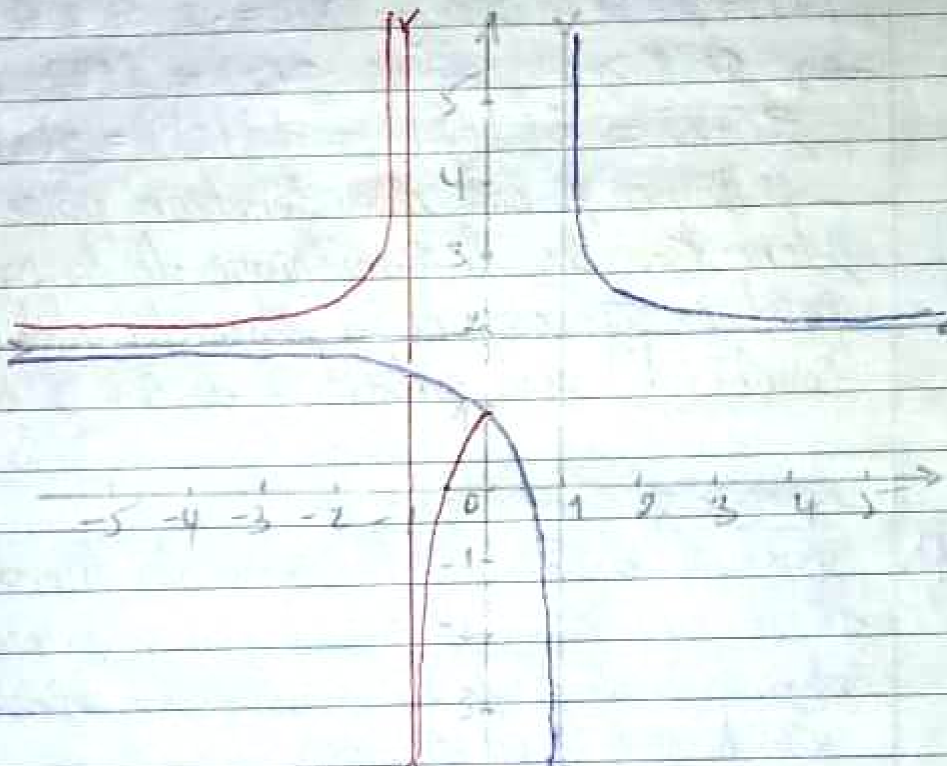
2)- Étude de la continuité en $x_0 = 1$.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x+1} = 0$$. Nous constatons que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 0$$ Nous ~~constatons~~ concluons que f est continue en $x_0 = 1$

- Axe des ordonnées : $f(0) = \frac{2(0)-1}{0-1} = 1$, $B(0;1)$



3) (Δ) est la droite d'équation $x+y-2=0$.
L'équation réduite de la droite (Δ) est : $y=-x+2$.

- Une droite est parallèle à (Δ) si elle a la même pente que (Δ) qui est (-1) et qui n'est rien d'autre que le nombre dérivé. Nous avons donc :

$$f'(x_0) = -\frac{1}{(x_0-1)^2} = -1 \Rightarrow (x_0-1)^2 = 1$$

$x_0 - 1 = 1$ ou $x_0 - 1 = -1 \Rightarrow x_0 = 0$ ou $x_0 = 2$

~~Pour~~ l'équation de la tangente a pour expression
(T) : $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

Pour $x_0 = 2$, $f(x_0) = 3$, $y = -(x-2)+3 = -x+5$
(T_1) : $y = -x+5$

Pour $x_0 = 0$; $f(0) = 1$; $y = -x+1$; (T_2) : $y = -x+1$

Les tangente à (C) parallèle à la droite (Δ) sont les droites T_1 et T_2 d'équations respectives
$y = -x+5$ et $y = -x+1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{2x-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{2x-1}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2x-1}{0^+} = +\infty$.

→ La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale (parallèle à l'axe des ordonnées)

- f est dérivable sur D_f comme rapport de fonction dérivables.

$\forall x \in D_f;\ f'(x) = \left(\frac{2x-1}{x-1}\right)' = \frac{(2x-1)'(x-1) - (2x-1)(x-1)'}{(x-1)^2}$

$= \frac{2(x-1) - 2x + 1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0.$

$\forall x \in D_f;\ f'(x) < 0$

- Tableau de signe $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)(x-1)}$

x	$-\infty$ 1	$+\infty$
-1	$-$	$-$
$(x-1)$	$-$	$+$
$x-1$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$

Tableau de variations de f.

x	$-\infty$ 1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 2$

2)- Construire la courbe (C)

- axe des abscisses : → $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-1} = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$; $A(1/2; 0)$

$= \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - (x^2 + 2x + 1) - 3x - 3$

$= \frac{1}{3}x^3 - 4x - \frac{11}{3}$

$Y - \frac{11}{3} = \frac{1}{3}X^3 - 4X - \frac{11}{3} \Rightarrow Y = \frac{1}{3}X^3 - 4X$

Nous avons $f(X) = \frac{1}{3}X^3 - 4X$.

$f(-X) = \frac{1}{3}(-X)^3 - 4(-X) = -\frac{1}{3}X^3 + 4X$.

$f(-X) = -\frac{1}{3}X^3 + 4X = -\underbrace{\left(\frac{1}{3}X^3 - 4X\right)}_{f(X)} = -f(X)$

Donc f est impaire dans le nouveau repère $(I; \vec{i}, \vec{j})$ d'où I est le centre de symétrie de la courbe (C) représentative de f.

5) - g est la fonction définie par $g(x) = f(-x)$

Déduisons la courbe (C') de g de la courbe (C)

→ Les 2 courbes (C) et (C') sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice 6

1) - Étude des variations de f.

La fonction f est définie si : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 1$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

f est continue sur D_f comme rapport de fonctions continues.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x}{x} = 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$.

→ La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale (parallèle à l'axe des abscisse)