REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie

MINISTERE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

COMMISSION NATIONALE D'ORGANISATION DE L'EXAMEN NATIONAL DU DIPLOME SUPERIEUR D'ETUDES PROFESSIONNELLES (DSEP)

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace-Work-Fatherland

MINISTRY
OF HIGHER EDUCATION

NATIONAL COMMISSION FOR THE ORGANIZATION OF DSEP EXAM

Examen National du Diplôme Supérieur d'Etudes Professionnelles juillet 2009

Filière/Spécialité/Option : TR – II

Epreuve : Mathématiques

Durée : 3 heures

Exercice 1 : (6pts)

1- Soit g la fonction numérique définie sur $[0 ; \pi]$ par :

$$g(t) = (1+\cos^2 t)\sin^2 t$$

i) Montrer que g est dérivable et que pour tout $t \in [0 ; \pi]$, $g'(t) = 4\sin t \cos^3 t$ (0,5 pt)

ii) En déduire les variations de g sur $[0 ; \pi]$ (1pt)

2- Soit f la fonction paire, de période T =1 définie sur R par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \tau, si\ 0 \le t < \tau \\ -\tau, si\ \tau \le t \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

(où τ est un réel tel que $0 < \tau < \frac{1}{2}$)

On admet que f satisfait aux conditions de Dirichlet et soit F(f(t)) sa série de Fourier .

Montrer que $F(f(t)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n\pi\tau)}{n\pi} \cos(2n\pi t)$ (1,5pt)

3- On décide de ne conserver que les harmoniques de degré inferieur ou égal à 2.

Soit h la fonction numérique définie sur R par :

$$h(t) = \frac{1}{\pi}\sin(2\pi\tau)\cos(2\pi t) + \frac{1}{2\pi}\sin(4\pi\tau)\cos(4\pi\tau)$$

E_h désigne la valeur efficace de h sur une période.

(i) A l'aide de la formule de Parseval, déterminer E_h^2 (1pt)

(ii) Montrer que $E_h^2 = \frac{1}{2\pi^2} g(2\pi\tau)$ (1pt)

4- Déterminer la valeur de τ rendant E_h^2 maximal. (1pt)

Exercice 2 : (7pts)

Lors de l'étude des filtres, on note par

v_e le signal d'entrée défini par $v_e : t \mapsto v_e(t)$

v_s le signal de sortie défini par $v_s\ t \mapsto v_s(t)$

(v_e et v_s sont définies sur R_+)

U, V_e et V_s désignent respectivement la fonction échelon-unité, les transformées de Laplace de v_e et v_s.

L'étude physique conduit à définir la fonction de transfert du filtre par :

$$H(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{p}{2p^2+2p+1}$$

1- Montrer que pour tout $p \in R$, $H(p) = \frac{\frac{1}{2}p}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}$ (0,5pt)

2- (i) Déterminer la transformée de Laplace F(p) de la fonction f telle que

$f(t) = e^{-\alpha t}\sin(\alpha t)\,U(t)$, où $\alpha \in R_+^*$ (1pt)

(ii) On suppose que $v_e(t) = U(t)$ pour $t \geq 0$.

Calculer l'expression de $V_s(p)$, puis celle de $v_s(t)$

3- (i) On pose $G(p) = \frac{p}{(p^2+\frac{1}{4})(2p^2+2p+1)}$

Montrer que $G(p) = \frac{\frac{1}{5}p+\frac{1}{5}}{p^2+\frac{1}{4}} - \frac{\frac{1}{5}p-\frac{1}{5}}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}$ [illegible] (1pt)

(ii) On suppose que $v_e(t) = U(t)\sin\frac{t}{2}$, pour $t \geq 0$.

Calculer l'expression de $V_s(p)$, puis celle de $v_s(t)$ (1,5pt)

(iii) Montrer que $\lim_{t\to+\infty}\left[v_s(t) - \frac{1}{5}\left(\cos\frac{t}{2} + 2\sin\frac{t}{2}\right)U(t)\right] = 0$ (1,5pt)

Exercice 3 : (7pts)

Une usine fabrique les pièces dont 1,8% sont défectueuses. Le contrôle des points s'effectue selon les probabilités conditionnelles suivantes :

- sachant qu'une pièce est bonne, on l'accepte avec une probabilité de 0,97 ;
- sachant qu'une pièce est mauvaise, on la refuse avec une probabilité de 0, 99.

1- Quelle est la probabilité qu'une pièce soit défectueuse? (1pt)

2- (i) Montrer que la probabilité qu'une pièce soit défectueuse et acceptée est 0,00018. (1pt)

(ii) Trouver la probabilité qu'une pièce soit bonne et refusée. (1,5pt)

(iii) Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur dans le contrôle (1,5pt)

3- on contrôle cinq pièces de façon indépendante et on note X la variable aléatoire mesurant le nombre d'erreurs commises.

(i) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi. (1pt)

(ii) Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement deux erreurs de contrôle ? (1pt)