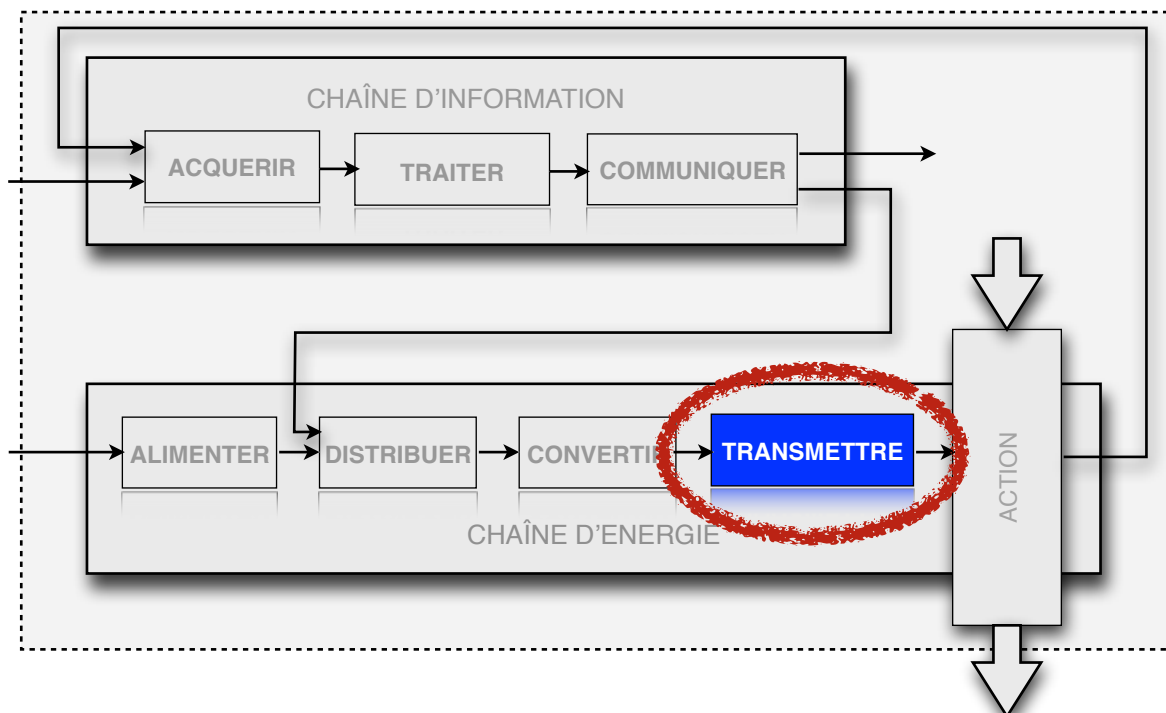
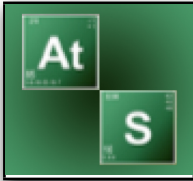


# LIAISONS MECANQUES





# PROBLEMATIQUE

« La réalisation des actions est obtenue par les mouvements des constituants de la chaîne de transmission de puissance. La description de ces mouvements nécessite de modéliser les liaisons entre les solides »

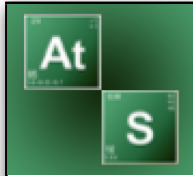
## B - MODELISER

B2 : Proposer un modèle de connaissance et de comportement

Proposer et justifier un modèle de liaison entre deux solides

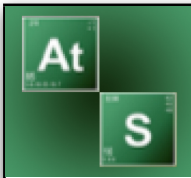
Déterminer la liaison cinématiquement équivalente à un ensemble de liaisons

Réaliser le graphe de structure des liaisons de tout ou partie d'un mécanisme



# Sommaire

<b>A.MODELISATION DES MECANISMES</b>	<b>4</b>
A.1.Finalités	4
A.2.Outils	4
<b>B.Classes d'équivalence</b>	<b>5</b>
B.1.Finalité	5
B.2.Principe et méthodologie	5
B.3.Graphe des liaisons	6
B.4.Chaîne de solides	6
<b>C.Liaisons mécaniques</b>	<b>7</b>
C.1.Géométrie du contact	7
C.2.Liaisons élémentaires	7
C.3.Liaisons composées	9
C.4.Degré de liberté d'une liaison	11
C.5.Torseur cinématique associé à une liaison	12
<b>D.Tableau normalisé des liaisons mécaniques</b>	<b>13</b>
<b>E.Modélisation des guidages en rotation</b>	<b>15</b>
E.1.Généralités	15
E.2.Guidage par paliers lisses	15
E.3.Guidage par roulements	16
<b>F.Liaisons équivalentes</b>	<b>18</b>
F.1.Généralités	18
F.2.Liaisons en parallèle	18
F.3.Liaisons en série	20



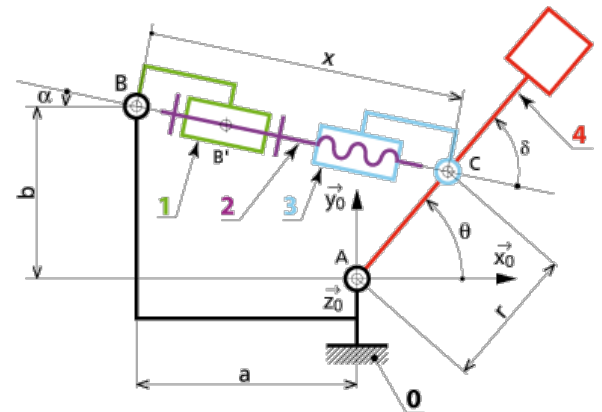
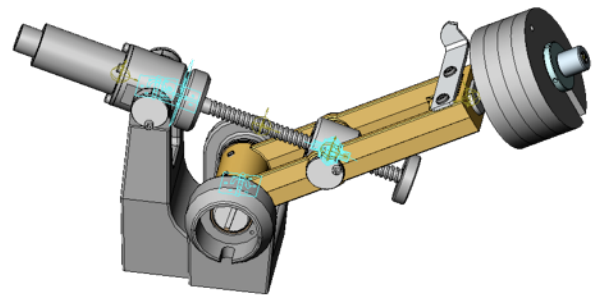
# A. MODELISATION DES MECANISMES

## A.1. Finalités

Les mécanismes de transmission de puissance ont pour but d'acheminer la puissance délivrée par le convertisseur vers les actionneurs qui réaliseront les actions nécessaires pour mener à bien les fonctions du système.

La compréhension et l'étude de ces mécanismes passe par leur modélisation, afin de pouvoir mener à bien les études :

- cinématique : loi entrée/sortie, mouvements
- statique : efforts en jeu dans le mécanisme
- dynamique : interactions entre les efforts en jeu et les mouvements



## A.2. Outils

La modélisation des mécanismes repose sur l'analyse des surfaces de contact entre deux pièces en mouvement relatif. La nature des surfaces de contact, qui peut être ponctuelle, linéique ou surfacique, conditionne les mouvements relatifs possibles.

Les mobilités entre les différents composants seront modélisés graphiquement, de façon à construire un **schéma cinématique** qui a pour ambition de décrire l'ensemble des mouvements relatifs entre plusieurs groupes de pièces.

Nous serons amenés à formuler quelques hypothèses :

- les solides seront supposés indéformables
- la géométrie des contacts sera supposée parfaite

Notes

	<b>CI4 : PERFORMANCES DES CHAINES DE TRANSMISSION</b>	
	<b>LIAISONS MECANQUES</b>	<b>COURS</b>
	<i>Classes d'équivalence</i>	<b>Edition 3 - 02/11/2018</b>

## B. Classes d'équivalence

### B.1. Finalité

La modélisation d'un mécanisme débute par l'analyse de ce mécanisme, afin d'en simplifier sa représentation.

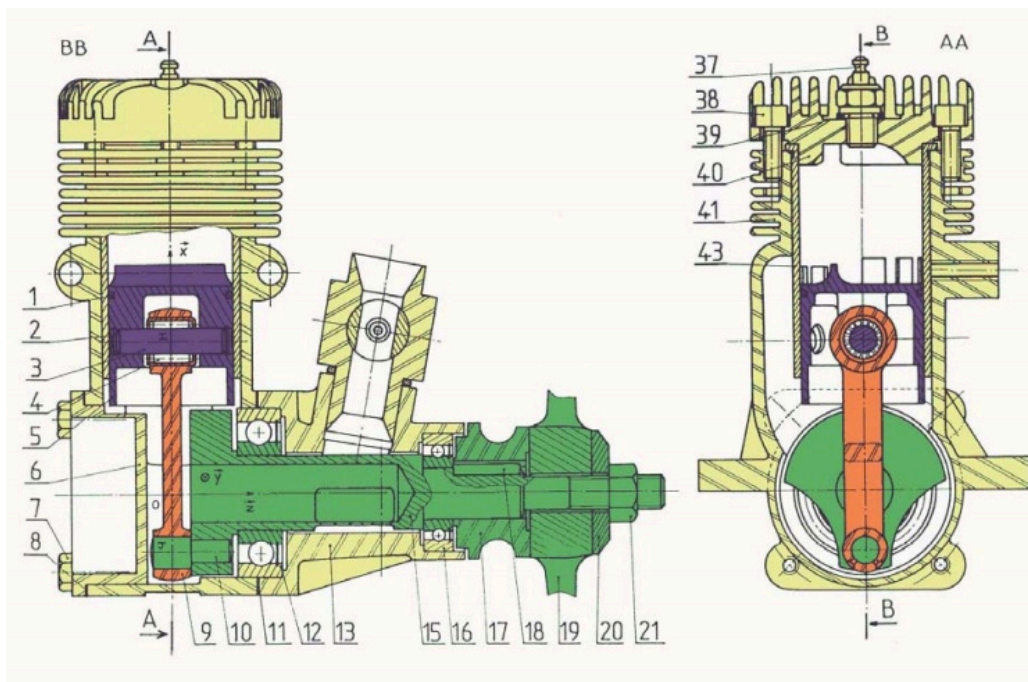
Cette analyse doit permettre de regrouper ensemble les pièces qui n'ont aucun mouvement relatif entre elles : on parlera d'équivalence cinématique.

### B.2. Principe et méthodologie

Les pièces qui sont en contact et qui n'ont aucun mouvement relatif possible seront regroupées dans un ensemble appelé «**classe d'équivalence**». Du point de vue cinématique, nous considérerons alors ces pièces comme étant un seul et même solide.

Dans un dessin d'ensemble, ces classes d'équivalence seront identifiées par des couleurs spécifiques

Prenons l'exemple d'un micro moteur de modélisme :

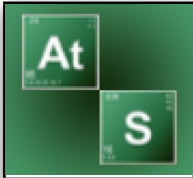


L'analyse du dessin permet de mettre en évidence 4 classes d'équivalence :

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad B = \{6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 16, 37, 38, 39, 40, 41, 43\}$$

$$C = \{9\} \quad D = \{10, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}$$

Notes



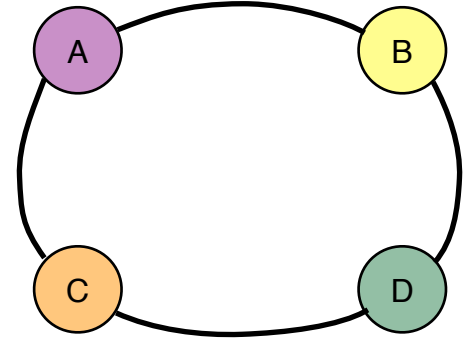
### B.3. Graphe des liaisons

Parmi les classes d'équivalence identifiées, certaines sont en contact entre-elles.

Il est alors possible de définir un «**graphe des liaisons**» qui permettra d'identifier les classes d'équivalence pour lesquelles une liaison mécanique existe.

Ce graphe relie entre-elles les classes d'équivalence en contact.

Par exemple, le graphe des liaisons du micro moteur est :



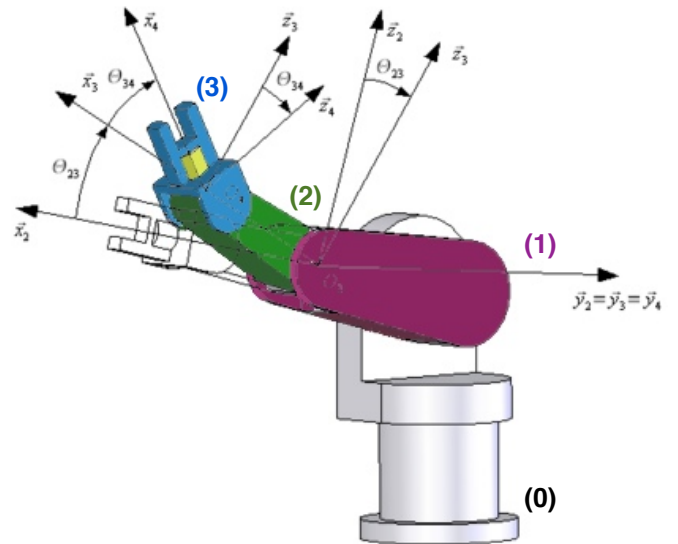
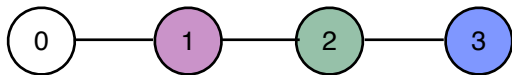
### B.4. Chaîne de solides

Le graphe des liaisons représente une «**chaîne de solides**», décrivant ainsi la propagation des mouvements au sein d'un mécanisme.

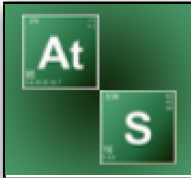
Une chaîne de solide peut être ouverte ou fermée.

Le graphe des liaisons du micro moteur précédent représente une chaîne de solides fermée.

En revanche, le graphe des liaisons du robot ci-contre représente une chaîne de solides ouverte :



Notes



# C. Liaisons mécaniques

## C.1. Géométrie du contact

Un contact entre deux classes d'équivalence est caractérisé par sa nature géométrique. Il pourra s'agir :

- d'un point de contact
- d'une ligne (rectiligne ou non) de contact
- d'une surface de contact (plane ou non)

La forme du contact conditionne directement les 6 mobilités relatives possibles : 3 rotation et 3 translations.

Les trois formes de base à partir desquelles l'ensemble des liaisons sera construit sont :

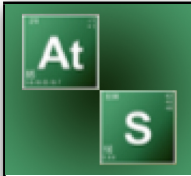
- le plan
- le cylindre
- la sphère

## C.2. Liaisons élémentaires

Il existe 6 liaisons simples, dites élémentaires, qui résultent de la combinaison de contacts possible entre les 3 formes de bases citées plus haut :

	Plan	cylindre	Sphère
Sphère			
Cylindre			
Plan			

Notes



**CI4 : PERFORMANCES DES CHAINES DE TRANSMISSION**

**LIAISONS MECANIQUES**

**COURS**

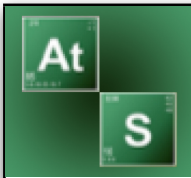
*Liaisons mécaniques*

**Edition 3 - 02/11/2018**

Formes en contact		Géométrie du contact	Nom de la liaison	Symbole
Sphère	Plan	Point	<b>Sphère-plan ou ponctuelle</b>	
	Cylindre	Ligne circulaire	<b>Linéaire annulaire</b>	
	Sphère	Sphère	<b>Rotule ou Sphérique</b>	
Cylindre	Plan	Ligne rectiligne	<b>Linéaire rectiligne</b>	
	Cylindre	Cylindre	<b>Pivot glissant</b>	
Plan	Plan	Plan	<b>Appui plan</b>	

Notes

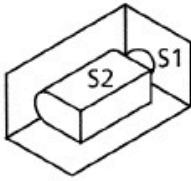
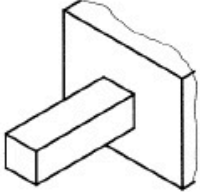
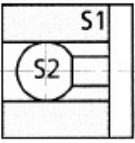
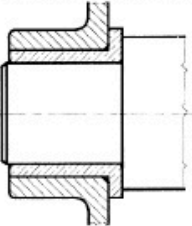
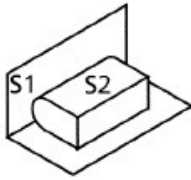
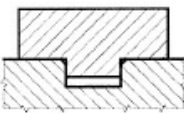
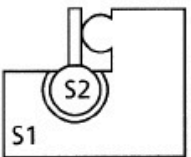
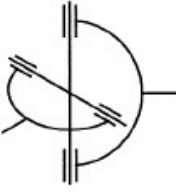




**C.3. Liaisons composées**

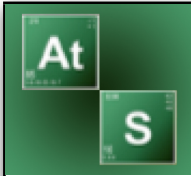
L'association de 2 liaisons élémentaires permet de construire d'autres liaisons, appelées liaisons composées. Elles seront définies par deux surfaces de contact, et donneront lieu à des libertés de mouvements spécifiques.

Exemple de liaisons composées :

Association de liaisons élémentaires	Exemple	Association de liaisons élémentaires	Exemple
 Appui plan + linéaire rectiligne + ponctuelle	 Poutre encastrée	 Linéaire annulaire + appui plan	 Guidage en rotation
 Appui plan + linéaire rectiligne	 Guidage en translation	 Rotule + ponctuelle	 Joint de cardan

Il existe souvent plusieurs combinaisons possibles pour une même liaison composée :

Notes



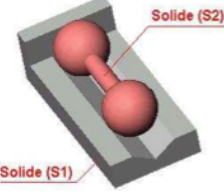
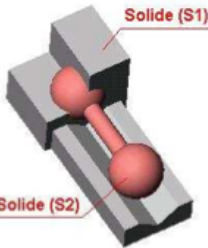
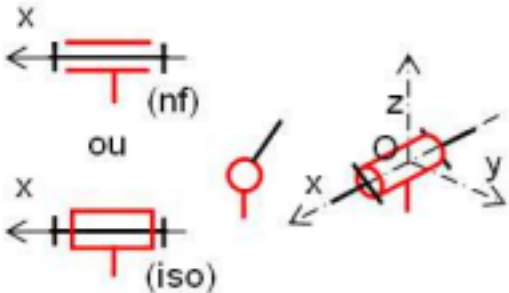
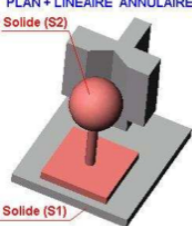
**CI4 : PERFORMANCES DES CHAINES DE TRANSMISSION**

**LIAISONS MECANQUES**

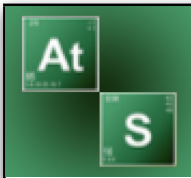
**COURS**

*Liaisons mécaniques*

**Edition 3 - 02/11/2018**

Combinaison de liaisons simples	Nom de la liaison	Symbole		
<p>PIVOT GLISSANT + PONCTUEL</p> 				
<p>ROTULE + L. ANNULAIRE</p> 	<p><b>Pivot</b></p>			
<p>PLAN + LINEAIRE ANNULAIRE</p> 				

Notes



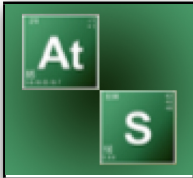
Combinaison de liaisons simples	Nom de la liaison	Symbole
<p>PIVOT GLISSANT + PONCTUEL (Vé+2spheres) + (Plan+sphere)</p> <p>Solide (S2) Solide (S1)</p>	Glissière	
<p>APPUI PLAN+Lineaire Rectiligne (plan+3points) + (plan+2points)</p> <p>Solide (S2) Solide (S1)</p>		
<p>PIVOT GLISSANT + PONCTUEL</p> <p>Solide (S2) Solide (S1)</p>	Glissière hélicoïdale	
<p>3 SPHERES - PLANS</p> <p>Solide (S1) Solide (S2)</p>		

### C.4. Degré de liberté d'une liaison

Un solide qui n'est contraint par aucun contact peut évoluer librement suivant les 3 directions, en translation comme en rotation :

- 3 translations possibles suivant x, y et z
- 3 rotations possibles autour des axes x, y et z

Notes



Il lui est possible d'effectuer de façon indépendante ces 6 mouvements, et on parlera d'un solide à 6 **degrés de liberté (ddl)**.

En revanche, la présence d'un point de contact avec un autre solide va supprimer au moins 1 degré de liberté.

Une liaison ponctuelle supprime ainsi 1 degré de liberté (la translation suivant la normale au contact), tandis qu'une liaison pivot glissant en supprimera 4, ne laissant subsister qu'une rotation et une translation.

**C.5. Torseur cinématique associé à une liaison**

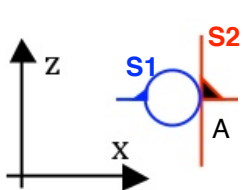
Le torseur cinématique du mouvement quelconque d'un solide S1 par rapport à un solide S2 non limité par un contact, est de la forme suivante au point de réduction A :

$$\{v_{1/2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega}_{1/2} = \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z} \\ \overrightarrow{V}_{A \in 1/2} = v_{A,x} \vec{x} + v_{A,y} \vec{y} + v_{A,z} \vec{z} \end{array} \right\}_A$$

Un contact entre ces deux solides va supprimer des degrés de libertés, et c'est donc des possibilités de mouvement qui seront interdits.

Un mouvement interdit par le contact se traduira au niveau du torseur cinématique par la nullité de la composante correspondant au mouvement interdit.

Prenons comme premier exemple la liaison ponctuelle :



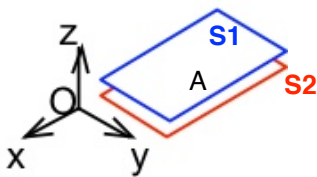
Cette liaison est caractérisée par son point de contact A et sa normale  $\vec{x}$

Elle supprime donc un degré de liberté : la translation suivant  $(A, \vec{x})$

Le torseur cinématique de la liaison entre S1 et S2 s'écrira donc :

$$\{v_{1/2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega}_{1/2} = \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z} \\ \overrightarrow{V}_{A \in 1/2} = v_{A,y} \vec{y} + v_{A,z} \vec{z} \end{array} \right\}_A \text{ puisque } v_{A,x} \vec{x} = \vec{0}$$

Considérons à présent la liaison appui plan suivante :



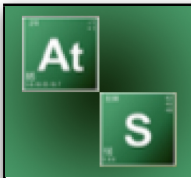
A est le centre de la face de contact, et la normale au contact est  $\vec{z}$ .

Cette liaison supprime 3 degrés de liberté : la translation suivant  $\vec{z}$  et les 2 rotations autour de  $(A, \vec{x})$  et  $(A, \vec{y})$

Le torseur cinématique de la liaison entre S1 et S2 s'écrira donc :

$$\{v_{1/2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega}_{1/2} = \omega_z \vec{z} \\ \overrightarrow{V}_{A \in 1/2} = v_{A,x} \vec{x} + v_{A,y} \vec{y} \end{array} \right\}_A \text{ puisque } \begin{cases} v_{A,z} \vec{z} = \vec{0} \\ \omega_x \vec{x} = \omega_y \vec{y} = \vec{0} \end{cases}$$

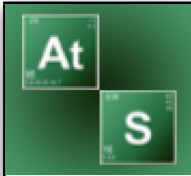
Notes



## D. Tableau normalisé des liaisons mécaniques

Nom de la liaison	Schéma plan	Perspective	Mobilités	Torseur cinématique $\{v_{1/2}\}$
Ponctuelle de normale $(O, \vec{x})$			5 ddl <input type="checkbox"/> Tx <input checked="" type="checkbox"/> Rx <input checked="" type="checkbox"/> Ty <input checked="" type="checkbox"/> Ry <input checked="" type="checkbox"/> Tz <input checked="" type="checkbox"/> Rz	$\left. \begin{aligned} \overline{\Omega}_{1/2} &= \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z} \\ \overline{V}_{O \in 1/2} &= v_{O,y} \vec{y} + v_{O,z} \vec{z} \end{aligned} \right\}_0$
Linéaire rectiligne d'axe $(O, \vec{x})$ et de normale $(O, \vec{z})$			4 ddl <input checked="" type="checkbox"/> Tx <input checked="" type="checkbox"/> Rx <input checked="" type="checkbox"/> Ty <input type="checkbox"/> Ry <input type="checkbox"/> Tz <input checked="" type="checkbox"/> Rz	$\left. \begin{aligned} \overline{\Omega}_{1/2} &= \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} \\ \overline{V}_{O \in 1/2} &= v_{O,x} \vec{x} + v_{O,z} \vec{z} \end{aligned} \right\}_0$
Linéaire annulaire d'axe $(O, \vec{x})$			4 ddl <input checked="" type="checkbox"/> Tx <input checked="" type="checkbox"/> Rx <input type="checkbox"/> Ty <input checked="" type="checkbox"/> Ry <input type="checkbox"/> Tz <input checked="" type="checkbox"/> Rz	$\left. \begin{aligned} \overline{\Omega}_{1/2} &= \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z} \\ \overline{V}_{O \in 1/2} &= v_{O,x} \vec{x} \end{aligned} \right\}_0$
Appui plan de normale $(O, \vec{z})$			3 ddl <input checked="" type="checkbox"/> Tx <input type="checkbox"/> Rx <input checked="" type="checkbox"/> Ty <input type="checkbox"/> Ry <input type="checkbox"/> Tz <input checked="" type="checkbox"/> Rz	$\left. \begin{aligned} \overline{\Omega}_{1/2} &= \omega_z \vec{z} \\ \overline{V}_{O \in 1/2} &= v_{O,x} \vec{x} + v_{O,y} \vec{y} \end{aligned} \right\}_0$
Rotule de centre O			3 ddl <input type="checkbox"/> Tx <input checked="" type="checkbox"/> Rx <input type="checkbox"/> Ty <input checked="" type="checkbox"/> Ry <input type="checkbox"/> Tz <input checked="" type="checkbox"/> Rz	$\left. \begin{aligned} \overline{\Omega}_{1/2} &= \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z} \\ \overline{V}_{O \in 1/2} &= \vec{0} \end{aligned} \right\}_0$

Notes



**CI4 : PERFORMANCES DES CHAINES DE TRANSMISSION**

**LIAISONS MECANIQUES**

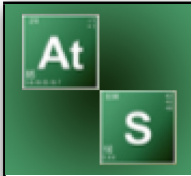
**COURS**

*Liaisons mécaniques*

**Edition 3 - 02/11/2018**

Nom de la liaison	Schéma plan	Perspective	Mobilités	Torseur cinématique $\{v_{1/2}\}$
Sphérique à doigt d'axe $(O, \vec{x})$			2 ddl <input type="checkbox"/> Tx <input checked="" type="checkbox"/> Rx <input type="checkbox"/> Ty <input checked="" type="checkbox"/> Ry <input type="checkbox"/> Tz <input type="checkbox"/> Rz	$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\Omega}_{1/2} = \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} \\ \overline{V}_{O \in 1/2} = \vec{0} \end{array} \right\}_0$
Pivot glissant d'axe $(A, \vec{x})$			2 ddl <input checked="" type="checkbox"/> Tx <input checked="" type="checkbox"/> Rx <input type="checkbox"/> Ty <input type="checkbox"/> Ry <input type="checkbox"/> Tz <input type="checkbox"/> Rz	$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\Omega}_{1/2} = \omega_x \vec{x} \\ \overline{V}_{O \in 1/2} = v_{O,x} \vec{x} \end{array} \right\}_0$
Pivot d'axe $(A, \vec{x})$			1 ddl <input type="checkbox"/> Tx <input checked="" type="checkbox"/> Rx <input type="checkbox"/> Ty <input type="checkbox"/> Ry <input type="checkbox"/> Tz <input type="checkbox"/> Rz	$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\Omega}_{1/2} = \omega_x \vec{x} \\ \overline{V}_{O \in 1/2} = \vec{0} \end{array} \right\}_0$
Glissière d'axe $(A, \vec{x})$			1 ddl <input checked="" type="checkbox"/> Tx <input type="checkbox"/> Rx <input type="checkbox"/> Ty <input type="checkbox"/> Ry <input type="checkbox"/> Tz <input type="checkbox"/> Rz	$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\Omega}_{1/2} = \vec{0} \\ \overline{V}_{O \in 1/2} = v_{O,x} \vec{x} \end{array} \right\}_0$
Glissière hélicoïdale d'axe $(A, \vec{x})$			1 ddl <input checked="" type="checkbox"/> Tx <input checked="" type="checkbox"/> Rx <input type="checkbox"/> Ty <input type="checkbox"/> Ry <input type="checkbox"/> Tz <input type="checkbox"/> Rz	$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\Omega}_{1/2} = \omega_x \vec{x} \\ \overline{V}_{O \in 1/2} = v_{O,x} \vec{x} \end{array} \right\}_0$ avec $v_{O,x} = \frac{p}{2\pi} \Omega_{1/2}$ (p pas de l'hélice)

Notes



# E. Modélisation des guidages en rotation

## E.1. Généralités

Les guidages en rotation sont les solutions constructives retenues pour réaliser les liaisons du type 'linéaire annulaire', «pivot glissant» et «pivot».

On distingue trois grandes catégories de guidage :

1. les guidages sans éléments interposés : le contact entre les solides se fait directement
2. les guidages avec paliers lisses interposés (coussinets)
3. les guidages avec éléments interposés (roulements à billes, à rouleaux, à aiguilles)

Le type de guidage, ainsi que ses caractéristiques, conditionnera la liaison retenue pour la modélisation

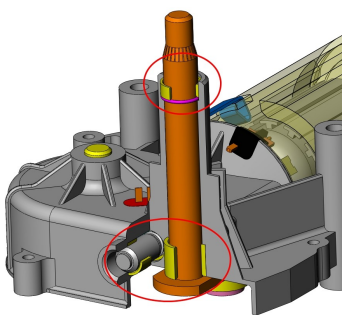
Un cours spécifique sur ces guidages sera dispensé, nous ne retiendrons ici que les conclusions à retenir en terme de modélisation.

## E.2. Guidage par paliers lisses

### E.2.1. Principe

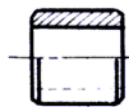
Le principe du contact direct est amélioré en interposant des bagues de frottement qui vont :

- Diminuer le coefficient de frottement ;
- Augmenter la durée de vie de l'arbre et du logement ;
- Diminuer le bruit ;
- Reporter l'usure sur les bagues.

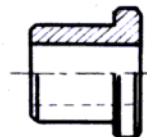


Les coussinets sont des bagues cylindriques en bronze ou en matière plastique, épaulée ou non.

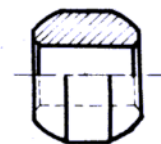
Coussinet cylindrique



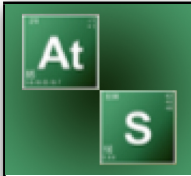
Coussinet à collette



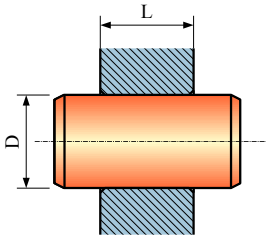
Coussinet sphérique



Notes



E.2.2. Modélisation



Lors de la modélisation d'un contact surfacique cylindrique, il est nécessaire de prendre en compte le rapport entre L (longueur du contact) et D (diamètre) pour déterminer la liaison correspondante

$(L/D) < 0,5$	$(L/D) > 1$
Liaison linéaire annulaire 	Liaison pivot glissant 
Liaison rotule (si translation impossible) 	Liaison pivot (si translation impossible) 

E.3. Guidage par roulements

E.3.1. Principe

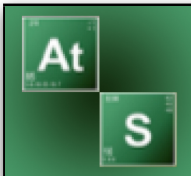
L'interposition d'éléments roulants entre les solides à guider permet d'augmenter de façon significative les efforts admissibles, la durée de vie du guidage, et de diminuer les frottements dans la liaison.

il existe plusieurs types de roulements, recensés dans le tableau page suivante.

Pour le moment, nous ne considérerons à des fins de modélisation que les roulements à billes à contact radial

Notes





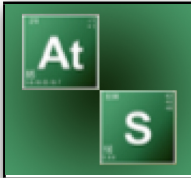
Type de roulement	Représentation		Charge		Vitesse	Remarques Utilisations	
	Normale	Schéma	Radiale ↓	Axiale →			
Roulement à billes à contact radial				+++	++	+++	Le plus utilisé. Très économique. Existe en plusieurs variantes (Étanche, avec rainure et segment d'arrêt ...)
Roulement à une ou deux rangées de billes à contact oblique				+++	+++	++	Ces roulements doivent être montés par paire, car chaque roulement n'accepte que des charges unidirectionnelles.
Roulement à deux rangées de billes à rotule				+++	+	++	Utilisé lorsque l'alignement des paliers est difficile ou dans le cas d'arbre de grande longueur pouvant fléchir sensiblement.
Roulement à rouleaux cylindriques				++++	0	+++	Supporte des grandes charges radiales. Les bagues sont séparables, facilitant le montage.
Roulement à rouleaux coniques				++++	+++	++	Se monte par paire et en opposition. Les bagues sont séparables, facilitant le montage.

E.3.2. Modélisation des roulements à bille à contact radial

La bague intérieure du roulement admet un certain «rotulage» autour du centre du centre de la liaison, et c'est la raison pour laquelle un roulement à bille à contact radial sera la plupart du temps modélisé :

- soit par une liaison rotule si le roulement ne peuvent pas translater (bagues immobilisées)
- soit par une liaison linéaire annulaire si les bagues peuvent translater

Notes



# F. Liaisons équivalentes

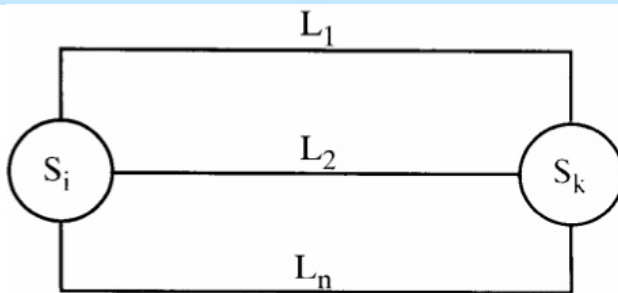
## F.1. Généralités

Une chaîne de solides peut faire apparaître des liaisons en série ou des liaisons en parallèle. Il est alors possible de chercher l'existence d'une liaison équivalente à ces liaisons, dont les degrés de liberté sont identiques à ceux autorisés par les liaisons associées.

Mais ce n'est pas toujours possible, car une liaison équivalente doit pouvoir être définie par une des liaisons normalisées du tableau du chapitre précédent.

## F.2. Liaisons en parallèle

### F.2.1. Torseur cinématique équivalent



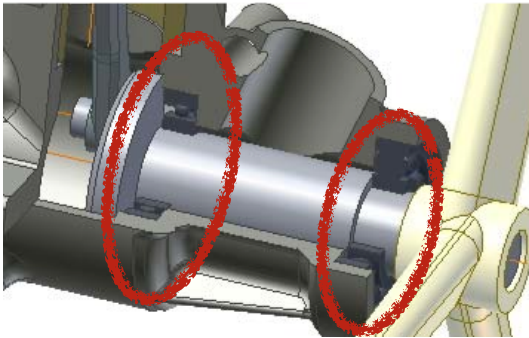
Dans ce graphe, les solides  $S_i$  et  $S_j$  sont reliés par 3 liaisons en parallèle, chacune définie par son torseur cinématique  $\{v_{0_{i/k}}\}$ ,  $\{v_{1_{i/k}}\}$  et  $\{v_{2_{i/k}}\}$

Issue d'une écriture de fermeture cinématique, la liaison équivalente doit être caractérisée par un torseur cinématique  $\{v_{eq_{i/k}}\}$  compatible avec l'ensemble des torseurs cinématiques :

$$\{v_{eq_{i/k}}\} = \{v_{0_{i/k}}\} = \{v_{1_{i/k}}\} = \{v_{2_{i/k}}\}$$

Notes

F.2.2. Exemple

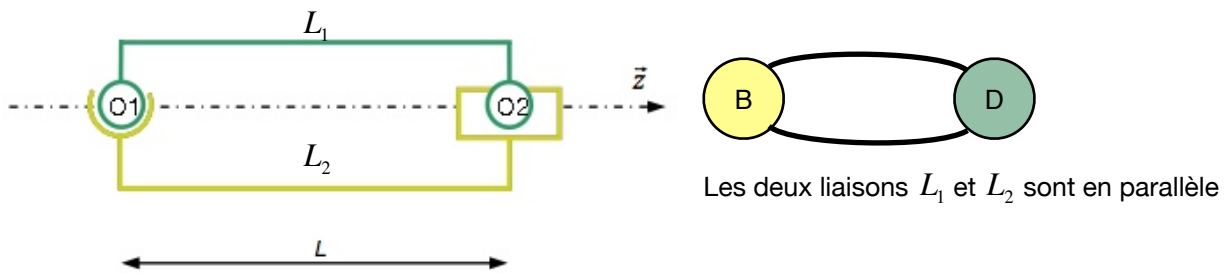


Considérons la liaison entre le vilebrequin D et le bâti B du micromoteur.

Elle est obtenue par l'association de 2 roulements, dont :

- un est immobilisé en translation, et sera modélisé par une liaison rotule,
- l'autre est libre, et sera modélisé par une liaison linéaire annulaire

Le guidage est alors modélisé de la façon suivante :



La liaison rotule est associée au torseur cinématique  $\{v_{1_{D/B}}\}_{O_1} = \begin{Bmatrix} \omega_{1x}\vec{x} + \omega_{1y}\vec{y} + \omega_{1z}\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_1}$

La liaison linéaire annulaire est associée au torseur cinématique  $\{v_{2_{D/B}}\}_{O_2} = \begin{Bmatrix} \omega_{2x}\vec{x} + \omega_{2y}\vec{y} + \omega_{2z}\vec{z} \\ v_{2z}\vec{z} \end{Bmatrix}_{O_2}$

Ces deux liaisons sont équivalente à une liaison telle que  $\{v_{eq_{D/B}}\} = \{v_{1_{D/B}}\} = \{v_{2_{D/B}}\}$

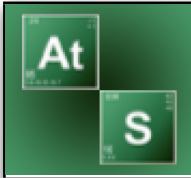
Pour étudier l'égalité de ces torseurs, ils doivent tous être exprimés au même point. Choisissons par exemple le point  $O_2$ .

La formule de Varignon permet d'exprimer  $\{v_{1_{D/B}}\}$  en  $O_2$  :

$$\overrightarrow{V1_{O_2 \in D/B}} = \overrightarrow{V1_{O_1 \in D/B}} + \overrightarrow{\Omega_{D/B}} \wedge \overrightarrow{O_1 O_2} = (\omega_{1x}\vec{x} + \omega_{1y}\vec{y} + \omega_{1z}\vec{z}) \wedge (L\vec{z})$$

D'où  $\{v_{1_{D/B}}\}_{O_2} = \begin{Bmatrix} \omega_{1x}\vec{x} + \omega_{1y}\vec{y} + \omega_{1z}\vec{z} \\ -\omega_{1x}L\vec{y} + \omega_{1y}L\vec{x} \end{Bmatrix}_{O_2}$

Notes



Le torseur cinématique équivalent doit donc être tel que

$$\left\{ \mathbf{v}_{eqD/B} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \omega_{1x}\vec{x} + \omega_{1y}\vec{y} + \omega_{1z}\vec{z} \\ -\omega_{1x}L\vec{y} + \omega_{1y}L\vec{x} \end{array} \right\}_{O_2} = \left\{ \begin{array}{l} \omega_{2x}\vec{x} + \omega_{2y}\vec{y} + \omega_{2z}\vec{z} \\ v_{2z}\vec{z} \end{array} \right\}_{O_2}$$

Pour que ces torseurs soient égaux, il faut alors nécessairement vérifier :

- $\omega_{1x} = \omega_{1y} = 0$
- $v_{2z} = 0$
- $\omega_{1z} = \omega_{2z}$

Le torseur de la liaison équivalente a donc au final l'expression suivante :

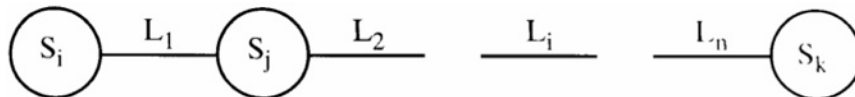
$$\left\{ \mathbf{v}_{eqD/B} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \omega_z\vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_2}$$

Il s'agit du torseur d'une liaison pivot

**La liaison équivalente à ce guidage est donc bien une liaison pivot**

### F.3. Liaisons en série

#### F.3.1. Torseur cinématique équivalent

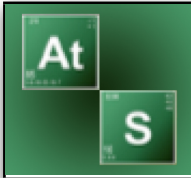


Lorsque plusieurs liaisons sont en série, la liaison globale doit pouvoir autoriser l'ensemble des mouvements de chacune de ces liaisons.

La composition des mouvements, et donc des torseurs cinématiques, implique que le torseur cinématique équivalent doit alors être la somme des torseurs cinématiques :

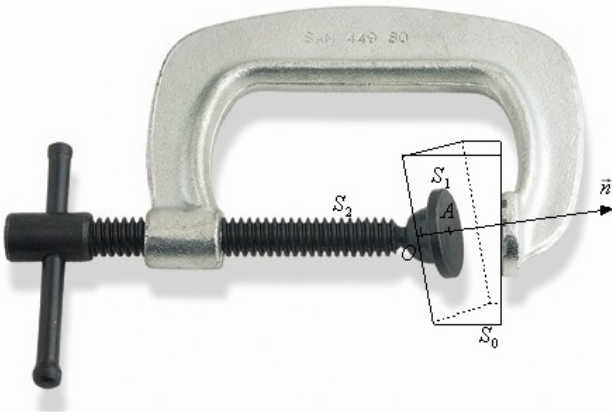
$$\left\{ \mathbf{v}_{eq_{i/k}} \right\} = \left\{ \mathbf{v}_{i/j} \right\} + \dots + \left\{ \mathbf{v}_{n/k} \right\}$$

Notes

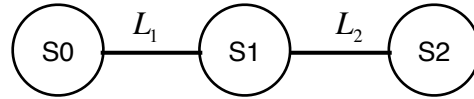


**F.3.2. Exemple**

On s'intéresse à la liaison entre une pièce et un serre-joint :

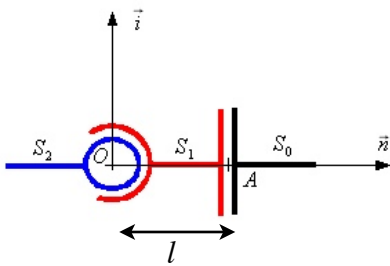


Le graphe des liaisons est :



La liaison  $L_1$  est un appui plan, tandis que la liaison  $L_2$  est une rotule

Ces deux liaisons en série se modélisent comme suit dans un repère  $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{n})$



Le torseur cinématique associé à la liaison  $L_1$  est :

$$\{v_{S_1/S_0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_{n,1/0} \vec{n} \\ v_{i,A \in I/0} \vec{i} + v_{j,A \in I/0} \vec{j} \end{array} \right\}_A$$

Le torseur cinématique associé à la liaison  $L_2$  est :

$$\{v_{S_2/S_1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_{i,2/1} \vec{i} + \omega_{j,2/1} \vec{j} + \omega_{n,2/1} \vec{n} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_0$$

Le torseur cinématique de la liaison équivalente s'obtient en faisant la somme de ces deux torseurs cinématiques :

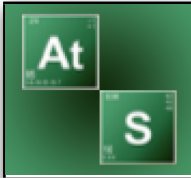
$$\{v_{eq_{2/0}}\} = \{v_{2/1}\} + \{v_{1/0}\}$$

Il faut toutefois, avant de sommer les composantes, écrire ces torseurs au même point de réduction, A par exemple.

La formule de Varignon permet d'écrire le torseur cinématique  $\{v_{2/1}\}$  en A, avec :

$$\overline{V_{A \in I}} = \overline{\Omega_{2/1}} \wedge \overline{OA} = (\omega_{i,2/1} \vec{i} + \omega_{j,2/1} \vec{j} + \omega_{n,2/1} \vec{n}) \wedge (l \vec{n}) = -\omega_{i,2/1} l \vec{j} + \omega_{j,2/1} l \vec{i}$$

Notes



Le torseur cinématique équivalent peut maintenant être calculé :

$$\begin{aligned} \{v_{eq_{2/0}}\} &= \left\{ \begin{array}{l} \omega_{i,2/1}\vec{i} + \omega_{j,2/1}\vec{j} + \omega_{n,2/1}\vec{n} \\ \omega_{j,2/1}l\vec{i} - \omega_{i,2/1}l\vec{j} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{l} \omega_{n,1/0}\vec{n} \\ v_{i,A\in 1/0}\vec{i} + v_{j,A\in 1/0}\vec{j} \end{array} \right\}_A \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \omega_{i,2/1}\vec{i} + \omega_{j,2/1}\vec{j} + (\omega_{n,2/1} + \omega_{n,1/0})\vec{n} \\ (v_{i,A\in 1/0} + \omega_{j,2/1}l)\vec{i} + (v_{j,A\in 1/0} - \omega_{i,2/1}l)\vec{j} \end{array} \right\}_A \end{aligned}$$

Ce torseur cinématique autorise 5 degrés de liberté, le degré supprimé étant la translation suivant  $\vec{n}$ .

**La liaison équivalente est donc une liaison ponctuelle, ou sphère/plan.**

Notes