

# AUTOMATIQUE

**Systemes linéaires, non linéaires,  
à temps continu, à temps discret,  
représentation d'état**

**Cours et exercices corrigés**

***Yves Granjon***

Professeur à l'Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL)  
et directeur de l'ENSEM à Nancy

**2<sup>e</sup> édition**

DUNOD

Illustration de couverture : © *Simon Osbourne, Digital Vision*

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique</p>		<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.</p> <p>Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--	---	--

© Dunod, Paris, 2001, 2010

**ISBN 978-2-10-055087-6**

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

<b>AVANT-PROPOS</b>	<b>XV</b>
<b>PREMIÈRE PARTIE</b>	
<b>MODÉLISATION DES SIGNAUX ET DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS</b>	
<b>CHAPITRE 1 • MODÉLISATION DES SYSTÈMES LINÉAIRES. NOTION DE FONCTION DE TRANSFERT</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction	3
1.2 Notion de signal	4
1.2.1 Signaux temporels	4
1.2.2 Principe de causalité	4
1.2.3 Signaux non temporels	4
1.3 Le cas des systèmes linéaires	5
1.4 La transformation de Laplace	5
1.4.1 Définition	5
1.4.2 Propriétés fondamentales de la transformation de Laplace	5
1.4.3 Transformée de Laplace inverse	8
1.5 Transformées de Laplace de quelques signaux usuels	9
1.5.1 Échelon unité	9
1.5.2 Rampe ou échelon de vitesse	9
1.5.3 Impulsion unitaire	10
1.5.4 Signal sinusoïdal	10
1.5.5 Signaux quelconques	11
1.6 Fonction de transfert d'un système	11
1.6.1 Définition	11
1.6.2 Mise en cascade de deux systèmes	12
1.6.3 Original d'une fonction de transfert	12
1.7 Résolution d'un problème à l'aide de la fonction de transfert	12
1.7.1 Principe	12
1.7.2 Exemples	13
<b>EXERCICES</b>	<b>15</b>
<b>SOLUTIONS</b>	<b>17</b>

<b>CHAPITRE 2 • MODÉLISATION FRÉQUENTIELLE DES SIGNAUX TEMPORELS. NOTION DE SPECTRE</b>	<b>23</b>
2.1 Description des signaux	23
2.1.1 L'exemple du signal sinusoïdal	23
2.1.2 Représentation d'un signal composé	24
2.1.3 Notion de spectre	24
2.2 Cas des signaux périodiques	25
2.2.1 Décomposition en série de Fourier	25
2.2.2 Exemple de calcul d'un spectre : signal en dents de scie	26
2.2.3 Décomposition en série de Fourier à l'aide de Mathematica	27
2.3 Cas des signaux non périodiques à énergie finie	28
2.3.1 Définition	28
2.3.2 Transformée de Fourier et spectre des signaux non périodiques à énergie finie	28
2.3.3 Exemple de calcul du spectre d'un signal non périodique à énergie finie	29
2.3.4 Relation entre la transformée de Fourier et la transformée de Laplace	29
2.3.5 Égalité de Parseval	30
2.3.6 Calcul d'une transformée de Fourier à l'aide de Mathematica	31
<b>EXERCICES</b>	<b>31</b>
<b>SOLUTIONS</b>	<b>34</b>
<b>CHAPITRE 3 • MODÉLISATION FRÉQUENTIELLE DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS</b>	<b>41</b>
3.1 Définitions	41
3.2 Diagrammes de Bode	42
3.2.1 Définition	42
3.2.2 Exemple : diagramme de Bode d'un système du premier ordre	42
3.3 Approche méthodique du tracé des Diagrammes de Bode	44
3.3.1 Objectif	44
3.3.2 Construction d'un diagramme de gain asymptotique	44
3.3.3 Méthode rapide	46
3.3.4 Cas particuliers	47
3.4 Diagramme de Nyquist	50
3.4.1 Définition	50
3.4.2 Méthode de tracé rapide	50
<b>EXERCICES</b>	<b>51</b>
<b>SOLUTIONS</b>	<b>53</b>
<b>CHAPITRE 4 • ÉTUDE SYSTÉMATIQUE DES SYSTÈMES DU PREMIER ET DU SECOND ORDRE</b>	<b>64</b>
4.1 Méthodes d'étude et définitions	64
4.2 Étude des systèmes du premier ordre	64
4.2.1 Mise en équation	64
4.2.2 Réponse à une impulsion de Dirac	65
4.2.3 Réponse indicielle	65
4.2.4 Réponse à une entrée en rampe	66
4.2.5 Étude fréquentielle d'un système d'ordre 1	67

4.3	Étude des systèmes du second ordre	70
4.3.1	Mise en équation	70
4.3.2	Réponse indicielle	70
4.3.3	Diagramme de Bode	72
4.3.4	Diagramme de Nyquist	79
<b>EXERCICES</b>		<b>80</b>
<b>SOLUTIONS</b>		<b>81</b>

## DEUXIÈME PARTIE AUTOMATIQUE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

<b>CHAPITRE 5 • PROBLÉMATIQUE GÉNÉRALE DE L'AUTOMATIQUE. MISE EN ÉQUATION DES ASSERVISSEMENTS LINÉAIRES</b>		<b>89</b>
5.1	Introduction	89
5.2	Inconvénients de la commande en boucle ouverte	89
5.3	Principe de la commande en boucle fermée	90
5.4	Modélisation d'une boucle de régulation	92
5.5	Le problème de la stabilité	93
5.6	Les performances d'un système régulé	93
<b>EXERCICES</b>		<b>94</b>
<b>SOLUTIONS</b>		<b>98</b>
<b>CHAPITRE 6 • STABILITÉ DES SYSTÈMES LINÉAIRES ASSERVIS</b>		<b>104</b>
6.1	Critère mathématique de stabilité	104
6.1.1	Énoncé du critère de stabilité	104
6.1.2	Inconvénients du critère mathématique	106
6.2	Critère algébrique de Routh	106
6.2.1	Principe	106
6.2.2	Exemple	107
6.3	Critère de Nyquist	108
6.4	Critère du revers	113
6.5	Marges de stabilité	113
6.5.1	Concept de marge de stabilité	113
6.5.2	Marge de gain	114
6.5.3	Marge de phase	116
6.6	Influence du gain sur la stabilité	118
<b>EXERCICES</b>		<b>119</b>
<b>SOLUTIONS</b>		<b>121</b>

<b>CHAPITRE 7 • PERFORMANCES DES SYSTÈMES LINÉAIRES ASSERVIS</b>	<b>127</b>
7.1 Problématique générale	127
7.2 Précision d'un système asservi	128
7.2.1 Erreur statique ou erreur de position	128
7.2.2 Erreur de vitesse ou erreur de traînage	130
7.3 Rapidité des systèmes régulés	131
7.3.1 Définitions	131
7.3.2 Temps de montée d'un système du second ordre	133
7.3.3 Généralisation	135
7.4 Limitation du dépassement	135
7.4.1 Dépassement pour un système du second ordre	135
7.4.2 Relation entre la marge de phase et le dépassement en boucle fermée pour un système du second ordre	136
7.4.3 Généralisation	137
7.5 Influence du gain statique en boucle ouverte sur les performances en boucle fermée	137
7.6 Étude de cas	138
7.6.1 Énoncé du problème. Cahier des charges	138
7.6.2 Étude de la stabilité	139
7.6.3 Réglage du gain	139
7.6.4 Prédiction du temps de montée en boucle fermée	140
7.6.5 Conclusion	140
<b>EXERCICES</b>	<b>141</b>
<b>SOLUTIONS</b>	<b>142</b>
<b>CHAPITRE 8 • CORRECTION DES SYSTÈMES LINÉAIRES ASSERVIS</b>	<b>147</b>
8.1 Cahier des charges d'un asservissement	147
8.2 Principe général de la correction d'un système	148
8.3 Actions correctives élémentaires	148
8.3.1 Correcteur proportionnel	148
8.3.2 Correcteur intégral	149
8.3.3 Correcteur à action dérivée	150
8.4 Inconvénient fondamental des actions correctives élémentaires	152
8.5 Action proportionnelle intégrale. Correcteur à retard de phase	153
8.6 Action proportionnelle dérivée. Correcteur à avance de phase	156
<b>EXERCICES</b>	<b>159</b>
<b>SOLUTIONS</b>	<b>161</b>

## TROISIÈME PARTIE AUTOMATIQUE DES SYSTÈMES CONTINUS NON LINÉAIRES

<b>CHAPITRE 9 • ANALYSE DES ASSERVISSEMENTS CONTINUS NON LINÉAIRES</b>	<b>173</b>
9.1 Introduction	173
9.1.1 Généralités	173
9.1.2 Différents types de non-linéarités	173
9.2 Étude du domaine de linéarité d'un système	174
9.2.1 Le phénomène de saturation	174
9.2.2 Détermination du domaine de linéarité d'un système asservi	175
9.3 Caractéristiques de certains organes non linéaires	177
9.3.1 Systèmes tout ou rien	177
9.3.2 Systèmes à hystérésis	178
9.3.3 Caractéristiques complexes	178
9.4 Asservisements non linéaires séparables	179
9.5 Étude d'un système séparable par la méthode du premier harmonique	181
9.5.1 Principe	181
9.5.2 Gain complexe équivalent	181
9.5.3 Notion de lieu critique	182
9.5.4 Exemple	182
9.5.5 Justification de la méthode du premier harmonique	183
9.5.6 Méthode de calcul approché du gain complexe équivalent	183
<b>EXERCICES</b>	<b>183</b>
<b>SOLUTIONS</b>	<b>185</b>
<b>CHAPITRE 10 • MÉTHODES D'ÉTUDE DES ASSERVISSEMENTS CONTINUS NON LINÉAIRES</b>	<b>189</b>
10.1 Stabilité des systèmes non linéaires	189
10.1.1 Fonction de transfert généralisée	189
10.1.2 Principe de l'étude	190
10.1.3 Exemple	190
10.2 Méthode d'étude par le lieu de Cypkin	192
10.2.1 Principe	192
10.2.2 Exemple	193
10.3 Méthode du plan de phase	195
10.3.1 Principe	195
10.3.2 Tracé des trajectoires	195
10.3.3 Analyse des trajectoires et diagnostic du système	197
<b>EXERCICES</b>	<b>198</b>
<b>SOLUTIONS</b>	<b>199</b>

## QUATRIÈME PARTIE AUTOMATIQUE DES SYSTÈMES ÉCHANTILLONNÉS

<b>CHAPITRE 11 • MODÉLISATION DES SIGNAUX ET DES SYSTÈMES ÉCHANTILLONNÉS</b>	<b>205</b>
11.1 Introduction	205
11.2 Principes fondamentaux de l'échantillonnage des signaux	206
11.2.1 Définition	206
11.2.2 Spectre d'un signal échantillonné	207
11.2.3 Théorème de Shannon	208
11.3 Exemples de signaux échantillonnés simples	208
11.3.1 Impulsion unité	208
11.3.2 Échelon unité	209
11.4 Transformée en $z$ des signaux échantillonnés	210
11.4.1 Définition	210
11.4.2 Intérêt de la transformée en $z$	211
11.4.3 Propriétés de la transformée en $z$	211
11.4.4 Transformée en $z$ de signaux usuels	212
11.4.5 Calculs de transformées en $z$ à l'aide de Mathematica	213
11.5 Fonction de transfert en $z$	213
11.5.1 Relations entre échantillons de sortie et échantillons d'entrée	213
11.5.2 Définition de la fonction de transfert en $z$	215
11.5.3 Exemples de fonctions de transfert en $z$	216
11.6 Transformée de Fourier à temps discret	217
11.6.1 Définition	217
11.6.2 Exemple	217
11.7 Comportement fréquentiel des systèmes échantillonnés	219
11.7.1 Principes généraux	219
11.7.2 Exemple	219
11.8 Relations entre les modèles à temps continu et à temps discret	220
11.8.1 Problématique	220
11.8.2 Équivalence à la dérivation	221
11.8.3 Équivalence à l'intégration	223
11.8.4 Équivalence à la réponse impulsionnelle. Équivalence modale	223
11.8.5 Équivalence d'une association de plusieurs systèmes	224
<b>EXERCICES</b>	<b>225</b>
<b>SOLUTIONS</b>	<b>228</b>
<b>CHAPITRE 12 • STABILITÉ ET PERFORMANCES DES SYSTÈMES ÉCHANTILLONNÉS ASSERVIS</b>	<b>239</b>
12.1 Mise en équation des asservissements échantillonnés	239
12.1.1 Fonction de transfert en boucle fermée	239
12.1.2 Relation temps continu – temps discret en boucle fermée	240



12.2	Stabilité des asservissements échantillonnés	241
12.2.1	Critère mathématique de stabilité	241
12.2.2	Critère algébrique de Jury	243
12.2.3	Utilisation du critère de Routh	245
12.2.4	Influence de la fréquence d'échantillonnage sur la stabilité	245
12.3	Asservissements continus commandés ou corrigés en temps discret	247
12.3.1	Définition	247
12.3.2	Interfaçage entre un système discret et un système continu	247
12.3.3	Première méthode d'étude simple : recherche d'un système à temps continu équivalent	248
12.3.4	Deuxième méthode d'étude simple : recherche d'un système à temps discret équivalent	249
12.4	Précision des asservissements échantillonnés	249
12.4.1	Erreurs de position et de vitesse	249
12.4.2	Précision d'un système échantillonné du premier ordre	250
12.5	Performances dynamiques d'un système échantillonné	252
12.5.1	Fonction de transfert échantillonnée équivalente à un système du second ordre	252
12.5.2	Prévision des performances dynamiques	253
	<b>EXERCICES</b>	<b>256</b>
	<b>SOLUTIONS</b>	<b>258</b>
	<b>CHAPITRE 13 • CORRECTION DES SYSTÈMES ÉCHANTILLONNÉS ASSERVIS</b>	<b>274</b>
13.1	Principes généraux	274
13.1.1	Rappel du cahier des charges d'un asservissement	274
13.1.2	Rôle du correcteur	274
13.1.3	Correction numérique d'un système à temps continu	275
13.1.4	Problèmes spécifiques liés aux correcteurs numériques	275
13.2	Tentatives d'actions correctives simples	276
13.2.1	Amélioration de la précision	276
13.2.2	Compensation de la perte de stabilité par placement des pôles	279
13.2.3	Action dérivée	280
13.3	Synthèse d'un correcteur numérique par discrétisation d'un correcteur continu	283
13.3.1	Principe	283
13.3.2	Exemple	284
13.4	Synthèse d'un correcteur numérique par méthode polynomiale	287
13.4.1	Principe	287
13.4.2	Exemple	288
	<b>EXERCICES</b>	<b>289</b>
	<b>SOLUTIONS</b>	<b>290</b>

## CINQUIÈME PARTIE REPRÉSENTATION D'ÉTAT DES SYSTÈMES

<b>CHAPITRE 14 • REPRÉSENTATION D'ÉTAT DES SYSTÈMES À TEMPS CONTINU</b>	<b>297</b>
14.1 Définitions	297
14.1.1 État d'un système et variables d'état	297
14.1.2 Modélisation du fonctionnement du système	298
14.1.3 Cas général	299
14.2 Résolution des équations d'état	300
14.2.1 Étude préalable	300
14.2.2 Généralisation au système vectoriel	300
14.2.3 Calcul de la matrice de transition	300
14.2.4 Calcul de l'état d'un système en fonction d'un signal de commande	306
14.3 Commandabilité d'un système	307
14.3.1 Définitions	307
14.3.2 Critère de Kalman	308
14.3.3 Exemple	308
14.3.4 Calcul de la commande d'un système	309
14.3.5 Cas des systèmes non commandables	311
14.4 Observabilité de l'état d'un système	311
14.4.1 Définition	312
14.4.2 Critère d'observabilité	312
14.4.3 Cas des systèmes non observables	312
14.5 Relation entre la représentation d'état et la fonction de transfert d'un système	313
14.5.1 Représentation d'état à partir de la fonction de transfert	313
14.5.2 Calcul de la fonction de transfert à partir de la représentation d'état	319
<b>EXERCICES</b>	<b>320</b>
<b>SOLUTIONS</b>	<b>322</b>
<b>CHAPITRE 15 • REPRÉSENTATION D'ÉTAT DES SYSTÈMES À TEMPS DISCRET</b>	<b>332</b>
15.1 Principe général	332
15.1.1 Variables d'état en temps discret	332
15.1.2 Modélisation du fonctionnement du système	333
15.2 Résolution des équations d'état	334
15.2.1 Prédiction de l'état du système à un instant quelconque	334
15.2.2 Exemple	334
15.3 Commandabilité d'un système à temps discret	335
15.3.1 Accessibilité	335
15.3.2 Critère de commandabilité	335
15.4 Observabilité de l'état d'un système	336
15.4.1 Définition	336
15.4.2 Critère d'observabilité	336
15.4.3 Exemple	336

15.5	Relation entre la représentation d'état et la fonction de transfert d'un système	337
15.5.1	Représentation d'état à partir de la fonction de transfert	337
15.5.2	Calcul de la fonction de transfert à partir de la représentation d'état	340
15.6	Commande échantillonnée d'un système à temps continu	341
15.6.1	Comportement du système	341
15.6.2	Influence de la période d'échantillonnage sur l'observabilité et la commandabilité	342
	<b>EXERCICES</b>	<b>342</b>
	<b>SOLUTIONS</b>	<b>344</b>
<b>CHAPITRE 16 • COMMANDE PAR RETOUR D'ÉTAT. ESTIMATEURS, OBSERVATEURS ET PRÉDICTEURS</b>		<b>347</b>
16.1	Principe général de la commande par retour d'état	347
16.1.1	Vecteur de gain	347
16.1.2	Fonction de transfert en boucle fermée	348
16.1.3	Détermination du vecteur d'état	349
16.2	Commandabilité en modes en temps continu	349
16.2.1	Définition	349
16.2.2	Critère de commandabilité en modes	349
16.2.3	Cas des systèmes non commandables	350
16.2.4	Exemple de placement des pôles pour un système commandable	350
16.2.5	Exemple pour un système non commandable	351
16.3	Commandabilité en temps discret : réponse pile	352
16.3.1	Problématique	352
16.3.2	Résolution du problème	353
16.4	Observateurs et estimateurs d'état	354
16.4.1	Observateur asymptotique en temps continu	354
16.4.2	Prédicteur en temps discret	356
	<b>EXERCICES</b>	<b>357</b>
	<b>SOLUTIONS</b>	<b>359</b>
<b>CHAPITRE 17 • SYSTÈMES À ÉVÉNEMENTS DISCRETS, LE MODÈLE GRAFCET</b>		<b>366</b>
17.1	Définition	366
17.1.1	Les systèmes à événements discrets	366
17.1.2	Le modèle GRAFCET	366
17.1.3	Analyse du système	367
17.1.4	Notions d'entrées et de sorties	367
17.2	Principes de représentation	368
17.2.1	Notion d'étape et de liaison	368
17.2.2	Notion de transition	368
17.2.3	Exemple	369
17.2.4	Règles de construction d'un GRAFCET	369
17.3	Différents types d'action	371
17.3.1	Actions continues	371
17.3.2	Actions mémorisées	371
17.3.3	Actions conditionnelles	371

---

17.3.4	Actions temporisées	371
17.4	Évolution d'un GRAFCET	371
17.4.1	État initial d'un système	371
17.4.2	Règles de franchissement des transitions	371
17.4.3	Notion d'évolution fugace	373
17.5	Étude de cas	374
	<b>EXERCICES</b>	<b>376</b>
	<b>SOLUTIONS</b>	<b>378</b>
	<b>ANNEXE A • TABLE DES TRANSFORMÉES DE LAPLACE</b>	<b>382</b>
	<b>ANNEXE B • ABAQUE DES RÉPONSES INDICIELLES D'UN SYSTÈME DU SECOND ORDRE</b>	<b>383</b>
	<b>ANNEXE C • TABLE DES TRANSFORMÉES EN z</b>	<b>384</b>
	<b>ANNEXE D • ÉQUIVALENCE ENTRE FONCTIONS DE TRANSFERT EN TEMPS CONTINU ET EN TEMPS DISCRET</b>	<b>386</b>
	<b>ANNEXE E • FORMULAIRE</b>	<b>388</b>
	<b>ANNEXE F • MEMENTO DE CALCUL MATRICIEL</b>	<b>391</b>
	<b>INDEX</b>	<b>395</b>

# Avant-propos

L'automatique est la discipline qui, d'une manière générale, traite de la commande des systèmes. Elle revêt donc un caractère très important dans le domaine industriel auquel elle apporte à la fois des solutions, des méthodes d'étude ainsi que des démarches systématiques d'analyse.

Cet ouvrage couvre l'étendue de ces méthodes et correspond globalement aux programmes en vigueur dans la plupart des licences et maîtrises EEA et des écoles d'ingénieurs. Le lecteur y trouvera donc, séparés en plusieurs parties, tous les aspects de l'automatique : systèmes linéaires ou non linéaires, systèmes à temps continu et à temps discret, représentation d'état. Par une approche pédagogique progressive, il intéressera également tous les étudiants qui abordent l'automatique en premier cycle : DEUG, IUT, etc.

La présentation de cet ouvrage respecte l'ordre chronologique dans lequel la discipline est en général abordée et se compose de six parties correspondant aux thèmes essentiels couverts par l'automatique.

La première partie est consacrée aux méthodes de base de la modélisation des systèmes linéaires continus. Elle contient l'ensemble des notions essentielles à l'étude générale de l'automatique, concepts qui restent valables dans toute la suite de l'étude, y compris pour les systèmes non linéaires ou à temps discret. Il est conseillé au lecteur de n'aborder la suite de l'étude qu'une fois ces notions maîtrisées : transformation de Laplace, spectre, comportement fréquentiel, etc.

L'étude de l'automatique proprement dite, à savoir les systèmes bouclés, débute véritablement avec la deuxième partie ; toutes les notions essentielles (mises en équation, stabilité, performances et correction) y sont abordées à propos des systèmes linéaires à temps continu. Ces principes restant valables pour les systèmes non linéaires ou à temps discret, il est recommandé au lecteur de s'assurer que ces bases sont bien acquises avant d'aborder les autres parties de ce livre.

La troisième partie concerne l'étude des systèmes non linéaires. Deux chapitres sont consacrés à cette partie de l'automatique qui apparaît souvent comme l'une des plus délicates, compte tenu de l'absence de méthodologie générale applicable à l'ensemble des systèmes non linéaires. Pour cette raison, les systèmes non linéaires sont abordés différemment des systèmes linéaires : les méthodes les plus couramment utilisées sont présentées et détaillées en explicitant les cas pour lesquels elles s'appliquent. Cette présentation n'a pas l'ambition d'être exhaustive mais a pour vocation de sensibiliser le lecteur aux difficultés liées à la mise en œuvre de tels systèmes.

La quatrième partie est consacrée à une branche essentielle de l'automatique : les systèmes à temps discret. Toutes les notions présentées (modélisation, stabilité, performances et correction) permettront à l'étudiant d'acquérir la maîtrise d'une discipline qui joue un rôle croissant dans le développement industriel de l'automatique.

La cinquième partie aborde la représentation d'état des systèmes, partie beaucoup plus moderne de l'automatique qui permet, grâce à des modélisations différentes de celles abordées jusqu'alors, d'appréhender des systèmes plus complexes et de fournir des méthodes d'études et des réponses scientifiques et technologiques plus précises aux problèmes généraux liés à l'automatique des systèmes réels.

Pour finir, une sixième partie, composée d'un seul chapitre, traite du modèle GRAFCET, qui constitue l'un des fondements de l'étude des systèmes à événements discrets.

Dans l'ensemble de l'ouvrage, nous avons volontairement choisi de détailler tous les développements théoriques permettant au lecteur d'accéder rapidement à une meilleure compréhension de la discipline. En revanche, certaines parties calculatoires ont été réduites, préférant renvoyer le lecteur à l'utilisation de logiciels de calcul formel dont l'usage est aujourd'hui courant en automatique.

Ce livre, qui est un ouvrage de référence dans le domaine de l'automatique, a été conçu avec le souci de la pédagogie. Je formule donc le souhait que tout étudiant en ayant fait l'acquisition puisse y trouver les clés de sa réussite.

### **À propos de Mathematica**

Nous avons fait le choix, dans cette édition, d'illustrer un certain nombre d'éléments théoriques avec un logiciel de calcul formel : Mathematica. À l'instar d'autres produits comme Matlab ou Maple, ce logiciel peut être d'une grande utilité puisqu'il permet de s'affranchir d'un certain nombre de calculs fastidieux. Il peut aussi fournir une aide précieuse pour la vérification des résultats obtenus. Néanmoins, cet ouvrage ne constitue en aucune manière un ouvrage de référence sur Mathematica. Notre propos se limite, à cet égard, à montrer comment certains résultats peuvent être obtenus facilement et rapidement. Nous n'utiliserons pas ce logiciel systématiquement et le lecteur qui ne disposerait pas de cet outil ne sera pas pénalisé.

Il nous paraît important de mettre en garde le lecteur qui voudrait utiliser fréquemment Mathematica contre un certain nombre d'erreurs souvent commises ; les quelques conseils qui suivent devraient lui être utiles :

- ne pas chercher à utiliser systématiquement un logiciel de calcul lorsqu'une approche simple est possible ;
- les logiciels comme Mathematica offrent en général des possibilités phénoménales et il n'est pas toujours aisé de s'y retrouver facilement : ne pas hésiter à utiliser l'aide en ligne du logiciel qui regorge d'exemples simples ;
- Mathematica est un logiciel très exigeant en termes de syntaxe. Certaines erreurs sont détectées par le logiciel, d'autres pas. Cela signifie qu'en cas d'erreur de saisie, l'outil peut très bien calculer malgré tout un résultat qui sera pourtant erroné. Il convient par conséquent de rester vigilant et de ne pas hésiter à tester les commandes sur des cas simples pour lesquels on peut facilement vérifier le résultat manuellement.

Y. G.

PREMIÈRE PARTIE

---

**Modélisation des signaux  
et des systèmes linéaires continus**





## Chapitre 1

# Modélisation des systèmes linéaires

## Notion de fonction de transfert

### 1.1 INTRODUCTION

La plupart des systèmes physiques peuvent être décrits comme étant des opérateurs faisant correspondre des réponses  $R$  à des sollicitations  $S$  (figure 1.1). Ainsi, un système électrique pourra être étudié et caractérisé en exprimant une tension de sortie (réponse) en fonction d'une tension d'entrée (sollicitation). Ou encore, la position d'un amortisseur de véhicule (réponse) pourra être étudiée en fonction de l'excitation produite par les irrégularités de la route. Un faisceau de lumière (sollicitation) dirigé vers une face d'un matériau et qui ressort au travers d'une autre face (réponse) peut par exemple renseigner sur l'état du dit matériau.

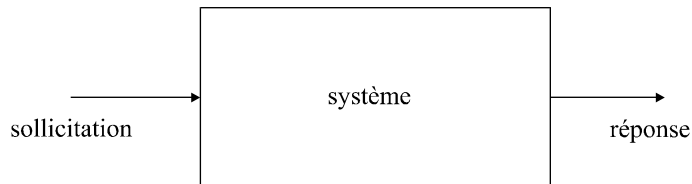


Figure 1.1 Modèle général d'un système.

Les exemples peuvent être multipliés à l'infini, car finalement, cette modélisation peut s'appliquer à la quasi totalité des objets physiques, et ce, que ce soit en électricité, en mécanique, en chimie, en optique, etc. Tout système peut donc s'apparenter au modèle proposé sur le schéma de la figure 1.1.

Dans la réalité, les systèmes peuvent posséder une ou plusieurs entrées, une ou plusieurs sorties, certaines sorties pouvant même éventuellement être considérées comme de nouvelles entrées (cas des systèmes bouclés que nous étudierons dans la partie 2 de cet ouvrage).

Nous étudierons dans ce cours, la manière dont le fonctionnement de tels systèmes peut être décrit, à partir de modèles mathématiques plus ou moins sophistiqués (en tout cas adaptés à la complexité du problème). Ceci nous permettra de répondre à différents types de question, par exemple :

- Quelle sera la réponse d'un système quelconque à telle ou telle sollicitation ? (Aspect prédictif.)
- De quoi se compose un système qui fournit telle réponse à telle sollicitation ? (Aspect caractérisation, identification, mais aussi diagnostic et détection de défauts.)
- Comment adapter ou régler un système pour qu'il fournisse une réponse donnée à une certaine sollicitation ?

D'autres questions se poseront tout au long de cet ouvrage. Il est d'ores et déjà évident qu'une meilleure connaissance de ces systèmes conditionne non seulement leur utilisation, mais également tous les concepts physiques qui y sont associés.

## 1.2 NOTION DE SIGNAL

Nous pouvons donc avoir une première approche des systèmes en considérant le couple (solicitation - réponse).

Imaginons un système optique réfléchissant vers lequel on dirige un faisceau de lumière. Le faisceau réfléchi constitue en quelque sorte une information, au sens où il est porteur d'une certaine signification. Nous le qualifierons de *signal*, tout comme le faisceau incident, puisqu'on ne saurait admettre que la réponse d'un système soit porteuse d'information si la sollicitation ne l'était pas.

D'une manière générale, toute sollicitation ou réponse d'un système sera considérée comme un *signal*. Les sollicitations ou excitations sont des signaux d'entrée et les réponses sont des signaux de sortie.

Pour le moment, nous ne considérerons que des systèmes mono-entrée, mono-sortie. Par convention, l'entrée sera notée  $e$  et la sortie sera notée  $s$ .

### 1.2.1 Signaux temporels

Le moyen qui *a priori* semble le plus naturel pour décrire un signal consiste à invoquer son évolution au cours du temps. Ainsi les formes  $e(t)$  et  $s(t)$  sont-elles des représentations temporelles des signaux  $e$  et  $s$ .

Nous verrons un peu plus tard que ce mode de représentation n'est pas toujours le plus intéressant. Toutefois, dans l'immédiat, nous nous limiterons à cette description temporelle de l'information.

Ainsi, on peut dire qu'un système quelconque est capable de prendre un signal  $e(t)$  et de la transformer en un signal  $s(t)$ .

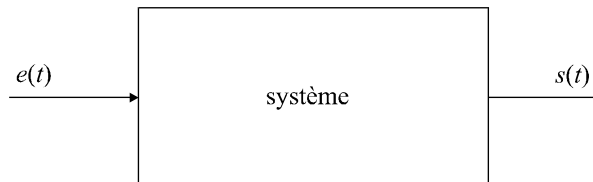


Figure 1.2 Modèle général d'un système.

### 1.2.2 Principe de causalité

Les signaux temporels possèdent une propriété essentielle sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir à maintes reprises : un effet ne pouvant survenir qu'après la cause qui lui a donné naissance, la réponse temporelle d'un système ne peut en aucun cas précéder la sollicitation qui en est la cause. Il s'agit du principe de causalité qui n'est pas qu'une vérité de Lapalisse comme nous aurons l'occasion de nous en rendre compte.

### 1.2.3 Signaux non temporels

La théorie des signaux ne traite pas que des signaux temporels. Si par exemple on considère une image en noir et blanc, statique sur un écran, le signal que constitue cette image peut être considéré comme une luminosité dépendant de deux variables spatiales  $(x, y)$ . Dans ce cas, la variable temps n'a rien à voir avec le problème. D'autres cas pourraient être cités en exemple. Dans ces cas où  $t$  n'intervient pas, on peut s'attendre à ce que le principe de causalité ne soit pas respecté.

Il n'est pas question ici d'ébaucher une classification des différents types de signaux. Celle-ci sera abordée plus tard. Nous utiliserons dans la suite de ce chapitre, l'exemple de signaux temporels appliqués à des systèmes simples : les systèmes linéaires.

## 1.3 LE CAS DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Considérons un système et un signal d'entrée  $e(t)$  qui est une combinaison linéaire de  $n$  signaux :

$$e(t) = \lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t) + \dots + \lambda_n e_n(t)$$

On définira comme système linéaire tout système qui conserve au niveau de sa sortie la combinaison linéaire d'entrée, chaque  $s_i(t)$  étant la sortie correspondant à  $e_i(t)$ .

$$s(t) = \lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t) + \dots + \lambda_n s_n(t)$$

La plupart du temps, ces systèmes sont régis par des équations différentielles à coefficients constants.

Soit  $e(t)$  le signal d'entrée,  $s(t)$  le signal de sortie. L'équation générale d'un système linéaire s'écrit de la manière suivante :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e(t)$$

Ces systèmes conservent toutes les opérations linéaires (dérivation, intégration, ...). Le plus grand des deux indices  $n$  et  $m$  est appelé ordre du système.

Lorsque le système est effectivement excité par un signal  $e(t)$ , cette équation différentielle possède effectivement un second membre. Si le système est libre et isolé, le second membre est nul.

**Remarque :** Nous ne nous intéresserons, dans les parties 1 et 2 de ce livre, qu'aux systèmes linéaires et aux signaux temporels continus ; les notions qui suivent ne s'appliquent donc qu'à de tels systèmes, dits linéaires à temps continu.

## 1.4 LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

### 1.4.1 Définition

Considérant une fonction réelle d'une variable réelle  $s(t)$  telle que  $s(t) = 0$  pour  $t < 0$ , on définit sa transformée de Laplace  $L(s)$  comme la fonction  $S$  de la variable complexe  $p$  telle que :

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s(t) e^{-pt} dt$$

La fonction  $S(p)$  est une fonction complexe d'une variable complexe  $p$  (avec  $p = \tau + j\omega$ ).

La transformée de Laplace d'une fonction  $s(t)$  n'existe pas dans tous les cas : il est nécessaire que l'intégrale ci-dessus converge. On démontre que cette convergence est vérifiée si la partie réelle  $\tau$  de la variable  $p$  est supérieure à une valeur donnée  $\alpha$  appelée seuil de convergence.

D'une manière plus générale, la transformation de Laplace est une application de l'espace des fonctions du temps (nulles pour  $t < 0$ ) vers l'espace des fonctions complexes d'une variable complexe. La fonction  $s(t)$  s'appelle l'original de  $S(p)$ , ou encore sa transformée inverse.

### 1.4.2 Propriétés fondamentales de la transformation de Laplace

Les propriétés qui suivent sont fondamentales car elles permettent de calculer facilement (sans utiliser la définition de la transformation de Laplace) les transformées de Laplace de certains signaux.

**Remarque :** Nous verrons plus loin que la connaissance de ces quelques propriétés d'une part et d'une dizaine de transformées de Laplace usuelles, d'autre part, permet de déduire pratiquement n'importe quelle transformée de Laplace.

### a) Linéarité

La linéarité de la transformation de Laplace résulte naturellement de la linéarité de l'intégration. Il s'agit là, malgré des apparences de simplicité, d'une des propriétés les plus importantes :

$$L[\alpha f + \beta g] = \alpha L[f] + \beta L[g]$$

En particulier : 
$$L[f + g] = L[f] + L[g]$$

et : 
$$L[kf] = kL[f]$$

### b) Transformée de Laplace d'une dérivée

Soit  $f(t)$  une fonction du temps. Soit  $F(p)$  sa transformée de Laplace. On montre que la transformée de Laplace de sa dérivée première se calcule simplement en fonction de  $F(p)$  :

$$\frac{df}{dt} \rightarrow pF(p) - f(0)$$

De même, la transformée de Laplace de sa dérivée  $n$ -ième est :

$$\frac{d^n f}{dt^n} \rightarrow p^n F(p) - \sum_{k=n+1}^{2n} \left( p^{2n-k} \frac{d^{k-n-1} f}{dt^{k-n-1}}(0) \right)$$

Par exemple :

$$\frac{d^2 f}{dt^2} \rightarrow p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$$

Une première constatation s'impose en observant ces expressions : la transformation de Laplace transforme l'opérateur *dérivation* en un opérateur arithmétique. Il faut noter que l'on retrouve dans ces expressions les conditions initiales, c'est-à-dire les valeurs en  $t = 0$  des dérivées successives d'ordres inférieurs à l'ordre de dérivation considéré.

**Remarque :** Dans le cas où ces conditions initiales sont nulles, ce qui est *a priori* très souvent le cas, on peut retenir simplement les relations suivantes :

$$\frac{df}{dt} \rightarrow pF(p) \quad ; \quad \frac{d^n f}{dt^n} \rightarrow p^n F(p)$$

### c) Transformée de Laplace d'une primitive

Soit  $P(t)$  une primitive d'une fonction  $f(t)$  et  $F(p)$  la transformée de Laplace de cette fonction. On a :

$$P(t) = \int f(t) dt \rightarrow \frac{F(p)}{p} + \frac{P(0)}{p}$$

Là encore, l'opérateur *intégration* se trouve changé en un opérateur arithmétique dans l'espace des transformées de Laplace.

**Remarque :** Dans le cas où la condition initiale  $P(0)$  est nulle, ce qui est *a priori* très souvent le cas, on peut retenir simplement la relation suivante :

$$P(t) = \int f(t) dt \rightarrow \frac{F(p)}{p}$$

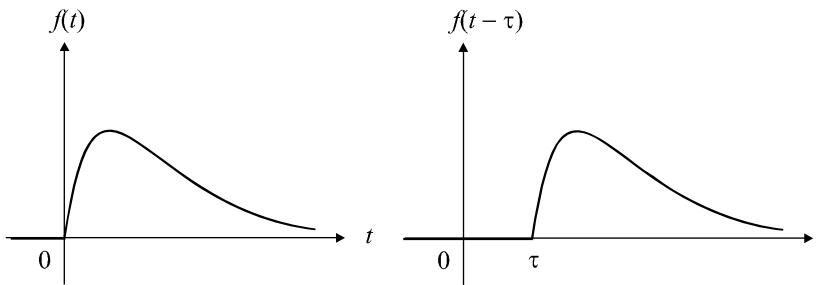
d) Propriétés de changement d'échelle

$$f(kt) \rightarrow \frac{1}{k}F\left(\frac{p}{k}\right) \quad ; \quad f\left(\frac{t}{k}\right) \rightarrow kF(p)$$

**Remarque :** On veillera à ne pas confondre ces deux propriétés avec la linéarité de la transformation de Laplace.

e) Théorème du retard

Considérons la fonction  $f(t - \tau)$ , autrement dit la fonction  $f(t)$  à laquelle on a fait subir un changement d'origine des temps (figure 1.3), autrement dit un retard d'un temps  $\tau$ .



**Figure 1.3** Représentation temporelle d'un signal retardé.

Calculons la transformée de Laplace de cette fonction.

On a :

$$f(t) \rightarrow F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

Effectuons dans cette intégrale le changement de variable  $u = t + \tau$  :

$$F(p) = \int_{\tau}^{+\infty} f(u - \tau) e^{-p(u-\tau)} du$$

En remarquant que la fonction  $f(u - \tau)$  est nulle pour  $t < \tau$ , on peut, sans changer la valeur de l'intégrale, lui choisir une borne d'intégration inférieure plus faible que  $\tau$  :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(u - \tau) e^{-p(u-\tau)} du$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{p\tau} f(u - \tau) e^{-pu} du$$

$$F(p) = e^{p\tau} \int_0^{+\infty} f(u - \tau) e^{-pu} du$$

Par définition,  $\int_0^{+\infty} f(u - \tau) e^{-pu} du$  est la transformée de Laplace de  $f(t - \tau)$ .

d'où :

$$f(t - \tau) \rightarrow F(p) e^{-p\tau}$$

Cette relation constitue le théorème du retard qui permet de calculer la transformée de Laplace d'une fonction retardée d'un temps  $\tau$  si l'on connaît la transformée de Laplace de la fonction non retardée.

### f) Théorème de la valeur initiale

Considérons la transformée de Laplace  $F(p)$  d'une fonction  $f(t)$  :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

La transformée de Laplace de la dérivée de  $f(t)$  est :

$$\frac{df}{dt} \rightarrow \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(0)$$

Lorsque  $p \rightarrow +\infty$ , on a  $e^{-pt} \rightarrow 0$ , donc :  $pF(p) - f(0) \rightarrow 0$

Nous retiendrons :

$$f(0^+) = \lim_{p \rightarrow +\infty} [pF(p)]$$

Ceci constitue le théorème de la valeur initiale qui permet d'obtenir une expression de la valeur de  $f$  au voisinage de 0 par valeur supérieure en fonction de sa transformée de Laplace.

### g) Théorème de la valeur finale

Encore plus utile que le théorème précédent, le théorème de la valeur finale permet de calculer la limite quand  $t$  tend vers l'infini d'une fonction temporelle  $f(t)$  en connaissant uniquement sa transformée de Laplace :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [f(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} [pF(p)]$$

### h) Propriétés diverses

Sans être fondamentales, les trois propriétés suivantes peuvent s'avérer utiles lors du calcul de certaines transformées de Laplace :

$$e^{-at} f(t) \rightarrow F(p + a)$$

$$tf(t) \rightarrow -\frac{dF}{dp}$$

$$\frac{f(t)}{t} \rightarrow \int_0^{+\infty} F(p) dp$$

## 1.4.3 Transformée de Laplace inverse

De même qu'une fonction du temps peut avoir une transformée de Laplace, il est possible à partir d'une fonction  $F(p)$  de retrouver son original, autrement dit la fonction  $f(t)$  dont elle est la transformée de Laplace. Il s'agit ici de calculer une intégrale dans le plan complexe :

Si :

$$f(t) \rightarrow F(p)$$

alors :

$$f(t) = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp$$

L'intégration se fait entre deux bornes complexes dont la partie réelle est une constante  $c$  supérieure au seuil de convergence  $\alpha$  de  $F(p)$ .

**Remarque :** Les cas où il faudra effectivement calculer une transformée de Laplace inverse à l'aide de cette expression sont extrêmement rares : nous verrons plus loin, qu'en général, il suffit de connaître une dizaine de transformées de Laplace usuelles et quelques propriétés fondamentales pour retrouver l'original d'une fonction  $F(p)$ .

## 1.5 TRANSFORMÉES DE LAPLACE DE QUELQUES SIGNAUX USUELS

### 1.5.1 Échelon unité

L'échelon unité (figure 1.4) est la fonction  $u(t)$  telle que  $u(t) = 0$  pour  $t < 0$  et  $u(t) = 1$  pour  $t \geq 0$ .

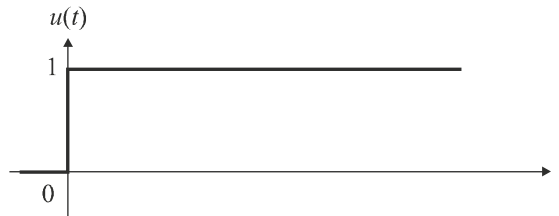


Figure 1.4 Échelon unité.

On a alors :

$$u(t) \rightarrow U(p) = \frac{1}{p}$$

Compte tenu de la linéarité de la transformée de Laplace, tout échelon (non unitaire), d'amplitude  $A$ , aura pour transformée de Laplace :

$$f(t) = Au(t) \rightarrow F(p) = \frac{A}{p}$$

### 1.5.2 Rampe ou échelon de vitesse

Il s'agit en réalité de l'intégrale de la fonction  $u(t)$  précédente. On la note en général  $v(t)$ . Elle est nulle pour  $t$  négatif et est égale à  $t$  pour  $t$  positif ou nul (figure 1.5).

On peut écrire :

$$v(t) = t \cdot u(t)$$

On a évidemment :

$$V(p) = \frac{U(p)}{p} = \frac{1}{p^2}$$

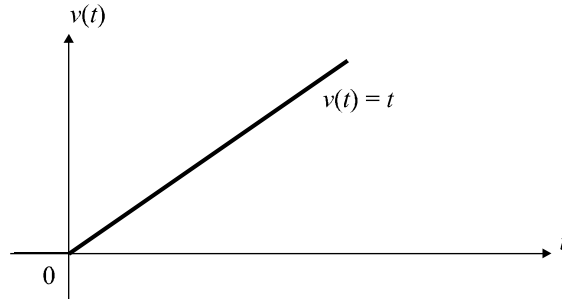


Figure 1.5 Rampe.

Compte tenu de la linéarité de la transformée de Laplace, toute rampe de type  $s(t) = kt$  (pour  $t$  positif) aura pour transformée de Laplace :

$$s(t) = kt \rightarrow S(p) = \frac{k}{p^2}$$

### 1.5.3 Impulsion unitaire

En dérivant cette fois la fonction  $u(t)$ , on obtient une fonction habituellement notée  $\delta(t)$  et appelée impulsion unitaire ou impulsion de Dirac.

Il s'agit en théorie d'une fonction nulle pour tout  $t$  sauf pour  $t = 0$  où elle a une valeur infinie. L'aire comprise entre la courbe représentative de cette fonction  $\delta(t)$  et l'axe des  $t$  vaut 1. Le schéma de la figure 1.6 donne une idée de cette impulsion en faisant tendre le paramètre  $\theta$  vers 0.



Figure 1.6 Modèle de l'impulsion de Dirac.

On a alors :

$$\delta(t) \rightarrow \Delta(p) = 1$$

### 1.5.4 Signal sinusoïdal

On considère un signal  $s(t)$  nul pour  $t < 0$  et valant  $s(t) = \sin(\omega t + \varphi)$  pour  $t \geq 0$ .

On a alors :

$$S(p) = \frac{p \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{p^2 + \omega^2}$$

On retiendra essentiellement les deux résultats suivants :

pour  $s(t) = \sin \omega t$ ,

$$S(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$



et pour  $s(t) = \cos \omega t$ ,

$$S(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

### 1.5.5 Signaux quelconques

Face à un signal quelconque, on peut certes entreprendre le calcul direct de la transformée de Laplace. Ce calcul peut parfois être relativement délicat. On peut aussi se référer à une table de transformées de Laplace telle que celle fournie en annexe A.

Les tables ne contiennent peut-être pas directement la fonction qui nous intéresse, mais les propriétés fondamentales et la linéarité de la transformation permettent la plupart du temps de se ramener à des compositions simples.

Ceci est notamment très utile lorsque l'on cherche l'original d'une fonction  $F(p)$  et que celle-ci se présente sous la forme d'une fraction rationnelle. Il faudra alors penser à la décomposer en éléments simples qui seront facilement identifiables dans la table.

On peut également utiliser un logiciel de calcul formel pour obtenir directement le résultat. Ainsi, avec Mathematica, on écrit simplement :

$$\text{LaplaceTransform} [t \times e^{-4t}, t, p]$$

et on obtient alors immédiatement l'expression  $\frac{1}{(4+p)^2}$ , transformée de Laplace de la fonction  $te^{-4t}$ .

## 1.6 FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME

### 1.6.1 Définition

Considérons un système linéaire quelconque possédant une entrée  $e(t)$  et une sortie  $s(t)$ .

On suppose qu'il est régi par une équation différentielle de degré  $n$  :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e(t)$$

Si nous appliquons la transformation de Laplace aux deux membres de cette équation, tout en supposant nulles les différentes conditions initiales (voir §1.4.2 b), il vient :

$$a_n p^n S(p) + \dots + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + \dots + b_1 p E(p) + b_0 E(p)$$

soit :

$$[a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0] S(p) = [b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0] E(p)$$

d'où :

$$\frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{S(p)}{E(p)}$$

Cette fraction rationnelle de deux polynômes de la variable complexe  $p$  est appelée fonction de transfert du système et communément notée :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

Comme cette fonction est une fraction rationnelle de deux polynômes en  $p$ , il est possible de factoriser ces deux polynômes dans le corps des complexes. On obtient :

$$G(p) = \frac{b_m (p - z_m)(p - z_{m-1}) \dots (p - z_1)}{a_n (p - p_n)(p - p_{n-1}) \dots (p - p_1)}$$

Les racines  $z_i$  qui annulent le numérateur sont appelés les zéros de la fonction de transfert. Les racines  $p_i$  qui annulent son dénominateur sont les pôles de la fonction de transfert. Ces paramètres peuvent être complexes ou réels. Nous verrons plus loin que l'étude, le signe ou l'appartenance à l'ensemble des réels de ces pôles ou zéros, jouent des rôles très importants dans l'étude des systèmes.

## 1.6.2 Mise en cascade de deux systèmes

Sur le schéma de la figure 1.7, nous avons placé deux systèmes en cascade, respectivement de fonction de transfert  $G_1(p)$  et  $G_2(p)$ .

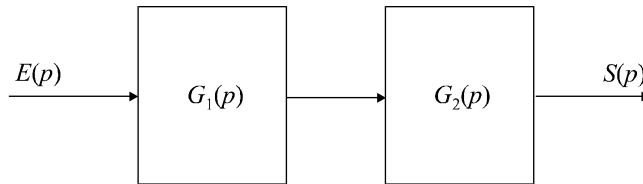


Figure 1.7 Mise en cascade de deux systèmes.

À la condition expresse que la mise en cascade ne perturbe pas le fonctionnement du système situé en amont, la fonction de transfert globale du système composé des deux éléments a pour expression :

$$G(p) = G_1(p)G_2(p)$$

Il convient donc d'être particulièrement vigilant avant d'utiliser cette propriété, notamment pour les systèmes électriques qui, en règle général, sont affectés par la présence d'une charge à leur sortie.

## 1.6.3 Original d'une fonction de transfert

Bien qu'une fonction de transfert  $G(p)$  ne soit pas, à proprement parler, la transformée de Laplace d'un signal, on peut calculer sa transformée inverse  $g(t)$  que l'on appelle l'original de la fonction de transfert.

Le principal intérêt de ce concept réside dans le fait que si on injecte une impulsion de Dirac dans un système de fonction de transfert  $G(p)$ , le signal de sortie  $s(t)$  sera égal à  $g(t)$ .

En effet, si  $E(p) = 1$ , on a :

$$S(p) = G(p)$$

La réponse impulsionnelle d'un système est donc l'original de sa fonction de transfert. Cette propriété (bien que dans la réalité il soit impossible de construire une impulsion de Dirac parfaite), joue un rôle important dans l'identification des systèmes.

# 1.7 RÉOLUTION D'UN PROBLÈME À L'AIDE DE LA FONCTION DE TRANSFERT

## 1.7.1 Principe

La première utilisation intéressante du modèle Laplacien réside dans la résolution systématique de problèmes physiques dans lesquels on possède un système linéaire quelconque régi par une équation différentielle clairement identifiée. On injecte à l'entrée de ce système un signal donné et on souhaite déterminer quel est le signal de sortie.

La connaissance de la fonction de transfert du système (qui s'écrit immédiatement à partir de l'équation différentielle) fournit évidemment la relation entre  $S(p)$  et  $E(p)$  c'est-à-dire entre les transformées de Laplace respectives de la sortie et de l'entrée du système :

$$S(p) = G(p)E(p)$$

Il suffit donc de calculer ou de déterminer à partir des tables, la transformée de Laplace de  $e(t)$ , puis d'effectuer le calcul de  $S(p)$  puis, enfin, toujours à partir des tables, de déterminer l'original de  $S(p)$ .

**Remarque :** Un rapide coup d'œil sur la table de transformées de Laplace fournie en annexe A nous montre que la plupart des transformées des signaux usuels se présentent sous la forme d'une fraction rationnelle simple de polynômes de la variable  $p$ . La fonction de transfert se présentant toujours sous la forme d'une fraction rationnelle, il est clair qu'il en sera de même pour la transformée de Laplace du signal de sortie, qui ne sera rien d'autre que le produit de deux fractions rationnelles. En décomposant la fraction rationnelle  $S(p)$  en éléments simples que l'on retrouvera facilement dans la table et en utilisant la propriété de linéarité de la transformation, on calculera aisément l'expression de la sortie  $s(t)$ .

## 1.7.2 Exemples

a) *Système du second ordre excité par un échelon unitaire*

Considérons un système régi par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 4\frac{ds}{dt} + 3s(t) = 2e(t)$$

On injecte dans ce système un signal d'entrée  $e(t)$  correspondant à un échelon. Soit  $e(t) = u(t)$ . On cherche à identifier l'expression du signal de sortie  $s(t)$ .

Le calcul de la fonction de transfert ne pose aucun problème ; on applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle :

$$p^2S(p) + 4pS(p) + 3S(p) = 2E(p)$$

$$S(p) [p^2 + 4p + 3] = 2E(p)$$

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2}{p^2 + 4p + 3}$$

**Remarque :** Avec un peu d'habitude, l'écriture de la fonction de transfert deviendra immédiate et ne nécessitera plus l'application stricte de la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle. En effet, les coefficients de l'équation différentielle se retrouvent dans le même ordre dans les deux polynômes de la fraction rationnelle  $G(p)$ .

Nous savons par ailleurs que  $E(p) = \frac{1}{p}$  (échelon unitaire).

On en déduit donc :

$$S(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4p + 3)}$$

► Résolution classique manuelle

En remarquant que  $S(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4p + 3)} = \frac{2}{p(p+3)(p+1)}$ , on peut envisager la décomposition de  $S(p)$  en éléments simples :

$$S(p) = \frac{2}{p(p+3)(p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{p+1}$$

$$S(p) = \frac{A(p+3)(p+1) + Bp(p+1) + Cp(p+3)}{p(p+3)(p+1)}$$

$$S(p) = \frac{(A+B+C)p^2 + (4A+B+3C)p + 3A}{p(p+3)(p+1)}$$

Identifications :

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 4A + B + 3C = 0 \\ 3A = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ B = \frac{1}{3} \\ C = -1 \end{cases}$$

d'où :

$$S(p) = \frac{2}{3p} + \frac{1}{3(p+3)} - \frac{1}{p+1} = S_1(p) + S_2(p) + S_3(p)$$

Compte tenu de la linéarité de la transformation de Laplace, on aura évidemment :  $s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t)$ , chaque  $s_i(t)$  étant l'original de  $S_i(p)$ .

La table de transformées de Laplace nous donne, sans calcul :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3p} &\rightarrow \frac{2}{3}u(t) \\ \frac{1}{3(p+3)} &\rightarrow \frac{1}{3}e^{-3t}u(t) \\ -\frac{1}{p+1} &\rightarrow -e^{-t}u(t) \end{aligned}$$

Au final :

$$s(t) = \left[ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-3t} - e^{-t} \right] \cdot u(t)$$

► Résolution avec Mathematica

Avec un logiciel de calcul formel, la détermination de  $s(t)$  est immédiate. Avec Mathematica, par exemple, on écrira la commande :

```
InverseLaplaceTransform [2/(p(p^2 + 4p + 3))]
```

qui nous affiche immédiatement le résultat :  $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-3t} - e^{-t}$

**Remarque :** Les expressions temporelles fournies par les tables ne sont valables que pour  $t > 0$  ; ces fonctions sont nulles pour  $t < 0$ . La présence de  $u(t)$  dans ces expressions suffit à nous le rappeler. Parfois, par abus d'écriture, on peut omettre  $u(t)$  à condition de ne pas perdre de vue que l'expression n'est valable que pour  $t > 0$  et que toutes les fonctions que nous utilisons sont nulles pour  $t < 0$ . Il faut noter que le logiciel Mathematica ne mentionne pas la présence de  $u(t)$ .

b) Étude de la réponse d'un circuit RC à une entrée en rampe

Considérons le circuit RC présenté sur la figure 1.8. Le signal d'entrée injecté est  $e(t) = 3t$  et la sortie correspond à  $s(t)$  dont on cherche l'expression.

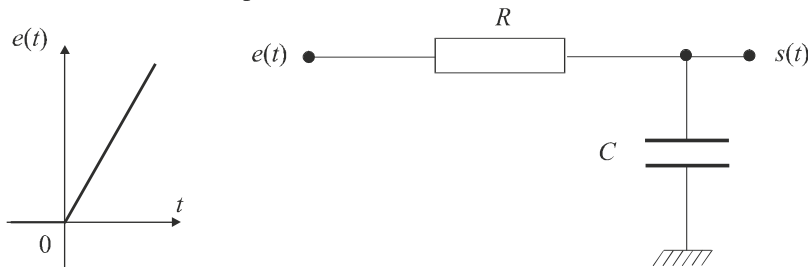


Figure 1.8 Circuit RC.

Considérons le courant  $i(t)$  qui circule à la fois dans  $R$  et dans le condensateur  $C$ .

Les équations électriques du système sont :

$$\begin{cases} e(t) - s(t) = Ri(t) \\ i(t) = C \frac{ds}{dt} \end{cases}$$

En combinant ces deux équations, on obtient :

$$RC \frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$$

Nous sommes donc en présence d'un système du premier ordre dont la fonction de transfert s'obtient immédiatement :

$$G(p) = \frac{1}{RCp + 1}$$

Par ailleurs,  $e(t) = 3t \Rightarrow E(p) = \frac{3}{p^2}$

d'où :  $S(p) = \frac{3}{p^2(RCp + 1)}$

D'après la table de transformées de Laplace, on a :

$$S(p) = \frac{1}{p^2(1 + \tau p)} \rightarrow s(t) = \tau \left( e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{t}{\tau} - 1 \right) u(t)$$

d'où on tire immédiatement :

$$S(p) = \frac{3}{p^2(1 + RCp)} \Rightarrow s(t) = 3RC \left( e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{t}{RC} - 1 \right) u(t)$$

## EXERCICES

### 1.1 Calcul direct de la transformée de Laplace d'un signal sinusoïdal

On considère la fonction  $s(t)$  définie par :

$$s(t) = 0 \text{ pour } t < 0,$$

$$s(t) = \sin \omega t \text{ pour } t \geq 0.$$

Déterminer l'expression de  $S(p)$  en utilisant directement la définition de la transformation de Laplace.

### 1.2 Calcul de la transformée de Laplace d'une impulsion réelle

On considère une impulsion  $s(t)$  de largeur  $T$  et de hauteur  $A$  (figure 1.9).

$$s(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \text{ et pour } t > T,$$

$$s(t) = A \text{ pour } 0 < t < T.$$

Calculer l'expression  $S(p)$  de la transformée de Laplace de ce signal.

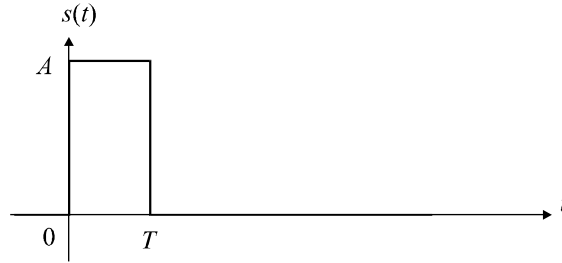


Figure 1.9 Impulsion réelle.

### 1.3 Calcul de la transformée de Laplace d'une rampe saturée

Calculer la transformée de Laplace de la fonction  $s(t)$  définie par :

$$s(t) = 0 \text{ pour } t < 0,$$

$$s(t) = At/T \text{ pour } 0 < t < T,$$

$$s(t) = A \text{ pour } t > T.$$

### 1.4 Calcul de la transformée de Laplace d'un signal quelconque

Calculer la transformée de Laplace de la fonction définie par :  $f(t) = \cos^2 \omega t$  pour  $t > 0$  et  $f(t) = 0$  partout ailleurs.

### 1.5 Calcul d'une transformée de Laplace inverse

Calculer la transformée de Laplace inverse de l'expression  $F(p) = \frac{3}{p^3 + 5p^2 + 6p}$ .

### 1.6 Calcul d'une fonction de transfert simple

On considère un système régi par l'équation différentielle :

$$\frac{d^3 s}{dt^3} + 3 \frac{d^2 s}{dt^2} + 3 \frac{ds}{dt} + s(t) = 2 \frac{de}{dt} + e(t)$$

Calculer la fonction de transfert de ce système et calculer ses pôles et ses zéros.

### 1.7 Étude de la réponse d'un système du premier ordre à un échelon

On considère un système régi par l'équation différentielle :

$$T \frac{ds}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

Calculer la fonction de transfert de ce système. En déduire  $S(p)$  si le signal d'entrée est un échelon unité.

Déterminer la valeur finale de  $s(t)$  en utilisant le théorème de la valeur finale.

Calculer l'expression de  $s(t)$  et retrouver le résultat précédent.

Pour quelle valeur  $t_0$  de  $t$ ,  $s(t)$  atteint-il 95 % de sa valeur finale ?

### 1.8 Calcul de la réponse d'un système du second ordre à une rampe

On considère un système régi par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 3\frac{ds}{dt} + 2s(t) = e(t)$$

Calculer la réponse de ce système à une entrée en rampe  $e(t) = t$ .

### 1.9 Mise en équation d'un système électrique du second ordre

On considère le montage électrique représenté sur la figure 1.10. On injecte dans ce système un signal d'entrée  $e(t)$  correspondant à un échelon de tension de 0 à 5 V.

Déterminer l'équation différentielle qui lie  $e(t)$  à la tension de sortie  $s(t)$ .

En déduire la fonction de transfert du système.

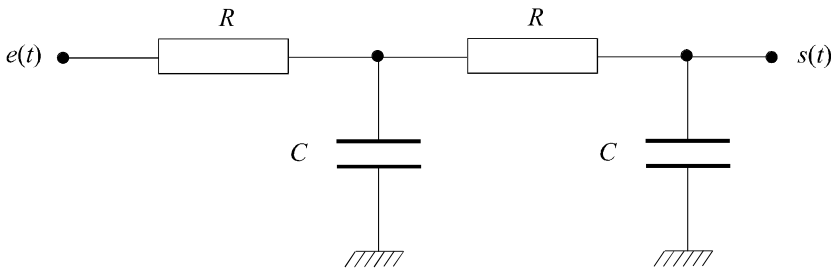


Figure 1.10 Circuit électrique du second ordre.

## SOLUTIONS

1.1 Décomposons la fonction sinus en une combinaison d'exponentielles complexes :

$$s(t) = \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

Appliquons la définition de la transformée de Laplace :

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \sin \omega t e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} e^{-pt} dt$$

$$S(p) = \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} e^{j\omega t} e^{-pt} dt - \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} e^{-pt} dt$$

$$S(p) = \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} e^{-(p-j\omega)t} dt - \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} e^{-(p+j\omega)t} dt$$

$$S(p) = \frac{1}{2j} \left[ \frac{e^{-(p-j\omega)t}}{-(p-j\omega)} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2j} \left[ \frac{e^{-(p+j\omega)t}}{-(p+j\omega)} \right]_0^{+\infty}$$

Si la partie réelle de  $p$  est positive (ce qui corrobore l'existence d'un seuil de convergence), on a :

$$S(p) = \frac{1}{2j} \left[ 0 - \frac{1}{-(p-j\omega)} \right] - \frac{1}{2j} \left[ 0 - \frac{1}{-(p+j\omega)} \right]$$

$$S(p) = \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{(p-j\omega)} - \frac{1}{(p+j\omega)} \right]$$

$$S(p) = \frac{1}{2j} \left[ \frac{(p+j\omega) - (p-j\omega)}{(p-j\omega)(p+j\omega)} \right]$$

$$S(p) = \frac{1}{2j} \left[ \frac{2j\omega}{p^2 + \omega^2} \right] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

Ce qui correspond bien au résultat recherché.

**1.2** Nous pouvons remarquer (figure 1.11) que ce signal est la différence de deux signaux :  $s(t) = s_1(t) - s_2(t)$ , avec  $s_1(t)$  : échelon de hauteur  $A$  débutant à l'instant 0, et  $s_2(t)$  : échelon de hauteur  $A$  débutant à l'instant  $T$ .

Nous aurons donc (linéarité de la transformée de Laplace) :  $S(p) = S_1(p) - S_2(p)$

avec :

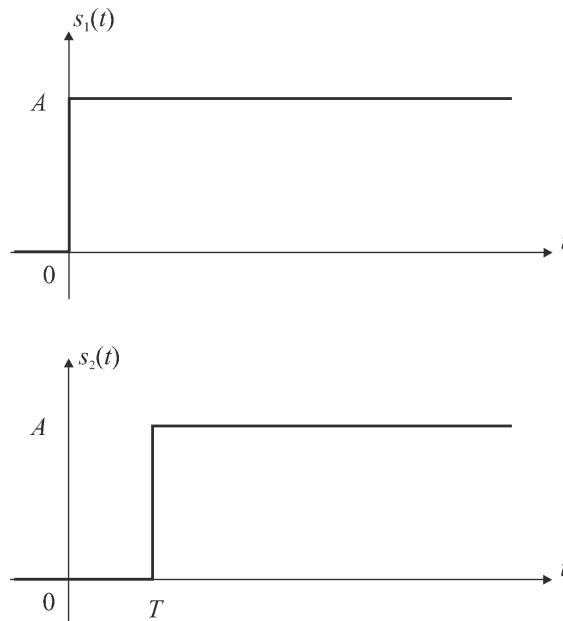
$$S_1(p) = \frac{A}{p}$$

et :

$$S_2(p) = \frac{A}{p} e^{-pT} \text{ (théorème du retard)}$$

d'où :

$$S(p) = \frac{A}{p} [1 - e^{-pT}]$$



**Figure 1.11** Décomposition du signal.

**1.3** Traçons, pour commencer, le signal  $s(t)$  (figure 1.12). Nous pouvons remarquer que ce signal est l'intégrale d'un signal  $x(t)$  que l'on peut représenter sur la figure 1.13.

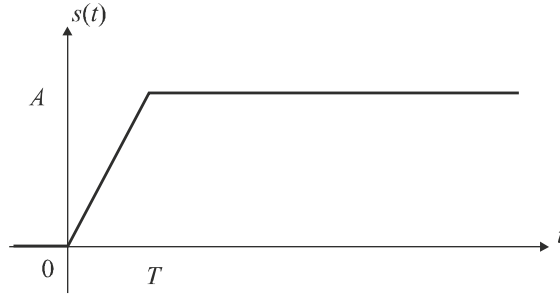


Or, nous connaissons l'expression de la transformée de Laplace de ce signal  $x(t)$  à ceci près qu'il s'agit ici d'une impulsion de hauteur  $A/T$  (exercice 1.2) :

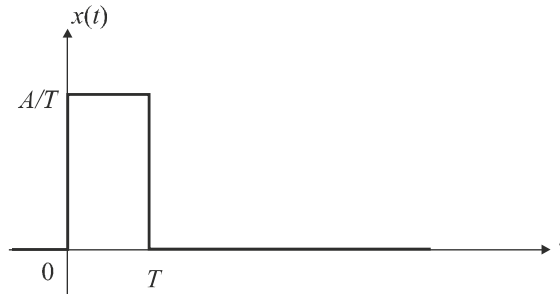
$$X(p) = \frac{A}{Tp} [1 - e^{-pT}]$$

Comme  $s(t)$  est une primitive de  $x(t)$ , on a :

$$S(p) = \frac{X(p)}{p} = \frac{A}{Tp^2} [1 - e^{-pT}]$$



**Figure 1.12** Représentation du signal étudié.



**Figure 1.13** Signal dérivé.

**1.4** Linéarisons l'expression de la fonction  $f(t) = \cos^2 \omega t$  afin de pouvoir l'exprimer sous la forme d'une combinaison de fonctions simples que nous pourrions aisément repérer dans la table :

$$f(t) = \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} (\cos 2\omega t + 1) \quad \text{pour } t > 0.$$

La fonction  $f(t)$  se décompose donc en une somme de deux signaux :

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

avec  $f_1(t) = \frac{\cos 2\omega t}{2}$  pour  $t > 0$ ,

et  $f_2(t) = \frac{1}{2}$  pour  $t > 0$ , autrement dit :  $f_2(t) = \frac{u(t)}{2}$ ,  $u(t)$  étant l'échelon unitaire.

On a donc :

$$F(p) = F_1(p) + F_2(p)$$

On a de toute évidence :

$$F_2(p) = \frac{1}{2p}$$

Par ailleurs, à la lecture de la table, la fonction temporelle  $\cos \omega t$  possède pour transformée de Laplace  $\frac{P}{p^2 + \omega^2}$ .

On a donc :

$$F_2(p) = \frac{P}{2(p^2 + 4\omega^2)}$$

En conclusion :

$$F(p) = F_1(p) + F_2(p) = \frac{1}{2p} + \frac{P}{2(p^2 + 4\omega^2)}$$

**1.5** Factorisons tout d'abord le dénominateur de l'expression de  $F(p)$  :

$$F(p) = \frac{3}{p^3 + 5p^2 + 6p} = \frac{3}{p(p+3)(p+2)}$$

La décomposition de cette fraction rationnelle nous donne :

$$F(p) = \frac{3}{p(p+3)(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{p+2} = \frac{A(p^2 + 5p + 6) + B(p^2 + 2p) + C(p^2 + 3p)}{p(p+3)(p+2)}$$

Soit :

$$F(p) = \frac{3}{p(p+3)(p+2)} = \frac{(A+B+C)p^2 + (5A+2B+3C)p + 6A}{p(p+3)(p+2)}$$

En identifiant, on tire immédiatement :

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+2B+3C=0 \\ A=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=1 \\ C=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

d'où :

$$F(p) = \frac{1}{2p} + \frac{1}{p+3} - \frac{3}{2(p+2)}$$

Il suffit à présent de rechercher dans la table des transformées de Laplace les fonctions temporelles originales des trois termes simples qui constituent cette combinaison et d'écrire  $f(t)$  comme étant la même combinaison des trois fonctions temporelles originales :

$$f(t) = \left[ \frac{1}{2} + e^{-3t} - \frac{3}{2} e^{-2t} \right] u(t)$$

► Résolution avec Mathematica

La commande : `InverseLaplaceTransform[3/(p(p+3)(p+2)), p, t]` nous donne immédiatement :

$$\frac{1}{2} + e^{-3t} - \frac{3e^{-2t}}{2}$$

**1.6** Appliquons la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation :

$$p^3 S(p) + 3p^2 S(p) + 3p S(p) + S(p) = 2pE(p) + E(p)$$

$$D'où : S(p) [p^3 + 3p^2 + 3p + 1] = [2p + 1] E(p)$$

$$Soit : G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2p + 1}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1}$$

Nous remarquons que le dénominateur se factorise (identité remarquable).

$$D'où : G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2p + 1}{(p + 1)^3}$$

La fonction de transfert possède donc un seul zéro  $\left(-\frac{1}{2}\right)$  et un pôle triple  $(-1)$ .

**1.7** La fonction de transfert du système se détermine aisément en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation :

$$TpS(p) + S(p) = KE(p)$$

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{Tp + 1}$$

Nous en déduisons immédiatement l'expression de  $S(p)$  :

$$E(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow S(p) = \frac{K}{Tp + 1} \cdot \frac{1}{p} = \frac{K}{p(Tp + 1)}$$

Le théorème de la valeur finale prévoit que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pK}{p(Tp + 1)} = K$$

Calculons l'expression de  $s(t)$  afin de retrouver le résultat précédent. D'après la table :

$$S(p) = \frac{K}{p(Tp + 1)} \Rightarrow s(t) = K \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

On a bien  $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = K$ .

L'expression du signal de sortie nous conduit alors à la valeur  $t_0$  de  $t$ , pour laquelle  $s(t)$  atteint 95 % de sa valeur finale.

On a :

$$K \left( 1 - e^{-\frac{t_0}{T}} \right) = 0,95K$$

Soit :

$$1 - e^{-\frac{t_0}{T}} = 0,95$$

$$\frac{t_0}{T} = -\ln 0,05 \approx 3T$$

**1.8** La fonction de transfert du système se détermine en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{p^2 + 3p + 2} = \frac{1}{(p + 1)(p + 2)}$$

Par ailleurs, l'entrée de ce système est une rampe  $e(t) = t$ . D'où :  $E(p) = \frac{1}{p^2}$

On tire donc immédiatement :

$$S(p) = G(p)E(p) = \frac{1}{p^2(p + 1)(p + 2)}$$

► Résolution avec Mathematica

La plupart des logiciels de calcul formel disposent de la fonctionnalité de transformation inverse de Laplace.

La commande : `InverseLaplaceTransform[1/(p^2(p + 1)(p + 2)), p, t]` nous donne immédiatement :

$$s(t) = \left[ -\frac{3}{4} + \frac{t}{2} + e^{-t} - \frac{e^{-2t}}{4} \right] u(t)$$

1.9 Appelons A le point commun aux deux résistances et  $v_A(t)$  la tension en ce point. Nommons les courants dans les différentes branches du circuit (figure 1.14) et appliquons la loi des nœuds au point A :

$$\frac{e - v_A}{R} = C \frac{dv_A}{dt} + \frac{v_A - s}{R}$$

Par ailleurs, le courant  $i_1(t)$  circulant dans le second condensateur, on peut écrire :

$$C \frac{ds}{dt} = \frac{v_A - s}{R}$$

Tirons de cette équation l'expression de la tension  $v_A(t)$  et remplaçons celle-ci dans la première équation :

$$v_A = RC \frac{ds}{dt} + s(t)$$

$$e - RC \frac{ds}{dt} - s(t) = R^2 C^2 \frac{d^2s}{dt^2} + 2RC \frac{ds}{dt}$$

On obtient ainsi l'équation différentielle qui lie  $s(t)$  à  $e(t)$  :

$$R^2 C^2 \frac{d^2s}{dt^2} + 3RC \frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$$

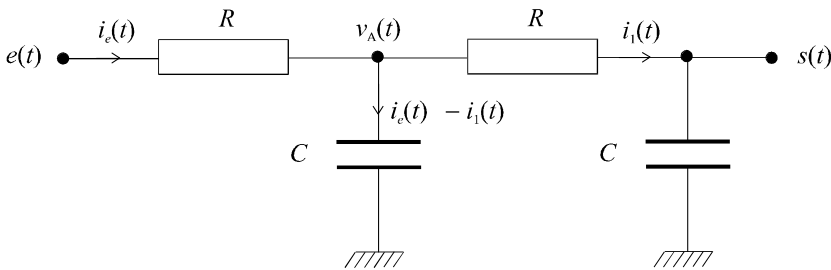


Figure 1.14 Étude du circuit électrique.

La fonction de transfert est donc :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{R^2 C^2 p^2 + 3RCp + 1}$$

## Chapitre 2

# Modélisation fréquentielle des signaux temporels

## Notion de spectre

### 2.1 DESCRIPTION DES SIGNAUX

Modéliser un phénomène physique, c'est disposer d'outils permettant de le représenter et de le décrire. D'une manière générale, les signaux, tout comme les grandeurs physiques qu'ils représentent sont décrits par des lois temporelles. Quoi de plus naturel, en effet, de décrire l'évolution d'une température, d'une tension, d'une position ou d'une vitesse en fonction du temps.

Nous allons aborder, au cours de ce chapitre, un autre mode de description des signaux (donc des grandeurs qu'ils représentent), qui ne fait pas appel à sa représentation temporelle, mais qui propose un autre mode de perception des phénomènes : il s'agit de leur représentation fréquentielle.

#### 2.1.1 L'exemple du signal sinusoïdal

En écrivant  $s(t) = A \cos \omega t$ , on détermine entièrement, pour tout instant, la valeur du signal  $s(t)$ . Un tel signal, dont on peut *a priori* prévoir la valeur à tout instant est dit déterministe (par opposition aux signaux aléatoires ou stochastiques). Toutefois, il existe un autre moyen de décrire complètement (ou presque) ce signal : en disant qu'il s'agit d'une sinusoïde d'amplitude  $A$  et de fréquence  $\omega/2\pi$ . À dire vrai, il manque l'information sur l'origine des temps car tous les signaux du type  $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$  sont des sinusoïdes d'amplitude  $A$  et de fréquence  $\omega/2\pi$  et sont pourtant différents dans leur expression temporelle ; en fait seule l'origine des temps  $y$  est différente. Si on considère que la définition d'une origine des temps est arbitraire et donc, sans réelle importance, on peut considérer qu'il y a autant d'information dans l'écriture d'une loi temporelle d'un signal sinusoïdal que dans l'écriture de ce signal sous la forme d'un couple amplitude-fréquence.

Par conséquent, nous pouvons conclure, pour les signaux sinusoïdaux, à une dualité de représentation temporelle-fréquentielle :

$$\begin{array}{lcl} s(t) = A \cos \omega t & \Leftrightarrow & \left[ A, \frac{\omega}{2\pi} \right] \\ \text{représentation temporelle} & \Leftrightarrow & \text{représentation fréquentielle} \end{array}$$

Les intérêts d'une telle représentation sont multiples. Imaginons par exemple la représentation graphique d'une sinusoïde : nous la connaissons bien dans sa représentation temporelle : figure 2.1. Dans sa représentation fréquentielle, autrement dit, si l'on décide de porter sur un axe d'abscisses, non plus la variable temps mais la fréquence du signal, nous obtenons un graphe des plus simples puisqu'il se résume à un seul point, qui suffit à dire que nous avons à faire à une sinusoïde d'amplitude  $A$  et de fréquence  $\omega/2\pi$  (figure 2.1).

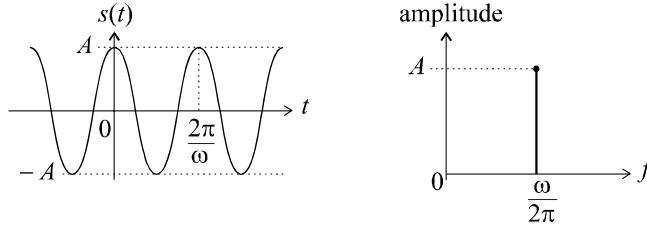


Figure 2.1 Représentation temporelle et représentation fréquentielle d'un signal sinusoïdal.

**Remarque :** Pour des raisons de commodité, nous tracerons une raie joignant le point correspondant au couple amplitude - fréquence à l'axe des fréquences afin de mieux matérialiser la représentation.

### 2.1.2 Représentation d'un signal composé

Considérons à présent le signal  $s(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$  composé de la somme de deux sinusoïdes. Dans sa représentation fréquentielle, nous choisissons de représenter ce signal en portant uniquement, dans le graphe amplitude - fréquence, les deux points (ou plutôt les deux raies) de chacune des deux sinusoïdes (figure 2.2). Par convention, le signal représenté est composé de la somme des deux signaux élémentaires ainsi tracés.

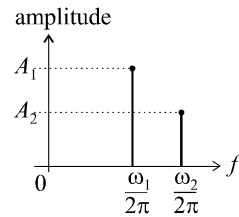


Figure 2.2 Représentation fréquentielle d'un signal composé.

**Remarque :** Il est clair qu'ici, nous perdons l'éventuelle information de déphasage à l'origine entre les deux sinusoïdes. Toutefois, les applications pour lesquelles nous avons besoin d'introduire cette nouvelle représentation fréquentielle sont telles qu'elles ne nécessiteront pas obligatoirement cette information. Par conséquent, sa perte ne doit pas susciter d'inquiétude.

### 2.1.3 Notion de spectre

Par analogie avec les spectres lumineux composés de raies de lumière, les mathématiciens et physiciens qui ont introduit la notion de représentation fréquentielle ont décidé de la nommer *spectre du signal*.

Le spectre d'un signal n'est donc rien d'autre que sa représentation fréquentielle, autrement dit la description de la manière dont il se décompose en signaux élémentaires (ici des sinusoïdes).

En règle générale, on préfère utiliser une décomposition en signaux élémentaires du type  $e^{j\omega t} = e^{j2\pi ft}$ . La notion usuelle de spectre de signaux renvoie à une telle décomposition. On dit parfois que le spectre est une décomposition du signal selon une base de fonctions élémentaires  $e^{j\omega t} = e^{j2\pi ft}$ .

Ainsi, le spectre du signal sinusoïdal  $s(t) = A \cos \omega t$  correspond au graphe de la figure 2.3, puisque  $s(t) = A \cos \omega t = A \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$ .

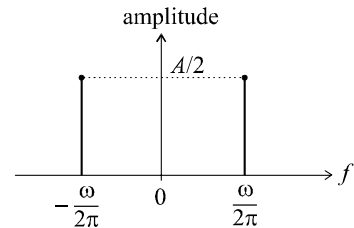


Figure 2.3 Spectre d'un signal sinusoïdal.

**Remarque :** Pourquoi avoir choisi une telle base de décomposition ? Pour une raison très simple : le mathématicien français Joseph Fourier a démontré que presque tous les signaux pouvaient se décomposer en une somme de signaux de ce type.

À partir de maintenant, nous n’envisagerons plus aucun spectre sans qu’il ne corresponde à une décomposition selon une base de fonctions élémentaires  $e^{j\omega t} = e^{j2\pi ft}$ .

## 2.2 CAS DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

### 2.2.1 Décomposition en série de Fourier

Joseph Fourier a démontré que tout signal périodique de période  $T$  (donc de fréquence  $f_0 = \frac{1}{T}$ , ou encore de pulsation  $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$ ) possédait une décomposition en une somme finie ou infinie de sinusoides dont les fréquences sont des multiples de la fréquence  $f_0$  (dite fondamentale) du signal.

On démontre en effet que si  $s(t)$  est périodique :

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \sin n\omega_0 t$$

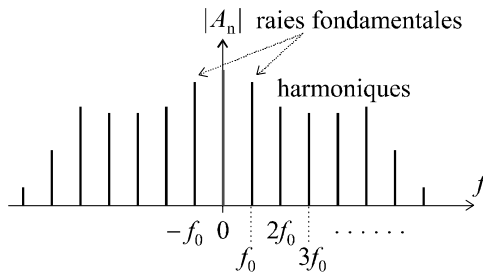
Cet énoncé de la décomposition en série de Fourier se traduit également dans la base de fonctions élémentaires  $e^{j\omega t} = e^{j2\pi ft}$  qui nous sert à présent de référence :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{jn\omega_0 t}$$

avec :

$$A_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

On trace alors le spectre d’un signal périodique quelconque en reportant, dans le graphe amplitude - fréquence, les modules des coefficients  $A_n$  qui sont, en général, complexes, en fonction des fréquences  $nf_0$  (figure 2.4). Les deux raies correspondant à  $n = 1$  ou  $n = -1$  sont appelées composantes ou raies fondamentales du signal. Les autres sont ses harmoniques.



**Figure 2.4** Spectre d’un signal périodique.

D’une manière générale, on a  $|A_n| = |A_{-n}|$  ce qui se traduit par la symétrie du spectre par rapport à l’axe des ordonnées.

**Remarque :** Si le signal périodique possède une composante continue, autrement dit une valeur moyenne non nulle, il s'agit évidemment de :

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

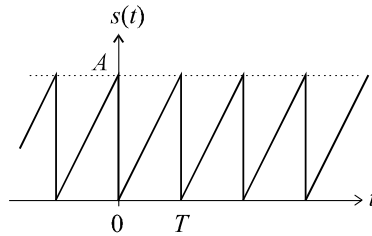
que l'on trace, sur le spectre, à la fréquence nulle (voir figure 2.4).

### 2.2.2 Exemple de calcul d'un spectre : signal en dents de scie

On considère un signal  $s(t)$  en dents de scie, de période  $T$  (figure 2.5).

Soit  $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$ .

Notre objectif est de tracer son spectre. Il nous faut donc calculer sa décomposition en série de Fourier, c'est-à-dire calculer la suite des  $A_n$ , puis tracer les  $|A_n|$  en fonction de la fréquence.



**Figure 2.5** Représentation temporelle d'un signal en dents de scie.

On a :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{avec} \quad A_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Soit :

$$A_n = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{At}{T} e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Intégrons cette expression par parties :

$$A_n = \frac{A}{T^2} \int_0^T t e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{A}{T^2} \int_0^T u dv = \frac{A}{T^2} [uv]_0^T - \frac{A}{T^2} \int_0^T v du$$

avec  $u = t$ , donc  $du = dt$

et  $dv = e^{-jn\omega_0 t} dt$  donc  $v = \frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}$ .

**Attention :**  $n \neq 0$ .

$$A_n = \frac{A}{T^2} \left[ \frac{t e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} \right]_0^T - \frac{A}{T^2} \int_0^T \frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} dt$$

$$A_n = \frac{A}{T^2} \left[ \frac{T e^{-jn\omega_0 T}}{-jn\omega_0} - 0 \right] - \frac{A}{T^2} \left[ \frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-n^2 \omega_0^2} \right]_0^T$$

$$A_n = \frac{A}{T^2} \left[ \frac{T e^{-jn\omega_0 T}}{-jn\omega_0} \right] - \frac{A}{T^2} \left[ \frac{e^{-jn\omega_0 T}}{-n^2 \omega_0^2} - \frac{1}{-n^2 \omega_0^2} \right]$$



Or  $\omega_0 T = 2\pi$ , d'où :

$$A_n = \frac{A}{T^2} \left[ \frac{T e^{-jn2\pi}}{-jn\omega_0} \right] - \frac{A}{T^2} \left[ \frac{e^{-jn2\pi}}{-n^2\omega_0^2} - \frac{1}{-n^2\omega_0^2} \right]$$

et  $e^{-jn2\pi} = 1$ , donc :

$$A_n = \frac{A}{T^2} \left[ \frac{T}{-jn\omega_0} \right] - \frac{A}{T^2} \left[ \frac{1}{-n^2\omega_0^2} - \frac{1}{-n^2\omega_0^2} \right] = \frac{A}{T^2} \left[ \frac{T}{-jn\omega_0} \right]$$

$$A_n = \frac{A}{-jn\omega_0 T} = j \frac{A}{2\pi n}$$

On a donc :  $A_n = j \frac{A}{2\pi n} \Rightarrow |A_n| = \frac{A}{2\pi n}$  pour  $n \neq 0$ .

La valeur moyenne se calcule ou se remarque de manière évidente sur le graphe de la figure 2.5 :  $A_0 = \frac{A}{2}$  et il suffit de porter l'ensemble des informations sur le graphe de la figure 2.6 pour disposer du spectre recherché.

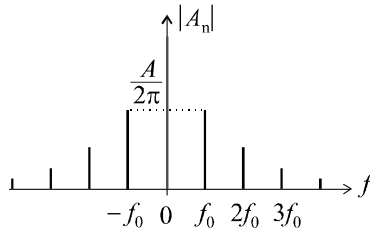


Figure 2.6 Spectre du signal en dents de scie.

### 2.2.3 Décomposition en série de Fourier à l'aide de Mathematica

Les outils de calcul formel disposent de fonctions spécifiquement adaptées au calcul des séries de Fourier. À titre d'exemple, nous retiendrons trois fonctions de Mathematica particulièrement intéressantes.

La fonction  $f(t)$  étant définie sur une période de durée  $2\pi$ , on accède à l'expression des coefficients  $C_n$  et  $S_n$  par les commandes `FourierCosCoefficient[f(t),t,n]` et `FourierSinCoefficient[f(t),t,n]`, respectivement. Ainsi, la décomposition en série de Fourier d'un signal en dents de scie défini par  $f(t) = t$  sur l'intervalle  $[-\pi ; \pi]$  est obtenue immédiatement en écrivant :

`FourierCosCoefficient [t,t,n]`

Résultat :  $\frac{2(-1 + (-1)^n)}{n^2\pi}$

`FourierSinCoefficient [t,t,n]`

Résultat :  $-\frac{2(-1)^n}{n}$

Par ailleurs, la commande `FourierSeries[f(t),t,n]` fournit l'expression complète de la série de Fourier, exprimée sous forme exponentielle à l'ordre  $n$ .

À titre d'exemple, la ligne suivante calcule la décomposition à l'ordre 5 de la fonction périodique définie par  $f(t) = t$  sur l'intervalle  $[-\pi; \pi]$

FourierSeries [t,t,n]

Résultat :

$$\frac{1}{2}ie^{-it} - \frac{1}{2}ie^{it} - \frac{1}{4}ie^{-2it} + \frac{1}{2}ie^{2it} + \frac{1}{6}ie^{-3it} - \frac{1}{6}ie^{3it} - \frac{1}{8}ie^{-4it} + \frac{1}{8}ie^{4it} + \frac{1}{10}ie^{-5it} - \frac{1}{10}ie^{5it}$$

## 2.3 CAS DES SIGNAUX NON PÉRIODIQUES À ÉNERGIE FINIE

### 2.3.1 Définition

Un signal non périodique à énergie finie est un signal non périodique quelconque tel que l'intégrale généralisée  $\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt$  converge vers une valeur finie. Les résultats qui suivent ne s'appliquent qu'à ce type de signaux. Dans la pratique, il s'agit de signaux transitoires, possédant un début et une fin, ou tout du moins décroissant suffisamment rapidement pour faire converger l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt$ .

### 2.3.2 Transformée de Fourier et spectre des signaux non périodiques à énergie finie

On définit la transformée de Fourier d'un signal non périodique à énergie finie par :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Il s'agit d'une fonction complexe de la variable réelle  $f$ . Pour des raisons de rapidité d'écriture, on note parfois :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \text{ avec } \omega = 2\pi f$$

La transformée de Fourier inverse a pour expression :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j\omega t} dt$$

Joseph Fourier a étudié les propriétés de cette transformation mathématique et a démontré qu'elle correspondait à la représentation fréquentielle d'un signal quelconque, non périodique, du moment qu'il est à énergie finie. Le spectre d'un tel signal est donné par la fonction  $|S(f)|$  et est continu, ce qui revient à dire (et cela rapproche cette notion du spectre discontinu pour les signaux périodiques) qu'un signal quelconque à énergie finie se décompose en une somme de sinusoides de toutes fréquences.

L'une des propriétés essentielles de la transformée de Fourier est :  $S(-f) = S^*(f)$  ( $S^*$  correspondant au conjugué de  $S$ ). Il en découle que  $|S(f)| = |S(-f)|$  et que le spectre d'un signal quelconque est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

**Remarque :** Pour un signal possédant un début  $t_1$  et une fin  $t_2$ , la transformée de Fourier se calcule évidemment en intégrant entre les deux instants, de début et de fin, du signal :

$$S(f) = \int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

### 2.3.3 Exemple de calcul du spectre d'un signal non périodique à énergie finie

Soit  $s(t)$  un signal nul pour  $t < 0$  et défini par  $s(t) = e^{-t}$  pour  $t \geq 0$  (figure 2.7).

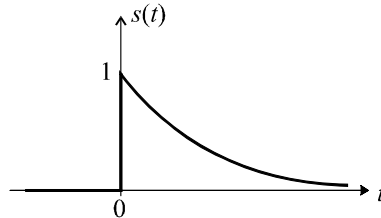


Figure 2.7 Représentation temporelle d'un signal.

Nous pouvons sans peine vérifier que le signal est à énergie finie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \left[ \frac{e^{-2t}}{-2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

La définition de la transformée de Fourier s'applique donc :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(j\omega+1)t} dt$$

$$S(f) = \left[ \frac{e^{-(j\omega+1)t}}{-(j\omega+1)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+j\omega} = \frac{1}{1+j2\pi f}$$

D'où :

$$|S(f)| = \left| \frac{1}{1+j2\pi f} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2 f^2}}$$

La figure 2.8 présente ce spectre.

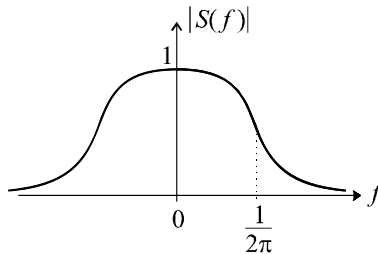


Figure 2.8 Spectre du signal.

### 2.3.4 Relation entre la transformée de Fourier et la transformée de Laplace

Pour un signal non périodique à énergie finie et nul pour  $t < 0$ , on a :

$$S(f) = \int_0^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

Un tel signal possède aussi une transformée de Laplace :

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s(t) e^{-pt} dt$$

Il apparaît que la transformée de Laplace et celle de Fourier possède un rapport évident : la transformée de Fourier peut être perçue comme le cas particulier  $p = j\omega$  de la transformée de Laplace. (NDLA : c'est un peu réducteur, historiquement faux et simplifié, mais c'est plus parlant.)

Il résulte de cette constatation, qu'il est aisé de calculer la transformée de Fourier d'un signal à énergie finie en remplaçant tout simplement  $p$  par  $j\omega$  dans sa transformée de Laplace. Pour le calcul de la transformée de Fourier de  $s(t) = e^{-t}$  (pour  $t \geq 0$ ), un rapide coup d'œil sur la table de transformées de Laplace nous aurait montré que  $S(p) = \frac{1}{p+1}$ .

L'expression  $S(f) = \frac{1}{j\omega + 1} = \frac{1}{j2\pi f + 1}$  est donc immédiatement trouvée.

**Remarque :** Pour cette raison, on note souvent la transformée de Fourier d'un signal, indifféremment  $S(f)$  ou  $S(j\omega)$ .

**Attention :** On ne peut faire  $p = j\omega$  et trouver la transformée de Fourier d'un signal à partir de sa transformée de Laplace que si le signal est à énergie finie.

Un certain nombre de propriétés de la transformée de Fourier se déduisent donc de celles de la transformée de Laplace. La transformation de Fourier est donc une opération linéaire et la transformée de Fourier de la dérivée ou d'une primitive d'un signal se calculent de la manière suivante :

$$s(t) \rightarrow S(j\omega) \Rightarrow \frac{ds}{dt} \rightarrow j\omega S(j\omega) \quad \text{et} \quad \int s(t) dt \rightarrow \frac{S(j\omega)}{j\omega}$$

### 2.3.5 Égalité de Parseval

L'énergie totale d'un signal  $s(t)$  à énergie finie est définie par :

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot s(t) dt$$

Remplaçons dans cette intégrale un terme  $s(t)$  par son expression en fonction de sa transformée de Fourier :

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ s(t) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j\omega t} df \right] dt$$

Les deux intégrations étant indépendantes, on peut permuter leur ordre :

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ S(f) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{j\omega t} dt \right] df$$

On reconnaît alors, dans l'intégrale située entre les crochets, l'expression de la transformée de Fourier de  $s(t)$ , au signe près dans l'exponentiel. Cette intégrale n'est donc rien d'autre que  $S(-f)$  :

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} [S(f) \cdot S(-f)] df$$

d'où :

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df$$

On a donc :

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df$$

Ce résultat, connu sous le nom d'égalité de Parseval, nous montre la dualité entre la représentation temporelle et la représentation spectrale. L'énergie totale d'un signal peut se déterminer quelle que soit la représentation choisie, avec la même expression : on intègre soit le carré de l'expression temporelle du signal, soit le carré de son spectre.

### 2.3.6 Calcul d'une transformée de Fourier à l'aide de Mathematica

Le logiciel Mathematica peut calculer immédiatement la transformée de Fourier d'un signal quelconque. La commande utilisée est : `FourierTransform[f(t),t, ω]`. Toutefois, Mathematica peut utiliser différentes définitions de la transformée de Fourier et à cet effet, doit être paramétré. Sans rentrer dans les détails, nous utiliserons une forme paramétrée de la commande `FourierTransform` qui correspond exactement à la définition mathématique que nous utilisons. En reprenant l'exemple du paragraphe 2.3.3, on écrira :

$$\text{FourierTransform}[\text{UnitStep}[t] \times e^{-t}, t, \omega, \text{FourierParameters} \rightarrow \{1, -1\}]$$

Le résultat obtenu est :  $-\frac{j}{-j + \omega}$ .

## EXERCICES

### 2.1 Décomposition en série de Fourier d'un signal à symétries paire et impaire

Soit un signal périodique  $s(t)$  (période  $T$ ) et sa décomposition en série de Fourier :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{jn\omega t} \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Montrer que si  $s(t)$  est pair, on a :  $A_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cos n\omega t dt$

Montrer que si, de surcroît,  $s(t)$  possède un centre de symétrie pour  $t = \frac{T}{4} + k\frac{T}{2}$ , on a alors :  $A_n = 0$  pour  $n$  pair et  $A_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} s(t) \cos n\omega t dt$  pour  $n$  impair.

### 2.2 Décomposition en série de Fourier d'un signal carré

En appliquant les résultats de l'exercice 2.1, calculer la décomposition d'un signal carré d'amplitude  $A$  et de période  $T$  (figure 2.9) et tracer son spectre.

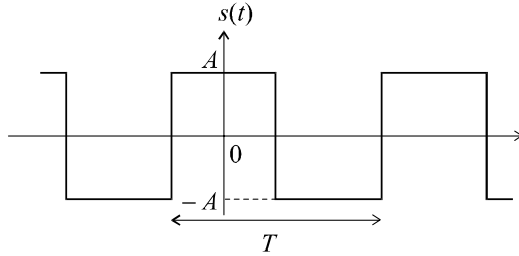


Figure 2.9 Représentation temporelle d'un signal carré.

### 2.3 Décomposition en série de Fourier d'un signal complexe

En appliquant les résultats de l'exercice 2.1, calculer la décomposition en série de Fourier du signal représenté sur la figure 2.10 et déterminer la valeur de  $t_1$  pour laquelle ce signal ne possède pas d'harmonique 3. Conclure.

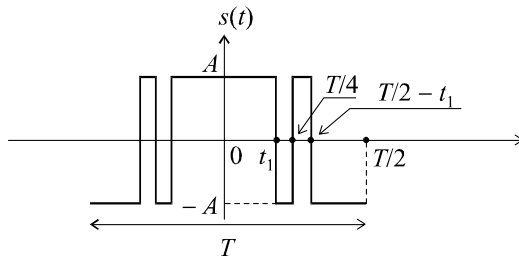


Figure 2.10 Représentation temporelle d'un signal complexe.

### 2.4 Spectre d'une impulsion

On considère le signal non périodique  $s(t)$  représenté sur la figure 2.11. Calculer et tracer son spectre.

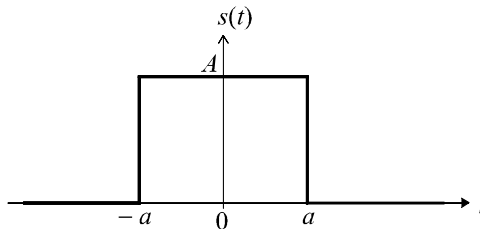


Figure 2.11 Impulsion de largeur  $2a$ .

## 2.5 Transformée de Fourier d'un signal trapézoïdal

On considère le signal non périodique  $s(t)$  représenté sur la figure 2.12. Soit  $x(t)$  le signal défini par :

$$x(t) = \frac{ds}{dt}$$

Calculer la transformée de Fourier  $X(f)$  du signal  $x(t)$  et en déduire la transformée de Fourier  $S(f)$  de  $s(t)$ .

Retrouver, à l'aide de l'expression de la transformée de Fourier de  $s(t)$ , celle de l'impulsion de largeur  $2a$  étudiée à l'exercice 2.4.

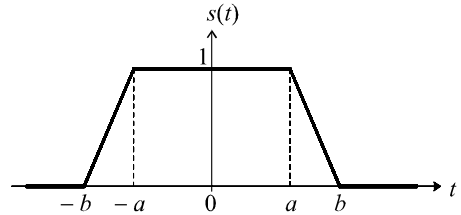


Figure 2.12 Signal trapézoïdal.

## 2.6 Transformée de Fourier d'un signal triangulaire

À partir des résultats de l'exercice 2.5, calculer la transformée de Fourier du signal non périodique  $s(t)$  représenté sur la figure 2.13.

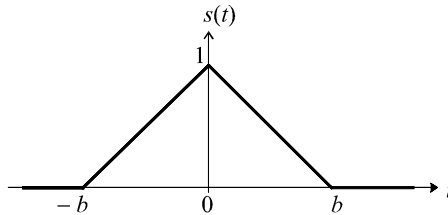


Figure 2.13 Signal triangulaire.

## 2.7 Spectre d'une alternance sinusoïdale

On considère la fonction  $s(t)$  définie par :

$$s(t) = \sin at \text{ pour } 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{a},$$

$$s(t) = 0 \text{ partout ailleurs.}$$

Calculer la transformée de Fourier de ce signal et tracer son spectre

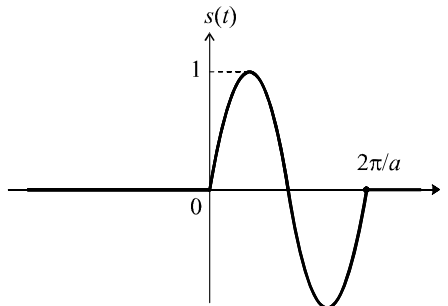


Figure 2.14 Alternance sinusoïdale.

### 2.8 Vérification de l'égalité de Parseval

On considère la fonction  $s(t)$  représenté sur la figure 2.15 et défini par :

$$s(t) = 0 \text{ pour } t < 0,$$

$$s(t) = e^{-at} \text{ pour } t \geq 0 \text{ avec } a > 0.$$

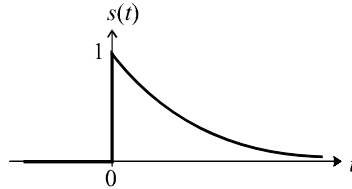


Figure 2.15 Représentation temporelle du signal.

Calculer l'énergie totale de ce signal à partir de son expression temporelle et vérifier l'égalité de Parseval en calculant cette même énergie à partir de l'expression de sa transformée de Fourier.

## SOLUTIONS

2.1 Si le signal périodique est pair, on a :  $s(-t) = s(t)$ .

$$A_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^0 s(t) e^{-jn\omega t} dt + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} s(t) e^{-jn\omega t} dt$$

Effectuons, dans la première intégrale, le changement de variable  $t \rightarrow -t$  :

$$A_n = \frac{1}{T} \int_{T/2}^0 s(-t) e^{jn\omega t} d(-t) + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} s(t) e^{-jn\omega t} dt$$

d'où :

$$A_n = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} s(t) e^{jn\omega t} dt + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} s(t) e^{-jn\omega t} dt$$

Soit :

$$A_n = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} s(t) [e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}] dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cos n\omega t dt$$

Supposons que le signal possède de surcroît une symétrie par rapport à un point correspondant au quart de période (figure 2.16).

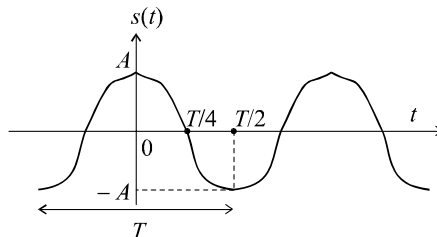


Figure 2.16 Signal à symétrie par rapport au quart de période.



On a à présent :

$$s\left(\frac{T}{2} - t\right) = -s(t)$$

Cette propriété nous pousse à décomposer l'expression de  $A_n$  précédemment trouvée et à y procéder au changement de variable :

$$t \rightarrow \frac{T}{2} - t$$

Soit :

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/4} s(t) \cos n\omega t \, dt + \frac{2}{T} \int_{T/4}^{T/2} s(t) \cos n\omega t \, dt$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/4} s(t) \cos n\omega t \, dt + \frac{2}{T} \int_{T/4}^0 s\left(\frac{T}{2} - t\right) \cos n\omega \left(\frac{T}{2} - t\right) d\left(\frac{T}{2} - t\right)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/4} s(t) \cos n\omega t \, dt - \frac{2}{T} \int_0^{T/4} s(t) \cos n\omega \left(\frac{T}{2} - t\right) dt$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/4} s(t) \cos n\omega t \, dt - \frac{2}{T} \int_0^{T/4} s(t) \cos \left(\frac{n\omega T}{2} - n\omega t\right) dt$$

Or :

$$\cos\left(\frac{n\omega T}{2} - n\omega t\right) = \cos(n\pi - n\omega t)$$

Si  $n$  est pair, on a :

$$\cos(n\pi - n\omega t) = \cos n\omega t$$

et si  $n$  est impair, on a :

$$\cos(n\pi - n\omega t) = -\cos n\omega t$$

Par conséquent, si  $n$  est pair, on a :

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/4} s(t) \cos n\omega t \, dt - \frac{2}{T} \int_0^{T/4} s(t) \cos n\omega t \, dt = 0$$

et pour  $n$  impair, on a :

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/4} s(t) \cos n\omega t \, dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/4} s(t) \cos n\omega t \, dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} s(t) \cos n\omega t \, dt$$

**2.2** Le signal carré possède les propriétés de symétrie étudiées dans l'exercice 2.1. Par conséquent, nous pouvons écrire :

pour  $n$  pair,  $A_n = 0$

et pour  $n$  impair,  $A_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} s(t) \cos n\omega t \, dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} A \cos n\omega t \, dt$

Calculons cette expression dans le cas  $n$  impair :

$$A_n = \frac{4A}{T} \int_0^{T/4} \cos n\omega t \, dt = \frac{4A}{T} \left[ \frac{\sin n\omega t}{n\omega} \right]_0^{T/4} = \frac{4A}{T} \left[ \frac{\sin(n\omega T/4)}{n\omega} - 0 \right]$$

Soit :

$$A_n = \frac{4A}{nT\omega} \sin(n\pi/2) = \frac{2A}{\pi n} (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

Calculons les premiers termes de cette série et représentons le spectre (figure 2.17).

On a :

$$|A_1| = |A_{-1}| = \frac{2A}{\pi} \approx 0,64A$$

$$|A_3| = |A_{-3}| = \frac{2A}{3\pi} \approx 0,21A$$

$$|A_5| = |A_{-5}| = \frac{2A}{5\pi} \approx 0,13A$$

$$|A_7| = |A_{-7}| = \frac{2A}{7\pi} \approx 0,09A$$

Tous les harmoniques pairs sont, bien évidemment, nuls, ce qui caractérise une propriété fondamentale du signal carré : il ne possède que des harmoniques impairs. La valeur moyenne du signal, par ailleurs, est nulle.

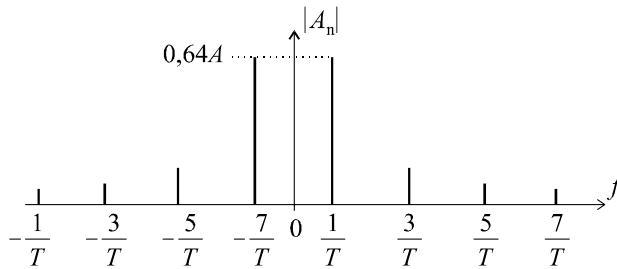


Figure 2.17 Spectre du signal carré.

2.3 Le signal possède les propriétés de symétrie étudiées dans l'exercice 2.1. Par conséquent, nous pouvons écrire :

pour  $n$  pair,  $A_n = 0$

et pour  $n$  impair,  $A_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} s(t) \cos n\omega t \, dt$

Calculons cette expression dans le cas  $n$  impair :

$$A_n = \frac{4A}{T} \int_0^{t_1} \cos n\omega t \, dt - \frac{4A}{T} \int_{t_1}^{T/4} \cos n\omega t \, dt$$

Soit :

$$A_n = \frac{4A}{T} \left[ \frac{\sin n\omega t}{n\omega} \right]_0^{t_1} - \frac{4A}{T} \left[ \frac{\sin n\omega t}{n\omega} \right]_{t_1}^{T/4}$$

$$A_n = \frac{2A}{n\pi} \sin n\omega t_1 - \frac{2A}{n\pi} [\sin n\pi/2 - \sin n\omega t_1]$$

d'où :

$$A_n = \frac{4A}{n\pi} \sin n\omega t_1 - \frac{2A}{n\pi} (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

La valeur de  $t_1$  qui annule l'harmonique 3 est telle que :

$$A_3 = \frac{4A}{3\pi} \sin 3\omega t_1 + \frac{2A}{3\pi} = 0$$

Par conséquent :

$$2 \sin 3\omega t_1 + 1 = 0 \Rightarrow \sin 3\omega t_1 = -\frac{1}{2}$$

d'où :

$$3\omega t_1 = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{7\pi}{18\omega} = \frac{7}{36}T$$

On peut vérifier qu'il s'agit bien là de la seule solution telle que :  $0 \leq t_1 \leq \frac{T}{4}$ .

En conclusion, il est possible, à partir d'un signal périodique composé d'une série d'impulsion (ce qui se réalise très facilement par des montages électroniques en commutation), d'obtenir un signal pour lequel les harmoniques 2, 3 et 4 sont nuls. Le premier harmonique non nul,  $A_5$ , ainsi que les suivants, possédant de faibles amplitudes, nous avons affaire à un signal que l'on peut facilement transformer en une sinusoïde parfaite en filtrant ses harmoniques, ce qui est d'autant plus facile que le premier harmonique non nul se trouve très éloigné de la fondamentale. Il s'agit là d'une des méthodes utilisées pour générer des signaux sinusoïdaux sans avoir recours à des systèmes oscillants.

**2.4** Le signal considéré est bien à énergie finie car il possède un début et une fin clairement identifiées. L'intégrale définissant l'énergie ne peut qu'être finie.

Le signal  $s(t)$  peut être considéré comme la différence entre un échelon retardé d'un temps  $-a$ , soit  $s_1(t) = u(t + a)$  et un échelon retardé d'un temps  $a$ , soit  $s_2(t) = u(t - a)$ .

Soit :  $s(t) = s_1(t) - s_2(t) = A [u(t + a) - u(t - a)]$ .

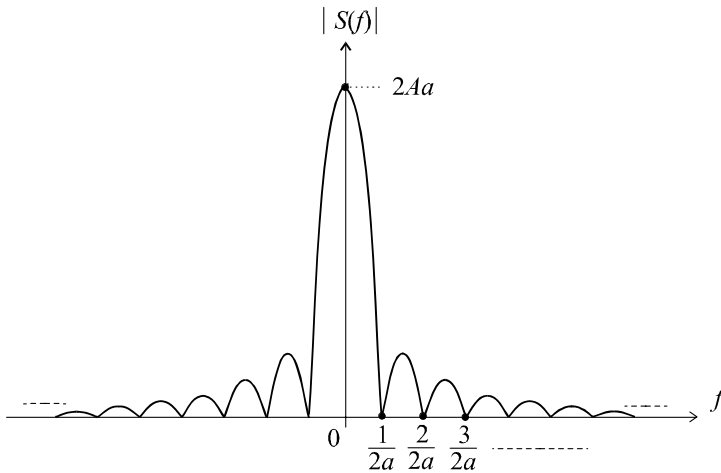
En ayant pris soin de définir  $a$  et  $A$  comme des paramètres, la commande Mathematica suivante nous donne immédiatement le résultat :

$$\text{FourierTransform}[A \times \text{UnitStep}[t + a] - A \times \text{UnitStep}[t - a], t, \omega, \text{FourierParameters} \rightarrow \{1, -1\}]$$

Résultat :  $\frac{2A \sin [a\omega]}{\omega}$

On fait apparaître une fonction *sinus cardinal* définie par  $\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$ .

Soit :  $S(f) = 2Aa \text{ sinc } \omega a = 2Aa \text{ sinc } 2\pi f a$



**Figure 2.18** Spectre du signal.

Nous pouvons alors tracer aisément le spectre du signal (figure 2.18), autrement dit  $|S(f)|$  pour  $f$  variant de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Ce tracé est facilité en remarquant que :

$$\text{sinc } x \rightarrow 1 \text{ pour } x \rightarrow 0 \Rightarrow |S(f)| \rightarrow 2aA \text{ pour } f \rightarrow 0$$

Par ailleurs :  $|S(f)| = 0 \text{ pour } 2\pi f a = k\pi \Rightarrow f = \frac{k}{2a}$

**2.5** Le signal  $x(t)$  défini comme la dérivée du signal  $s(t)$  s'obtient graphiquement en considérant les pentes de son graphe (figure 2.19).

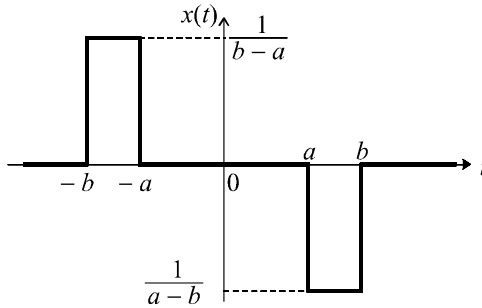


Figure 2.19 Signal dérivé.

$x(t)$  peut être décomposé en quatre signaux :  $x(t) = x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) + x_4(t)$  où  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$  sont des échelons de hauteur  $\frac{1}{b-a}$  respectivement retardés, par rapport à l'origine des temps, de  $-b, -a, a$  et  $b$ .

On a donc :  $x(t) = \frac{1}{b-a} [u(t+b) - u(t+a) - u(t-a) + u(t-b)]$ .

On peut donc écrire, avec Mathematica :

```
FourierTransform [1/(b - a) × (UnitStep[t + b] - UnitStep[t + a] - UnitStep[t - a]
+UnitStep[t - b]), t, ω, FourierParameters → {1, -1}]
```

Ce qui donne comme résultat :  $X(j\omega) = \frac{2}{j\omega(b-a)} [\cos \omega b - \cos \omega a]$

On en déduit alors la transformée de Fourier du signal  $s(t)$  qui est aussi un signal à énergie finie :

$$S(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{j\omega} = -\frac{2}{\omega^2(b-a)} [\cos \omega b - \cos \omega a]$$

ou encore :  $S(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{j\omega} = \frac{4}{\omega^2(b-a)} \left[ \sin \frac{\omega(b+a)}{2} \sin \frac{\omega(b-a)}{2} \right]$

Si on choisit de faire tendre  $b$  vers  $a$ , on retrouve le résultat de l'exercice 2.4 dans le cas particulier  $A = 1$ .

En effet, on a :  $S(j\omega) = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega(b+a)}{2} \text{sinc} \frac{\omega(b-a)}{2}$

Soit, pour  $b = a$  :  $S(j\omega) = \frac{2}{\omega} \sin \omega a = 2a \text{sinc} \omega a$

2.6 Le signal  $s(t)$  est un signal trapézoïdal pour lequel  $a = 0$ . On a donc :

$$S(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{j\omega} = \frac{2[1 - \cos \omega b]}{\omega^2 b}$$

2.7 Le signal  $s(t)$  peut se décomposer sous la forme d'une différence de deux signaux :

$$s(t) = s_1(t) - s_2(t)$$

avec :  $s_1(t) = \sin at$  pour  $t \geq 0$

et :  $s_2(t) = \sin at$  pour  $t \geq \frac{2\pi}{a}$

Dans ces conditions :  $S(p) = S_1(p) - S_2(p) = \frac{a}{a^2 + p^2} \left(1 - e^{-\frac{2\pi p}{a}}\right)$

Le signal  $s(t)$  étant à énergie finie, on en déduit l'expression de la transformée de Fourier :

$$S(j\omega) = \frac{a}{a^2 - \omega^2} \left(1 - e^{-\frac{j2\pi\omega}{a}}\right)$$

ou encore :  $S(j\omega) = \frac{a}{a^2 - \omega^2} \left(1 - \cos \frac{2\pi\omega}{a} + j \sin \frac{2\pi\omega}{a}\right)$

Ainsi, le spectre du signal a pour expression :

$$|S(j\omega)| = \left| \frac{a}{a^2 - \omega^2} \right| \left| 1 - \cos \frac{2\pi\omega}{a} + j \sin \frac{2\pi\omega}{a} \right|$$

Soit :  $|S(j\omega)| = \frac{a \sqrt{\left(1 - \cos \frac{2\pi\omega}{a}\right)^2 + \sin^2 \frac{2\pi\omega}{a}}}{|a^2 - \omega^2|} = \frac{a \sqrt{2 - 2 \cos \frac{2\pi\omega}{a}}}{|a^2 - \omega^2|}$

d'où :  $|S(j\omega)| = \frac{2a \left| \sin \frac{\pi\omega}{a} \right|}{|a^2 - \omega^2|}$

Le tracé de ce spectre n'est pas immédiat. On peut procéder, soit à une étude complète de la fonction, soit (et c'est plus facile) à un tracé point par point. Le résultat obtenu est présenté sur la figure 2.20. Il est à noter que le spectre n'est pas défini pour  $\omega = a$ . Par ailleurs, le spectre est nul pour les fréquences telles que :

$$\sin \frac{\pi\omega}{a} = 0 \text{ soit pour } \omega = ka \text{ ou encore } f = \frac{ka}{2\pi}$$

De plus :  $|S(0)| = 0$

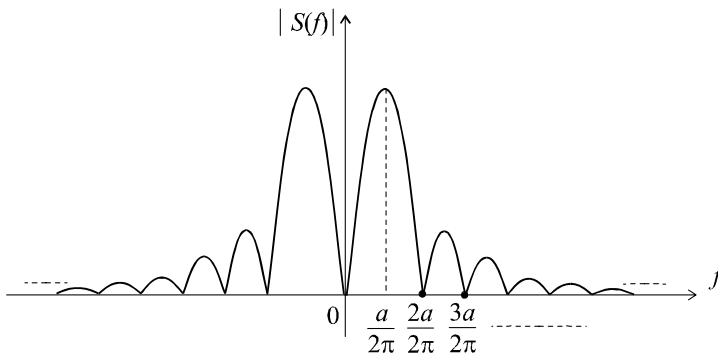


Figure 2.20 Spectre du signal.

**2.8** L'énergie totale du signal, d'après son expression temporelle est :

$$\mathcal{E} = \int_0^{+\infty} s^2(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-2at} dt = \left[ \frac{e^{-2at}}{-2a} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2a}$$

Par ailleurs, la transformée de Fourier du signal s'obtient aisément (puisque'il s'agit d'un signal à énergie finie), à partir de sa transformée de Laplace :

$$S(p) = \frac{1}{p+a} \Rightarrow S(j\omega) = \frac{1}{j\omega+a}$$

On a donc :

$$|S(j\omega)| = |S(f)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 f^2+a^2}}$$

D'après l'égalité de Parseval, on doit avoir :

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df$$

Calculons cette intégrale :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{f^2 + \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2} = \frac{1}{4\pi^2} \left[ \frac{2\pi}{a} \arctan \frac{4\pi f}{a} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi a} \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2a}$$

Ce qui permet, effectivement, de vérifier l'égalité de Parseval.

## Chapitre 3

# Modélisation fréquentielle des systèmes linéaires continus

### 3.1 DÉFINITIONS

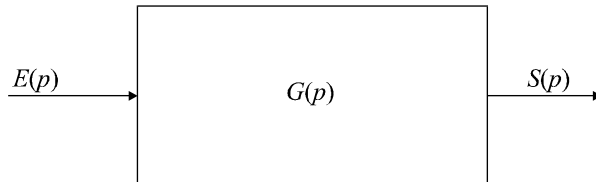


Figure 3.1 Modèle général d'un système linéaire.

Considérons le traditionnel schéma de fonctionnement d'un système, traduit dans la représentation Laplacienne :

$$S(p) = G(p)E(p)$$

En posant  $p = j\omega$ , on obtient :

$$S(j\omega) = G(j\omega)E(j\omega)$$

Dans le cas de signaux à énergie finie,  $S(j\omega)$  et  $E(j\omega)$  représentent les transformées de Fourier des deux signaux, de sortie et d'entrée. Plus précisément, la relation ci-dessus, réduite à l'égalité des modules, prend un sens tout particulier si l'on constate que  $|S(j\omega)|$  et  $|E(j\omega)|$  ne sont rien d'autre que les spectres des signaux :

$$|S(j\omega)| = |G(j\omega)| |E(j\omega)|$$

La fonction  $|G(j\omega)|$ , que l'on note en général  $G(\omega)$  représente donc le rapport entre le spectre du signal de sortie et celui du signal d'entrée. Autrement dit  $|G(j\omega)|$  représente le rapport des amplitudes des sinusoides de sortie et d'entrée, pour une pulsation  $\omega$  donnée. C'est donc le gain fréquentiel du système à cette pulsation, que l'on appelle également le gain réel.

Par ailleurs, l'équation  $S(j\omega) = G(j\omega)E(j\omega)$  nous conduit également à l'égalité des arguments :

$$\arg S(j\omega) = \arg G(j\omega) + \arg E(j\omega)$$

Soit :

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \arg S(j\omega) - \arg E(j\omega)$$

Cette fonction correspond au déphasage, à la pulsation  $\omega$  donnée, entre la sinusoïde de sortie et celle d'entrée.

Au final, la fonction  $G(j\omega)$ , que l'on appelle fonction de transfert en fréquence (ou gain complexe du système), nous fournit le gain réel  $|G(j\omega)|$  et le déphasage  $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$  induit par le système vis-à-vis des composantes sinusoïdales. Elle traduit donc le comportement fréquentiel du système.

### 3.2 DIAGRAMMES DE BODE

#### 3.2.1 Définition

Les diagrammes de Bode consistent à tracer deux graphes correspondant respectivement au gain réel et au déphasage. Pour la courbe de gain, on ne trace pas directement  $G(\omega)$  mais  $G_{dB} = 20 \log G(\omega)$  défini comme le gain en décibels et, de surcroît, avec une échelle logarithmique en abscisse (figure 3.2).

Outre les raisons historiques qui ont présidé à ce choix, il existe deux intérêts essentiels au choix du tracé logarithmique du gain, intérêts que nous mettrons en évidence dans les pages qui suivent.

L'axe des ordonnées est bien évidemment gradué en décibels. Un gain réel  $G(\omega)$  supérieur à 1 correspond à un gain en décibels positif tandis qu'un gain réel inférieur à 1 correspond à un gain en décibels négatif. On a bien sûr  $20 \log G(\omega) = 0 \text{ dB}$  pour  $G(\omega) = 1$ .

En règle générale, on porte directement les valeurs de  $\omega$  sur l'axe des abscisses en respectant l'échelle logarithmique et en plaçant la pulsation  $\omega = 1$  à l'origine de cet axe (puisqu'elle correspond à  $\log \omega = 0$ ). On notera également que la pulsation  $\omega = 0$  ne peut apparaître sur l'axe qu'en « moins l'infini ».

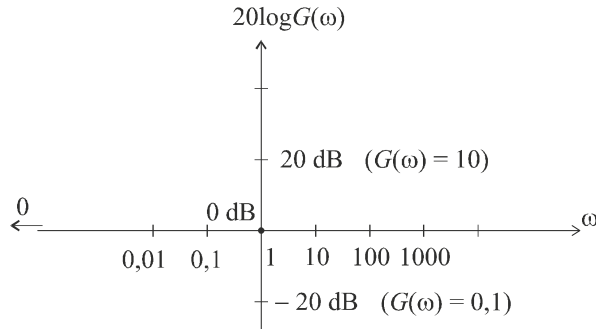


Figure 3.2 Échelle logarithmique du diagramme de Bode.

#### 3.2.2 Exemple : diagramme de Bode d'un système du premier ordre

Considérons un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{K}{1 + Tp}$ .

$K$  et  $T$  sont deux constantes positives.  $K$  est le gain statique du système,  $T$  sa constante de temps. Nous justifierons plus loin ces dénominations.

On a :

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + jT\omega}$$

d'où :

$$\begin{cases} G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \\ \varphi(\omega) = -\arctan T\omega \end{cases}$$

Contentons-nous d'une étude sommaire de ces fonctions.



Pour  $\omega \rightarrow 0$ , on a :  $G(\omega) \rightarrow K \Rightarrow 20 \log G(\omega) \rightarrow 20 \log K$

Ceci correspond à une asymptote horizontale.

Pour  $\omega \rightarrow +\infty$ , on a :

$$G(\omega) \approx \frac{K}{T\omega} \Rightarrow 20 \log G(\omega) \approx 20 \log K - 20 \log T - 20 \log \omega$$

Cet équivalent de la fonction  $G(\omega)$  pour  $\omega \rightarrow +\infty$  correspond à une droite puisque l'échelle des abscisses est logarithmique. Cette droite coupe l'autre asymptote au point d'abscisse  $\omega = \frac{1}{T}$ , coupe l'axe des abscisses au point  $\omega = \frac{K}{T}$  et possède une pente de -20 dB/décade, ce qui signifie que le gain chute de 20 dB lorsque la pulsation est multipliée par 10. Nous allons vite nous rendre compte que dans un diagramme de Bode, les asymptotes ne peuvent prendre pour pente que les valeurs multiples de 20 dB/décade. Ce « 20 dB/décade » est donc en quelque sorte l'unité élémentaire de pente. Nous appellerons pente d'ordre  $n$ , une pente égale à  $20n$  dB/décade.

Compte tenu de l'effet « lissant » du logarithme, la courbe réelle reste longtemps proche de ses asymptotes (qui par conséquent constituent une approximation suffisante du graphe). Pour s'en convaincre, il suffit de calculer la vraie valeur du gain pour la pulsation  $\omega = \frac{1}{T}$  :

$$G\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{K}{\sqrt{1+1}} = \frac{K}{\sqrt{2}} \Rightarrow 20 \log G\left(\frac{1}{T}\right) = 20 \log K - 3 \text{ dB}$$

Le point en question se trouve donc à 3 dB en dessous du gain statique (voir figure 3.3). La pulsation  $\omega = \frac{1}{T}$  est appelée pulsation de coupure.

En ce qui concerne la courbe de déphasage, remarquons qu'il s'agit d'une fonction arctangente et que :

– pour  $\omega \rightarrow 0$ , on a :  $\varphi(\omega) \rightarrow 0$

– pour  $\omega \rightarrow +\infty$ , on a :  $\varphi(\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

On a, par ailleurs :  $\varphi\left(\frac{1}{T}\right) = -\frac{\pi}{4}$

Il n'est bien sûr pas question ici d'assimiler les asymptotes (en trait plein) à la courbe (en trait pointillé).

On notera que la valeur asymptotique du déphasage vaut 0 sur l'intervalle de pulsations où la direction asymptotique du gain correspond à une pente d'ordre 0, tandis qu'elle vaut  $-\pi/2$  lorsque la direction asymptotique du gain correspond à une pente d'ordre -1. Il s'agit là d'une règle générale :

La direction asymptotique de phase se déduit immédiatement du diagramme de gain en multipliant l'ordre de la pente par  $\pi/2$ .

**Remarque :** Les deux intérêts fondamentaux du choix du tracé logarithmique apparaissent clairement au travers de cet exemple : grâce à ce type de tracé, la courbe possède des droites asymptotes qui n'apparaîtraient pas dans un tracé cartésien classique. Par ailleurs, l'effet lissant de la fonction logarithme permet de considérer que la courbe réelle se trouve « longtemps » très proche de ses asymptotes. Par conséquent, nous pourrions très souvent nous contenter d'un tracé asymptotique du diagramme de Bode de gain, la plupart du temps suffisant pour obtenir une idée assez fine du comportement fréquentiel du système étudié.

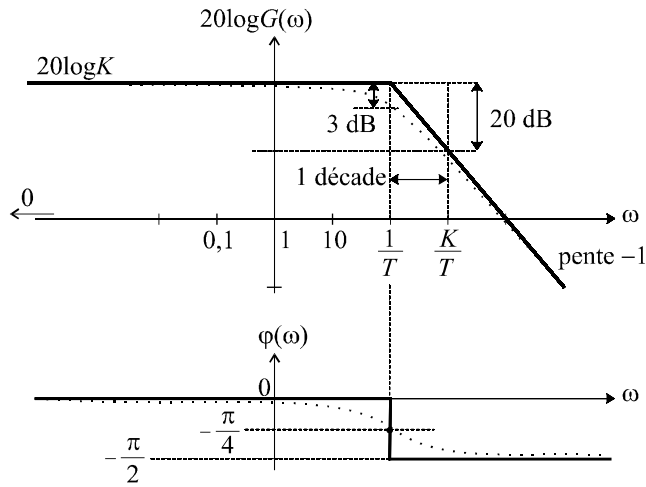


Figure 3.3 Diagramme de Bode d'un système du premier ordre.

### 3.3 APPROCHE MÉTHODIQUE DU TRACÉ DES DIAGRAMMES DE BODE

#### 3.3.1 Objectif

Nous allons tenter de tirer profit des deux intérêts fondamentaux que nous venons de mettre en évidence. L'objectif consiste à acquérir une bonne maîtrise du tracé rapide de n'importe quel diagramme de Bode (gain et phase). Les lignes qui suivent présentent, à partir d'un exemple simple, la méthode à utiliser.

#### 3.3.2 Construction d'un diagramme de gain asymptotique

Considérons, pour l'exemple, un système de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{(p + 1)(p + 100)}{p + 10}$$

La fonction de transfert en fréquence de ce système a pour expression :

$$G(j\omega) = \frac{(j\omega + 1)(j\omega + 100)}{j\omega + 10}$$

d'où :

$$G(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1} \sqrt{\omega^2 + 100^2}}{\sqrt{\omega^2 + 10^2}}$$

Considérons les équivalents des trois expressions  $\sqrt{\omega^2 + 1}$ ,  $\sqrt{\omega^2 + 10^2}$  et  $\sqrt{\omega^2 + 100^2}$  :

$$\begin{aligned} \omega \ll 1 &\Rightarrow \sqrt{1 + \omega^2} \approx 1, & \omega \gg 1 &\Rightarrow \sqrt{1 + \omega^2} \approx \omega \\ \omega \ll 10 &\Rightarrow \sqrt{10^2 + \omega^2} \approx 10, & \omega \gg 10 &\Rightarrow \sqrt{10^2 + \omega^2} \approx \omega \\ \omega \ll 100 &\Rightarrow \sqrt{100^2 + \omega^2} \approx 100, & \omega \gg 100 &\Rightarrow \sqrt{100^2 + \omega^2} \approx \omega \end{aligned}$$

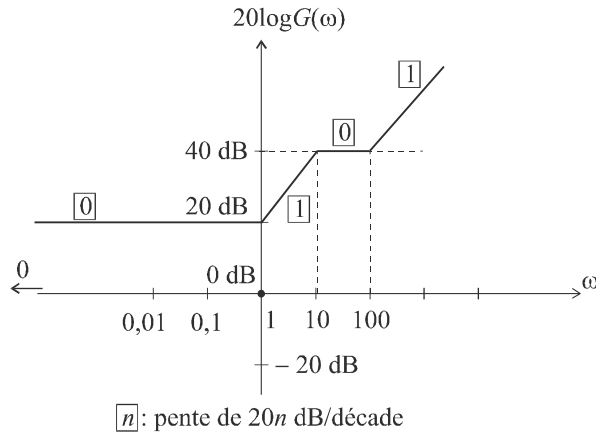
L'idée consiste à déterminer un équivalent asymptotique (approché) de  $G(\omega)$  pour chaque intervalle compris entre deux pulsations de coupure.

Rassemblons les résultats précédents dans le tableau 3.1.

**Tableau 3.1** CALCUL DES ÉQUIVALENTS ASYMPTOTIQUES DU GAIN.

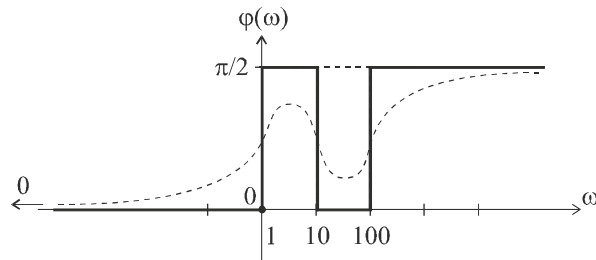
$\omega$	0	1	10	100	$+\infty$
$\sqrt{\omega^2 + 1}$	1	$\omega$	$\omega$	$\omega$	$\omega$
$\sqrt{\omega^2 + 100^2}$	100	100	100	$\omega$	$\omega$
$\sqrt{\omega^2 + 10^2}$	10	10	$\omega$	$\omega$	$\omega$
$G(\omega)$	10	$10\omega$	100	$\omega$	$\omega$
$20\log G(\omega)$	20 dB	20 dB + $20\log\omega$	40 dB	$20\log\omega$	$20\log\omega$
pente	0	20 dB/déc.	0	20 dB/déc.	

On réalise alors un diagramme de Bode asymptotique en approximant la courbe entre deux pulsations de coupures, par ses segments asymptotiques calculés dans le tableau (figure 3.4).



**Figure 3.4** Diagramme de Bode de gain du système.

La direction asymptotique de phase se déduit immédiatement du diagramme de gain en multipliant la pente  $n$  de ce dernier par  $\pi/2$  (figure 3.5).



**Figure 3.5** Diagramme de Bode de phase du système.

Il suffit alors d'un peu d'intuition pour imaginer l'allure de la courbe réelle (en pointillé sur la figure 3.5), ce qui dispense de l'étude complète de la fonction  $\varphi(\omega)$ . On peut encore affiner le tracé en calculant les extrema relatifs de la fonction. On veillera, lors d'un tracé intuitif, à ne pas tracer la courbe réelle jusqu'aux directions asymptotiques calculées, compte tenu que ces valeurs sont... asymptotiques !

### 3.3.3 Méthode rapide

On peut tracer un diagramme de Bode sans faire ni calcul, ni tableau : dans la fonction de transfert  $G(p)$ , repérons les pulsations de coupure 1, 10 et 100 et portons les en abscisse sur le diagramme de gain (figure 3.6).

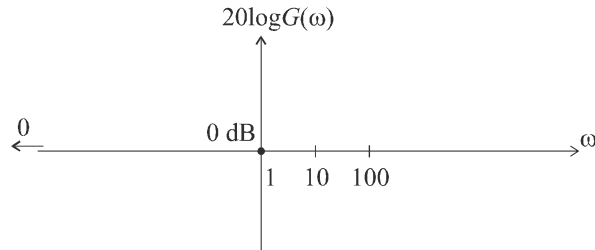


Figure 3.6 Placement des pulsations de coupure.

Calculons l'équivalent asymptotique quand  $p$  tend vers 0 :  $G(p) \approx 10$ . Ceci implique, bien évidemment  $G(\omega) \approx 10$ , soit un gain de 20 dB. Cette expression est valable pour  $\omega < 1$  (jusqu'à la première coupure), ce qui nous permet de tracer le premier segment (figure 3.7).

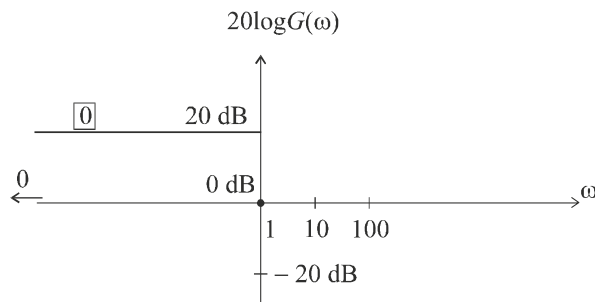


Figure 3.7 Tracé du premier segment.

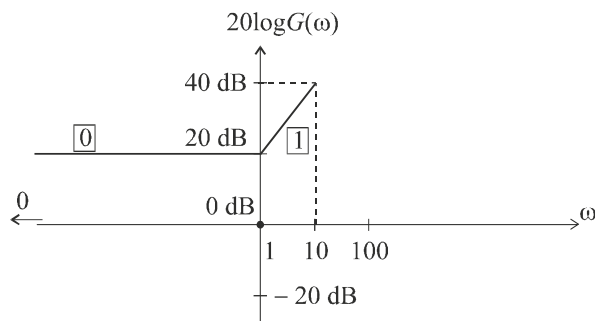


Figure 3.8 Tracé du deuxième segment.

Au delà de la pulsation 1, le terme  $(p+1)$  va introduire un changement d'équivalent : un terme en  $\omega$  apparaît au numérateur de la fonction de transfert approchée, la pente du segment asymptotique correspondant augmente d'une unité (de 20 dB par décade). Voir figure 3.8.

Et ce, jusqu'à la cassure suivante qui a lieu à la pulsation 10. Le terme  $(p+10)$  étant au dénominateur, la pente diminue d'une unité, et ce jusqu'à la pulsation 100 où elle s'incrémente à nouveau (figure 3.9).

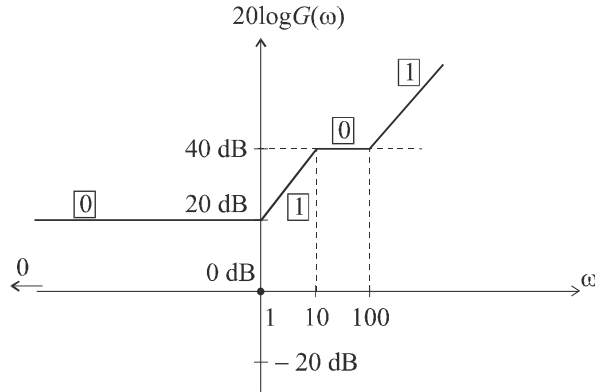


Figure 3.9 Diagramme de Bode de gain du système.

### 3.3.4 Cas particuliers

a) *Présence d'un terme en p au numérateur ou au dénominateur*

On cherche toujours l'équivalent quand  $p$  tend vers 0, mais en prenant soin de laisser le  $p$  tel quel. Le diagramme asymptotique débute alors par une pente non nulle ; on détermine le segment par deux points particuliers.

Considérons par exemple le système de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{(p + 1)}{p(p + 10)}$$

Les deux pulsations de coupure sont facilement identifiées : 1 et 10. Par ailleurs, nous obtenons aisément un équivalent de la fonction de transfert lorsque  $p$  tend vers 0 :

$$G(p) \approx \frac{1}{10p} \text{ lorsque } p \rightarrow 0$$

soit :

$$G(\omega) \approx \frac{1}{10\omega} \text{ lorsque } \omega \rightarrow 0$$

L'équation du segment de droite correspondant dans le diagramme de Bode de gain est donc :

$$G_{dB} \approx 20 \log \left( \frac{1}{10\omega} \right) = -20 \log \omega - 20 \text{ dB}$$

Il nous suffit alors de deux points (ou d'un seul, par exemple  $G_{dB}(1) = -20 \log 1 - 20 \text{ dB} = -20 \text{ dB}$ , en considérant que la pente est connue, soit  $-20 \text{ dB/décade}$ ) pour tracer ce segment de droite qui constitue l'équivalent asymptotique considéré comme valable entre les pulsations 0 et 1 ( $\omega = 1$  étant la première coupure détectée dans la fonction de transfert).

Le tracé des autres segments est immédiat (figure 3.10) : le terme en  $(p + 1)$  se trouvant au numérateur, la pente du segment s'incrémente d'une unité au passage de la pulsation 1. Le segment ainsi déterminé est valable jusqu'à la coupure suivante  $\omega = 10$ , pulsation à laquelle la pente de la courbe se décrémente d'une unité compte tenu que le terme en  $(p + 10)$  se trouve au dénominateur.

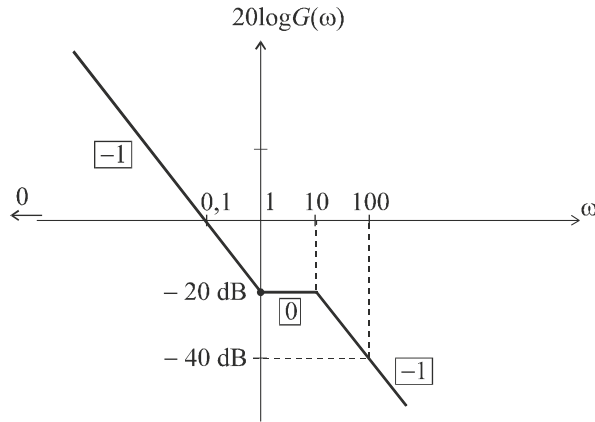


Figure 3.10 Diagramme de Bode de gain du système.

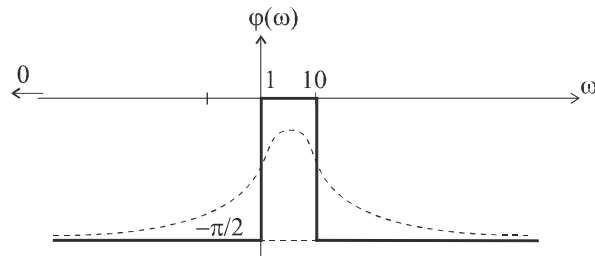


Figure 3.11 Diagramme de Bode de phase du système.

Compte tenu du choix des valeurs des pulsations de coupure, il est facile de positionner les pentes des segments avec précision, la pente d'ordre  $-1$  correspondant à une chute de 20 dB par décade.

Le diagramme de phase se déduit des pentes des segments du diagramme de gain : chaque pente d'ordre  $-1$  correspond à une direction asymptotique de phase égale à  $-\pi/2$  ; la pente d'ordre 0 nous donne une direction asymptotique de phase égale à 0. On peut, intuitivement, esquisser la courbe réelle (en pointillé sur la figure 3.11). La connaissance précise de la valeur maximale du déphasage ne peut se faire, bien entendu, que par le calcul.

*b) Présence d'un terme au carré*

Lorsqu'on passe la pulsation de coupure correspondante, on incrémente ou on décrémente la pente de deux unités (selon que terme est au numérateur ou au dénominateur).

Considérons par exemple le système de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1000(p + 1)}{(p + 10)^2}$$

Les deux pulsations de coupure sont facilement identifiées : 1 et 10. Par ailleurs, nous obtenons aisément un équivalent de la fonction de transfert lorsque  $p$  tend vers 0 :

$$G(p) \approx 10 \text{ lorsque } p \rightarrow 0$$

soit :

$$G(\omega) \approx 10 \text{ lorsque } \omega \rightarrow 0$$

L'équation du segment de droite correspondant dans le diagramme de Bode de gain est donc :

$$G_{dB} \approx 20 \text{ dB}$$

Nous pouvons déjà tracer ce segment de droite horizontal qui constitue l'équivalent asymptotique considéré comme valable entre les pulsations 0 et 1 ( $\omega = 1$  étant la première coupure détectée dans la fonction de transfert).

Le tracé du segment suivant est immédiat (figure 3.12) : le terme en  $(p + 1)$  se trouvant au numérateur, la pente du segment s'incrémente d'une unité au passage de la pulsation 1. Le segment ainsi déterminé est valable jusqu'à la coupure suivante  $\omega = 10$ , pulsation à laquelle la pente de la courbe se décrémente de deux unités étant donné que le terme en  $(p + 10)$  est au dénominateur et se trouve élevé au carré

Compte tenu du choix des valeurs des pulsations de coupure, il est facile de positionner les pentes des segments avec précision, la pente d'ordre 1 correspondant à une croissance de 20 dB par décade, celle d'ordre  $-1$  correspondant à une chute de 20 dB par décade.

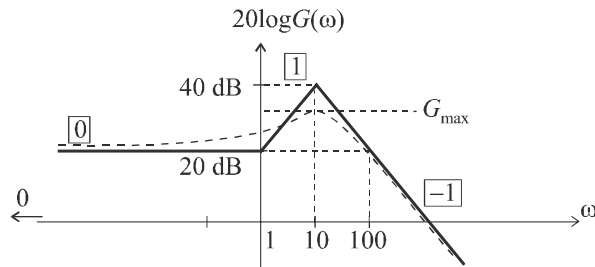


Figure 3.12 Diagramme de Bode de gain du système.

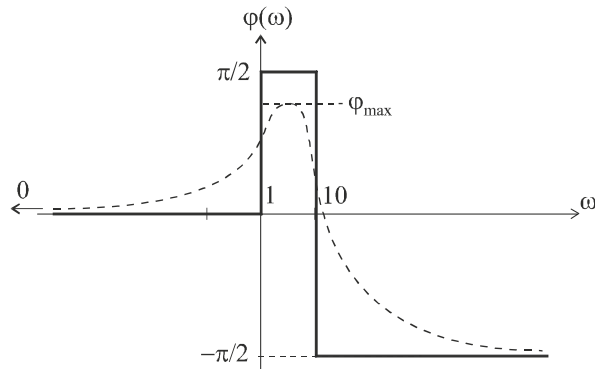


Figure 3.13 Diagramme de Bode de phase du système.

Le diagramme de phase se déduit des pentes des segments dans le diagramme de gain : la pente d'ordre 0 nous donne une direction asymptotique de phase égale à 0, celle d'ordre 1 correspond à une direction asymptotique de  $\pi/2$  et la pente d'ordre  $-1$  correspond à une direction asymptotique de phase égale à  $-\pi/2$ . On peut, intuitivement, esquisser la courbe réelle (en pointillé sur la figure 3.13). Le tracé réel ne peut bien évidemment se faire de manière précise qu'en calculant des points particuliers (par exemple la valeur maximale  $\varphi_{max}$ ).

## 3.4 DIAGRAMME DE NYQUIST

Le diagramme de Bode constitue un moyen très efficace et facile d'accès pour représenter graphiquement le comportement fréquentiel d'un système. Toutefois, il est nécessaire de toujours effectuer deux graphes : gain et déphasage.

Le diagramme de Nyquist permet d'obtenir une représentation graphique de ce comportement sur un graphe unique. Plus délicat à tracer, il revêt néanmoins un intérêt primordial en automatique, comme nous le verrons au chapitre 6 à propos de l'étude la stabilité des systèmes asservis.

### 3.4.1 Définition

Le diagramme de Nyquist, ou lieu de Nyquist d'un système est le lieu, en coordonnées polaires, des points M de coordonnées  $G(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$  lorsque  $\omega$  varie de 0 à  $+\infty$  (figure 3.14).

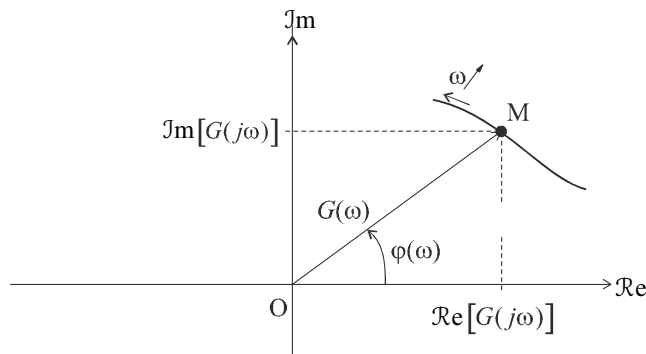


Figure 3.14 Définition du diagramme de Nyquist.

C'est aussi le lieu, dans le plan complexe, des points d'affixe  $G(j\omega)$ , donc de coordonnées  $\text{Re}[G(j\omega)]$ ,  $\text{Im}[G(j\omega)]$  dans ce plan.

Il est d'usage d'orienter le graphe dans le sens des  $\omega$  croissants et parfois, de graduer la courbe en  $\omega$ .

### 3.4.2 Méthode de tracé rapide

On peut certes, pour tracer le diagramme de Nyquist d'un système, réaliser l'étude complète en coordonnées polaires du lieu des points M de coordonnées  $G(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$  lorsque  $\omega$  varie de 0 à  $+\infty$ , voire même faire cette étude en coordonnées cartésiennes paramétrées  $\text{Re}[G(j\omega)]$ ,  $\text{Im}[G(j\omega)]$ .

On peut néanmoins réaliser un tracé sommaire d'un lieu de Nyquist quelconque à partir du diagramme de Bode en reportant dans le plan complexe, du mieux possible et en balayant les axes des pulsations de 0 à  $+\infty$ , chaque couple de points  $G(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$  relevés respectivement sur le diagramme de Bode de gain et sur celui de phase.

Reprenons l'exemple traité précédemment avec :

$$G(p) = \frac{1000(p+1)}{(p+10)^2}$$

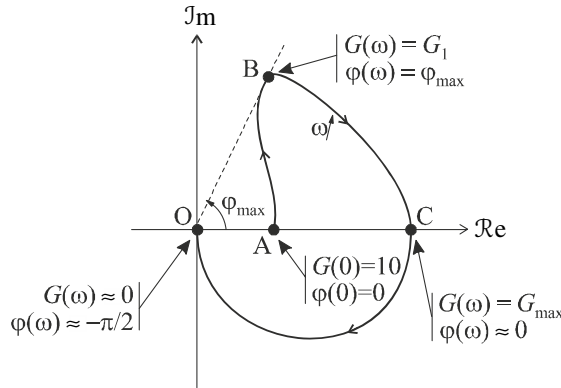
Les figures 3.12 et 3.13 présentent les fonctions  $G(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$  lorsque  $\omega$  varie de 0 à  $+\infty$ . Nous pouvons déjà placer dans le plan complexe le point de départ du lieu de Nyquist, en relevant, dans les diagrammes de Bode, les valeurs du gain et du déphasage pour  $\omega = 0$ .

On a :  $G(0) = 10$  et  $\varphi(0) = 0$

Soit A ce point de départ.



**Remarque :** Il n'est plus question de gain en décibels dans le diagramme de Nyquist ; c'est bien la valeur du gain réel qui y est représentée.



**Figure 3.15** Diagramme de Nyquist du système.

Lorsque  $\omega$  commence à croître, le gain augmente tandis que l'angle  $\varphi(\omega)$  croît jusqu'à une valeur  $\varphi_{\max}$  (figures 3.12 et 3.13). Cette évolution nous permet d'effectuer (intuitivement quant à la forme) le tracé de la portion AB de la courbe de Nyquist (figure 3.15).

On remarquera, sur les diagrammes de Bode, que ce maximum de phase ne correspond pas au maximum de gain : le gain continue de croître jusqu'à sa valeur maximale, tandis que  $\varphi(\omega)$  se remet à décroître. La valeur maximale  $G_{\max}$  du gain est atteinte pour une valeur de  $\varphi(\omega)$  visiblement voisine de 0, ce qui nous amène au point C.

Enfin, tandis que le gain décroît de cette valeur maximale jusqu'à 0 ( $-\infty$  en décibels), le déphasage continue sa décroissance jusqu'à  $-\pi/2$ . La dernière portion de courbe nous conduit donc au point O tangentiellement à l'axe des imaginaires puisque  $\varphi(\omega)$  tend vers  $-\pi/2$ .

**Remarque :** Hormis les diagrammes de Bode et de Nyquist, il existe d'autres modes de représentation du comportement fréquentiel d'un système linéaire. Nous nous limiterons toutefois à ces deux types de graphe qui constituent les outils qui nous seront nécessaires lorsque nous aborderons l'étude des système asservis.

## EXERCICES

### 3.1 Diagramme de Bode d'un système du second ordre

Tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) d'un système de fonction de transfert  $G(p)$  défini par :

$$G(p) = \frac{1000}{(p + 1)(p + 100)}$$

### 3.2 Diagramme de Bode d'un système du deuxième ordre à un pôle nul

Tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) d'un système de fonction de transfert  $G(p)$  défini par :

$$G(p) = \frac{1000(p+1)}{p(p+10)}$$

### 3.3 Diagramme de Bode d'un système du second ordre à un zéro nul

Tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) d'un système de fonction de transfert  $G(p)$  défini par :

$$G(p) = \frac{10p}{(p+1)(p+100)}$$

### 3.4 Diagramme de Bode d'un système du second ordre à un pôle double

Tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) d'un système de fonction de transfert  $G(p)$  défini par :

$$G(p) = \frac{(p+1)(p+100)}{(p+10)^2}$$

Montrer que le diagramme de Bode asymptotique de gain possède une symétrie par rapport à la droite d'équation  $\omega = 10$  et en déduire la valeur maximale précise  $G_{\max}$  du gain. Déterminer, pour la pulsation  $\omega_{\max}$  correspondant à ce maximum, la valeur du déphasage.

### 3.5 Réglage du gain statique d'un système

On considère le système de fonction de transfert  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{K}{(p+1)(p+100)}$$

Déterminer la valeur de  $K$  pour laquelle la pulsation de coupure à 0 dB, définie par  $G(\omega_{c0}) = 1$  ou encore par  $G_{\text{dB}}(\omega_{c0}) = 20 \log G(\omega_{c0}) = 0$  est égale à 5 rad/s.

### 3.6 Diagramme de Nyquist d'un système du troisième ordre

On considère le système de fonction de transfert  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{10^4}{p(p+10)(p+100)}$$

Tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) de ce système et en déduire son diagramme de Nyquist. On s'attachera, notamment, à démontrer l'existence d'une asymptote à la courbe de Nyquist lorsque  $\omega \rightarrow 0$ .

### 3.7 Diagramme de Nyquist d'un système du quatrième ordre

On considère le système de fonction de transfert  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{1000}{p(p+1)^2(p+10)}$$

Tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) de ce système et en déduire son diagramme de Nyquist. On s'attachera, notamment, à démontrer l'existence d'une asymptote à la courbe de Nyquist lorsque  $\omega \rightarrow 0$ .

### 3.8 Spectre du signal de sortie d'un système

On considère le système de fonction de transfert  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{10}{(p+1)}$$

On injecte dans ce système un signal d'entrée  $e(t) = e^{-t}$ .

Calculer et tracer le spectre du signal de sortie  $s(t)$ .

### 3.9 Amplitude du signal de sortie sinusoïdal d'un système

On considère le système de fonction de transfert  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{10(p+10)}{(p+1)}$$

On injecte dans ce système un signal d'entrée  $e(t) = A \cos \omega t$ .

Calculer l'expression du signal de sortie  $s(t)$  dans les deux cas suivants :

$$\begin{cases} A = 10 \\ \omega = 1 \text{ rad/s} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} A = 100 \\ \omega = 1000 \text{ rad/s} \end{cases}$$

## SOLUTIONS

3.1 Déterminons tout d'abord un équivalent du gain lorsque  $p$  tend vers 0 (c'est-à-dire lorsque  $\omega$  tend vers 0).

$$\text{On a :} \quad G(p) \sim \frac{1000}{100} = 10 \quad \Rightarrow \quad G(\omega) \sim 10$$

$$\text{soit :} \quad G_{\text{dB}} = 20 \log G(\omega) \sim 20 \text{ dB}$$

Nous pouvons donc tracer le premier segment asymptotique du diagramme de gain, valable entre 0 et la première pulsation de coupure, c'est-à-dire  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  (figure 3.16).

Au delà de cette pulsation de coupure, nous changeons de direction asymptotique ; comme le terme  $(p + 1)$  se trouve au dénominateur, la pente se décrémente d'une unité. Nous obtenons donc un segment de droite de pente  $[-1]$ , autrement dit  $-20$  dB/décade. Ce segment formant un graphe continu avec le segment précédent, il suffit de veiller à respecter la valeur de la pente. Comme cet équivalent reste valable jusqu'à la coupure suivante ( $\omega = 100$  rad/s), nous traçons un segment qui décroît de  $40$  dB sur l'intervalle  $[1, 100]$  qui correspond à  $2$  décades.

À partir de  $\omega = 100$  rad/s, nous aurons une direction asymptotique de pente  $[-2]$  puisque le terme  $(p + 100)$  se trouve au dénominateur. Veillons à respecter la valeur de la pente : entre  $100$  et  $1000$  rad/s, le gain chute de  $40$  dB (pente  $-40$  dB/décade).

Le diagramme asymptotique de phase se déduit immédiatement du diagramme de gain en associant à chaque segment de pente  $[n]$  une direction asymptotique de phase égale à  $n\pi/2$ .

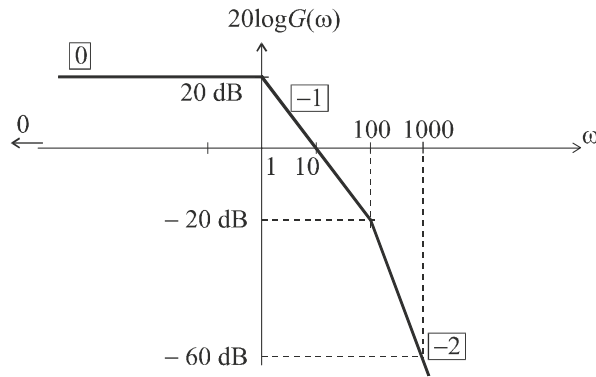


Figure 3.16 Diagramme de Bode de gain du système.

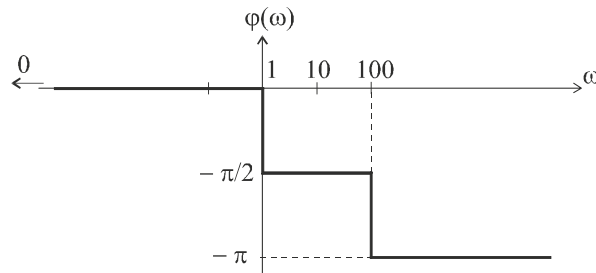


Figure 3.17 Diagramme de Bode de phase du système.

**3.2** Déterminons tout d'abord un équivalent du gain lorsque  $p$  tend vers 0 (c'est-à-dire lorsque  $\omega$  tend vers 0).

On a :

$$G(p) \sim \frac{1000}{10p} \Rightarrow G(\omega) \sim \frac{100}{\omega}$$

soit :

$$G_{dB} = 20 \log G(\omega) \sim 40 \text{ dB} - 20 \log \omega$$

Nous pouvons donc tracer le premier segment asymptotique du diagramme de gain, valable entre 0 et la première pulsation de coupure, c'est-à-dire  $\omega = 1$  rad/s (figure 3.18). Il s'agit d'un segment de pente  $[-1]$  autrement dit  $-20$  dB/décade. La connaissance d'un point suffit donc pour tracer de segment, par exemple :

$$G_{dB}(1) = 40 \text{ dB}$$

Le premier segment asymptotique, sur l'intervalle  $[0, 1]$  possède donc une pente de  $-20$  dB/décade et s'arrête au point  $(1, 40 \text{ dB})$ , comme indiqué sur la figure 3.18.

Au delà de la pulsation de coupure  $\omega = 1$  rad/s, nous changeons de direction asymptotique ; comme le terme  $(p + 1)$  se trouve au numérateur, la pente s'incrémente d'une unité. Nous obtenons donc un segment de droite de pente  $[0]$ . Ce segment formant un graphe continu avec le segment précédent, il est facile à tracer et reste valable jusqu'à la coupure suivante ( $\omega = 10$  rad/s).

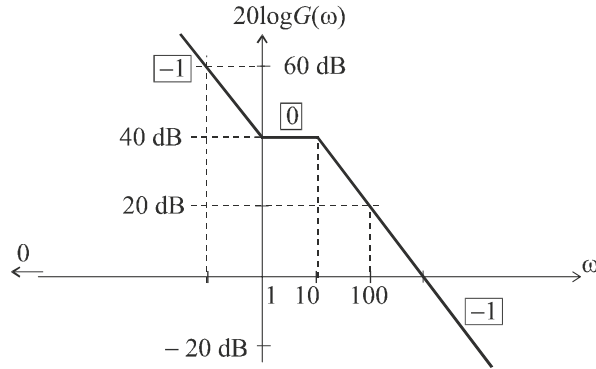


Figure 3.18 Diagramme de Bode de gain du système.

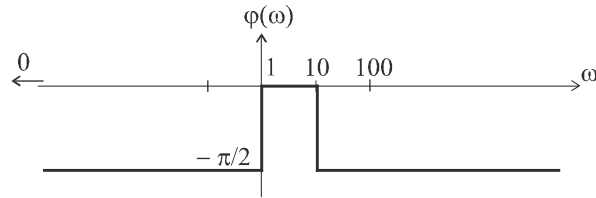


Figure 3.19 Diagramme de Bode de phase du système.

À partir de  $\omega = 10$  rad/s, nous aurons à nouveau une direction asymptotique de pente  $[-1]$  puisque le terme  $(p + 10)$  se trouve au dénominateur. Veillons à respecter la valeur de la pente : entre 10 et 100 rad/s, le gain chute de 20 dB (pente  $-40$  dB/décade).

Le diagramme asymptotique de phase se déduit immédiatement du diagramme de gain en associant à chaque segment de pente  $[n]$  une direction asymptotique de phase égale à  $n\pi/2$ .

**3.3** Déterminons tout d'abord un équivalent du gain lorsque  $p$  tend vers 0 (c'est-à-dire lorsque  $\omega$  tend vers 0).

On a : 
$$G(p) \sim \frac{p}{10} \Rightarrow G(\omega) \sim \frac{\omega}{10}$$

soit : 
$$G_{dB} = 20 \log G(\omega) \sim 20 \log \omega - 20 \text{ dB}$$

Nous pouvons donc tracer le premier segment asymptotique du diagramme de gain, valable entre 0 et la première pulsation de coupure, c'est-à-dire  $\omega = 1$  rad/s (figure 3.20). Il s'agit d'un segment de pente  $[+1]$  autrement dit 20 dB/décade. La connaissance d'un point suffit donc pour tracer de segment, par exemple :

$$G_{dB}(1) = -20 \text{ dB}$$

Le premier segment asymptotique, sur l'intervalle  $[0, 1]$  possède donc une pente de 20 dB/décade et s'arrête au point  $(1, -20 \text{ dB})$ , comme indiqué sur la figure 3.20.

Au delà de la pulsation de coupure  $\omega = 1$  rad/s, nous changeons de direction asymptotique ; comme le terme  $(p + 1)$  se trouve au dénominateur, la pente se décrémente d'une unité. Nous obtenons donc un segment de droite de pente  $[0]$ . Ce

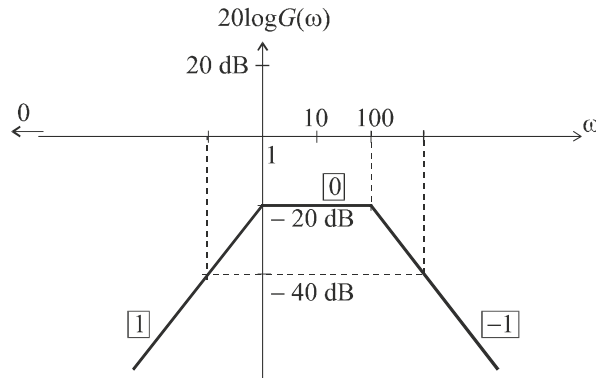


Figure 3.20 Diagramme de Bode de gain du système.

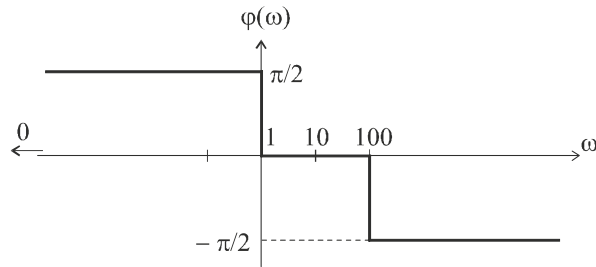


Figure 3.21 Diagramme de Bode de phase du système.

segment formant un graphe continu avec le segment précédent, il est facile à tracer et reste valable jusqu'à la coupure suivante ( $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ).

À partir de  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ , nous aurons une direction asymptotique de pente  $[-1]$  puisque le terme  $(p + 100)$  se trouve au dénominateur. Veillons à respecter la valeur de la pente : entre 100 et 1000 rad/s, le gain chute de 20 dB (pente  $-20 \text{ dB/décade}$ ).

Le diagramme asymptotique de phase se déduit immédiatement du diagramme de gain en associant à chaque segment de pente  $[n]$  une direction asymptotique de phase égale à  $n\pi/2$ .

**3.4** Déterminons tout d'abord un équivalent du gain lorsque  $p$  tend vers 0 (c'est-à-dire lorsque  $\omega$  tend vers 0).

On a :

$$G(p) \sim 1 \Rightarrow G(\omega) \sim 1$$

soit :

$$G_{dB} = 0 \text{ dB}$$

Nous pouvons donc tracer le premier segment asymptotique du diagramme de gain, valable entre 0 et la première pulsation de coupure, c'est-à-dire  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  (figure 3.22). Il s'agit d'un segment horizontal.

Au delà de la pulsation de coupure  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ , nous changeons de direction asymptotique ; comme le terme  $(p + 1)$  se trouve au numérateur, nous avons désormais une pente  $[1]$ . Le nouveau segment reste valable jusqu'à la coupure suivante ( $\omega = 10 \text{ rad/s}$ ). Le segment possédant une pente de  $20 \text{ dB/décade}$ , il s'arrête donc au point de coordonnées  $(10, 20 \text{ dB})$ .

À partir de  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ , la pente se décrémente de deux unités puisque le terme  $(p + 10)$  se trouve au dénominateur et est élevé au carré. Le nouveau segment va du point  $(10, 20 \text{ dB})$  au point  $(100, 0 \text{ dB})$  puisqu'il possède une pente égale à  $-20 \text{ dB/décade}$ . Enfin, au delà de la pulsation  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ , nous retrouvons une pente  $[0]$ .

Le diagramme asymptotique de phase se déduit immédiatement du diagramme de gain en associant à chaque segment de pente  $[n]$  une direction asymptotique de phase égale à  $n\pi/2$ .

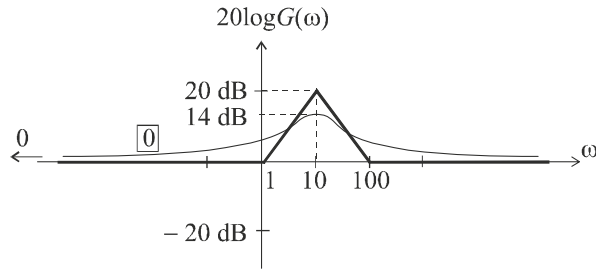


Figure 3.22 Diagramme de Bode de gain du système.

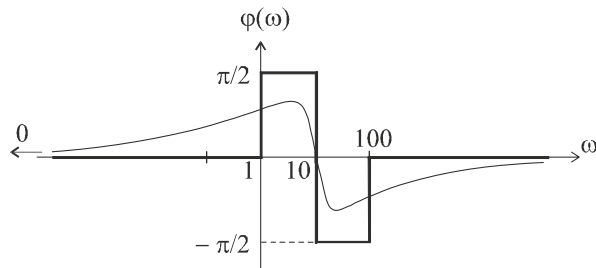


Figure 3.23 Diagramme de Bode de phase du système.

De toute évidence, le diagramme asymptotique de gain est symétrique par rapport à la droite d'équation  $\omega = 10$  rad/s. Il est néanmoins nécessaire de démontrer que le diagramme de Bode réel possède la même symétrie. Pour ce faire considérons l'expression réelle du gain :

$$G(p) = \frac{(p + 1)(p + 100)}{(p + 10)^2} \Rightarrow G(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1}\sqrt{\omega^2 + 10^4}}{\omega^2 + 100}$$

Pour démontrer la symétrie, il nous faut montrer que le gain pour une pulsation donnée  $\omega_1$  est égal au gain pour la pulsation  $\omega_2$  qui lui est symétrique par rapport à  $\omega = 10$  rad/s. Mais attention, nous sommes sur une échelle logarithmique (figure 3.24).

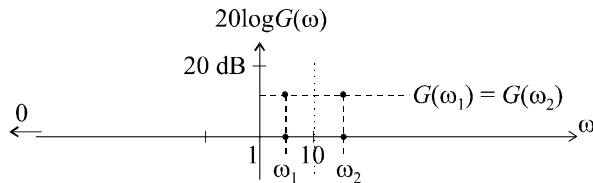


Figure 3.24 Conditions de symétrie.

Par conséquent, la condition d'équidistance ( $\omega_1 \leftrightarrow 10$ ) et ( $10 \leftrightarrow \omega_2$ ) s'exprime de la manière suivante :

$$\log 10 - \log \omega_1 = \log \omega_2 - \log 10$$

Soit :  $\log \omega_2 + \log \omega_1 = 2 \log 10 = \log 100$

d'où :  $\omega_2 = \frac{100}{\omega_1}$

Pour démontrer la symétrie du diagramme de gain réel par rapport à la droite d'équation  $\omega = 10$  rad/s, il faut que l'expression du gain soit inchangée lorsque l'on change  $\omega$  en  $100/\omega$ .

On peut également chercher à montrer que :  $G\left(\frac{100}{p}\right) = G(p)$

$$G\left(\frac{100}{p}\right) = \frac{\left(\frac{100}{p} + 1\right) \left(\frac{100}{p} + 100\right)}{\left(\frac{100}{p} + 10\right)^2}$$

Multiplions cette fonction, au numérateur comme au dénominateur, par  $p^2$ .

On obtient :  $G\left(\frac{100}{p}\right) = \frac{(100+p)(100+100p)}{(100+10p)^2} = \frac{100(100+p)(1+p)}{100(10+p)^2} = G(p)$

La symétrie du diagramme réel est donc bien démontrée. Le gain maximal est donc obligatoirement obtenu pour  $\omega = 10$  rad/s.

On a donc :  $G_{\max} = \frac{\sqrt{100+1} \times \sqrt{100+10^4}}{100+100} \approx 5$

soit :  $G_{\max} \approx 20 \log 5 \approx 14$  dB

Par ailleurs, la valeur du déphasage, pour  $\omega = 10$  rad/s est définie par :

$$\varphi(\omega_{\max}) = \arctan 10 + \arctan \frac{1}{10} - 2 \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan 1 = 0$$

La connaissance de  $G_{\max}$  et celle du déphasage correspondant permettent d'esquisser le tracé réels des deux courbes (figures 3.22 et 3.23).

### 3.5 Calculons l'expression du gain réel :

On considère le système de fonction de transfert  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{K}{(p+1)(p+100)} \Rightarrow G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+10^4}}$$

Pour  $\omega_{c0}$ , on a :  $G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{\omega_{c0}^2+1}\sqrt{\omega_{c0}^2+10^4}} = 1$



d'où :

$$G(\omega_0) = \frac{K}{\sqrt{5^2 + 1}\sqrt{5^2 + 10^4}} = 1$$

On en déduit :

$$K = \sqrt{25 + 1}\sqrt{25 + 10^4} = 511$$

**3.6** Déterminons tout d'abord un équivalent du gain lorsque  $p$  tend vers 0 (c'est-à-dire lorsque  $\omega$  tend vers 0).

On a :

$$G(p) \approx \frac{10}{p} \Rightarrow G(\omega) \approx \frac{10}{\omega}$$

soit :

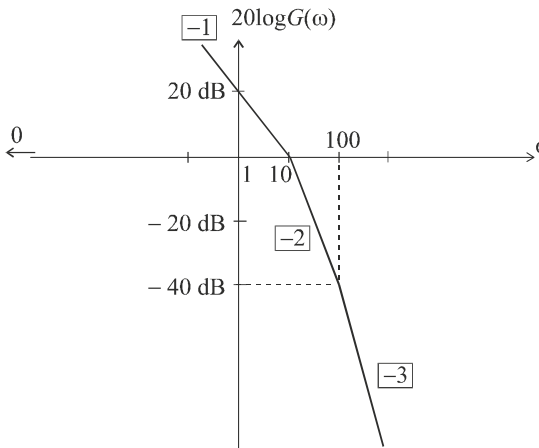
$$G_{dB} = 20 \log G(\omega) \sim 20 \text{ dB} - 20 \log \omega$$

Nous pouvons donc tracer le premier segment asymptotique du diagramme de gain, valable entre 0 et la première pulsation de coupure, c'est-à-dire  $\omega = 10 \text{ rad/s}$  (figure 3.25). Il s'agit d'un segment de pente  $[-1]$  autrement dit  $-20 \text{ dB/décade}$ . La connaissance d'un point suffit donc pour tracer de segment, par exemple :

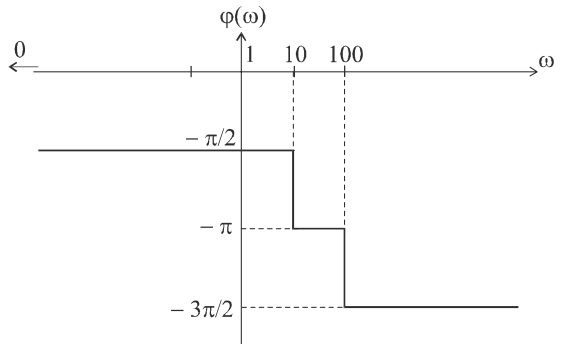
$$G_{dB}(1) = 20 \text{ dB} \text{ ou encore } G_{dB}(10) = 0 \text{ dB}$$

Le premier segment asymptotique, sur l'intervalle  $[0, 10]$  possède donc une pente de  $-20 \text{ dB/décade}$  et s'arrête au point  $(10, 0 \text{ dB})$ , comme indiqué sur la figure 3.25.

Au delà de la pulsation de coupure  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ , nous changeons de direction asymptotique ; comme le terme  $(p + 10)$  se trouve au dénominateur, la pente se décrémente d'une unité. Nous obtenons donc un segment de droite de pente  $[-2]$ . Ce segment formant un graphe continu avec le segment précédent, il est facile à tracer et reste valable jusqu'à la coupure suivante ( $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ).



**Figure 3.25** Diagramme de Bode de gain du système.



**Figure 3.26** Diagramme de Bode de phase du système.

À partir de  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ , nous aurons une direction asymptotique de pente  $[-3]$  puisque le terme  $(p + 100)$  se trouve au dénominateur. Veillons à respecter la valeur de la pente : entre 100 et 1000 rad/s, par exemple, le gain chute de 60 dB (pente  $-60 \text{ dB/décade}$ ).

Le diagramme asymptotique de phase se déduit immédiatement du diagramme de gain en associant à chaque segment de pente  $[n]$  une direction asymptotique de phase égale à  $n\pi/2$ .

La meilleure technique, pour tracer le diagramme de Nyquist à partir du diagramme de Bode, consiste à considérer le diagramme de phase :

Le déphasage  $\varphi(\omega)$  varie entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $-\frac{3\pi}{2}$ . Dans le plan de Nyquist représenté sur la figure 3.27, cela correspond aux deux secteurs grisés. Lorsque  $\omega = 0$  (point de départ du lieu de Nyquist), ce déphasage vaut  $-\frac{\pi}{2}$  et le gain est infini. Il faut, pour esquisser la courbe, imaginer une rotation autour du point O, ici entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $-\frac{3\pi}{2}$  et reporter, tout en tournant, la valeur du gain. La courbe recherchée part du secteur grisé inférieur, coupe l'axe des réels ( $\varphi(\omega) = -\pi$ ) pour un gain déjà inférieur à 1 et termine sa course au point O avec une tangente verticale. En effet, lorsque  $\varphi(\omega)$  varie entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $-\frac{3\pi}{2}$ , le gain ne fait que décroître de l'infini à 0.

Pour démontrer l'existence d'une asymptote lorsque  $\omega \rightarrow 0$ , calculons la fonction de transfert en fréquence :

$$G(j\omega) = \frac{10^4}{j\omega(j\omega + 10)(j\omega + 100)}$$

Il convient de séparer la partie réelle et la partie imaginaire pour pouvoir faire une étude aux limites :

$$G(j\omega) = \frac{10^4}{j\omega(j\omega + 10)(j\omega + 100)} = -\frac{10^4 j\omega(-j\omega + 10)(-j\omega + 100)}{\omega^2(\omega^2 + 100)(\omega^2 + 10^4)}$$

Soit :

$$G(j\omega) = -\frac{10^4 j\omega(1000 - \omega^2 - 110j\omega)}{\omega^2(\omega^2 + 100)(\omega^2 + 10^4)}$$

d'où :

$$G(j\omega) = -\frac{10^4 \times 110}{(\omega^2 + 100)(\omega^2 + 10^4)} - j\frac{10^4(1000 - \omega^2)}{\omega(\omega^2 + 100)(\omega^2 + 10^4)}$$

On vérifie bien que la partie imaginaire tend vers  $-\infty$ , lorsque  $\omega \rightarrow 0$  et on montre que la partie réelle tend vers  $-1,1$ . La droite d'équation  $X = -1,1$  est donc asymptote à la courbe.

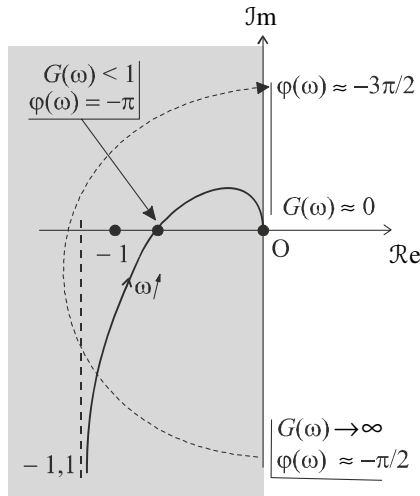


Figure 3.27 Diagramme de Nyquist du système.

3.7 Déterminons tout d'abord un équivalent du gain lorsque  $p$  tend vers 0 (c'est-à-dire lorsque  $\omega$  tend vers 0).

On a :

$$G(p) \approx \frac{100}{p} \Rightarrow G(\omega) \approx \frac{100}{\omega}$$

soit :

$$G_{dB} = 20 \log G(\omega) \sim 40 \text{ dB} - 20 \log \omega$$

Nous pouvons donc tracer le premier segment asymptotique du diagramme de gain, valable entre 0 et la première pulsation de coupure, c'est-à-dire  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  (figure 3.28). Il s'agit d'un segment de pente  $[-1]$  autrement dit  $-20 \text{ dB/décade}$ . La connaissance d'un point suffit donc pour tracer ce segment, par exemple :

$$G_{dB}(1) = 40 \text{ dB}$$

Le premier segment asymptotique, sur l'intervalle  $[0, 1]$  possède donc une pente de  $-20 \text{ dB/décade}$  et s'arrête au point  $(1, 40 \text{ dB})$ , comme indiqué sur la figure 3.28.

Au delà de la pulsation de coupure  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ , nous changeons de direction asymptotique ; comme le terme  $(p + 1)$  se trouve au dénominateur et qu'il est élevé au carré, la pente se décrémente de deux unités. Nous obtenons donc un segment de droite de pente  $[-3]$ . Ce segment formant un graphe continu avec le segment précédent, il est facile à tracer et reste valable jusqu'à la coupure suivante ( $\omega = 10 \text{ rad/s}$ ).

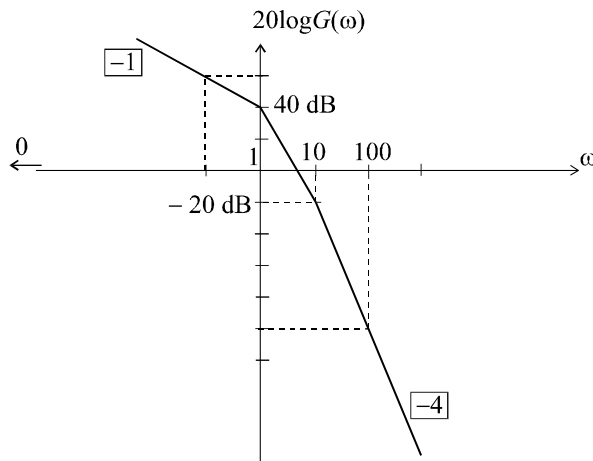


Figure 3.28 Diagramme de Bode de gain du système.

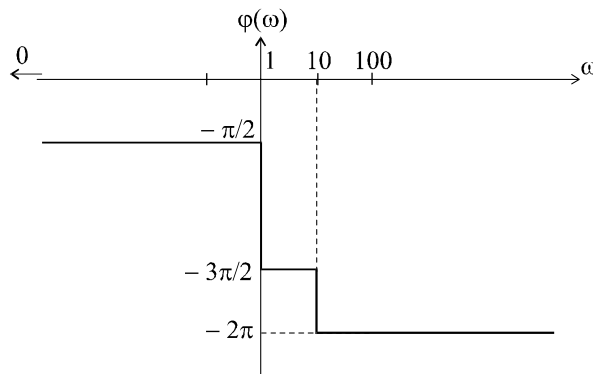


Figure 3.29 Diagramme de Bode de phase du système.

À partir de  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ , nous aurons une direction asymptotique de pente  $[-4]$  puisque le terme  $(p + 10)$  se trouve au dénominateur. Veillons à respecter la valeur de la pente : entre 10 et 100 rad/s, par exemple, le gain chute de 80 dB (pente  $-80 \text{ dB/décade}$ ).

Le diagramme asymptotique de phase se déduit immédiatement du diagramme de gain en associant à chaque segment de pente  $[n]$  une direction asymptotique de phase égale à  $n\pi/2$ .

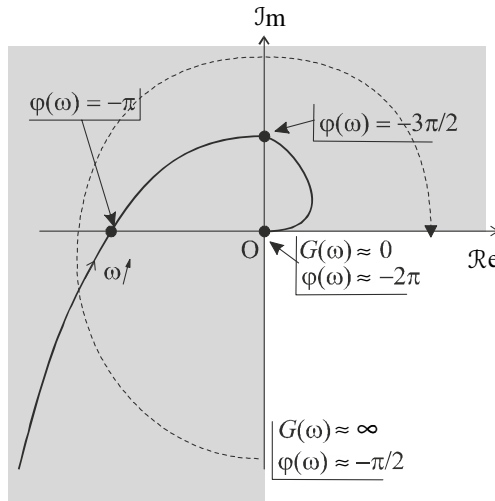


Figure 3.30 Diagramme de Nyquist du système.

La meilleure technique, pour tracer le diagramme de Nyquist à partir du diagramme de Bode, consiste à considérer le diagramme de phase :

Le déphasage  $\varphi(\omega)$  varie entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $-2\pi$ . Dans le plan de Nyquist représenté sur la figure 3.29, cela correspond aux trois secteurs grisés. Lorsque  $\omega = 0$  (point de départ du lieu de Nyquist), ce déphasage vaut  $-\frac{\pi}{2}$  et le gain est infini.

Il faut, pour esquisser la courbe, imaginer une rotation autour du point O, ici entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $-2\pi$  et reporter, tout en tournant, la valeur du gain. La courbe recherchée part du secteur grisé inférieur, coupe l'axe des réels, puis l'axe des imaginaires et termine sa course au point O avec une tangente horizontale. En effet, lorsque  $\varphi(\omega)$  varie entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $-2\pi$ , le gain ne fait que décroître de l'infini à 0.

Pour démontrer l'existence d'une asymptote lorsque  $\omega \rightarrow 0$ , calculons la fonction de transfert en fréquence :

$$G(j\omega) = \frac{1000}{j\omega(j\omega + 1)^2(j\omega + 10)}$$

Soit :

$$G(j\omega) = -\frac{1000j\omega(-j\omega + 1)^2(-j\omega + 10)}{\omega^2(\omega^2 + 1)^2(\omega^2 + 100)}$$

d'où :

$$\Re[G(j\omega)] = -\frac{20000 + 1000(1 - \omega^2)}{(\omega^2 + 1)^2(\omega^2 + 100)}$$

Cet équivalent nous montre que la partie réelle tend bien vers une valeur finie lorsque  $\omega \rightarrow 0$ . La droite d'équation  $X = -210$  est asymptote à la courbe.

3.8 Nous pouvons résumer le modèle de fonctionnement du système par la relation :

$$S(p) = G(p)E(p) = \frac{10}{(p + 1)^2}$$

Compte tenu que la transformée de Laplace du signal  $e(t)$  a pour expression :

$$E(p) = \frac{1}{p + 1}$$

Le signal de sortie  $s(t)$  est de toute évidence un signal à énergie finie puisque la transformée de Laplace inverse de  $S(p)$  a pour expression :

$$s(t) = 10t e^{-t}$$

Par conséquent, les deux signaux possèdent chacun une transformée de Fourier et celles-ci sont liées par la relation :

$$S(j\omega) = G(j\omega)E(j\omega) = \frac{10}{(j\omega + 1)^2}$$

Le spectre du signal de sortie est donc :

$$|S(j\omega)| = \frac{10}{\omega^2 + 1}$$

**3.9** Lorsque l'on injecte un signal d'entrée sinusoïdal dans un système linéaire, son signal de sortie est également sinusoïdal, de même pulsation. Le rapport des amplitudes entre le signal de sortie et le signal d'entrée nous est donné par la fonction  $G(\omega)$ . La fonction  $\varphi(\omega)$  nous donne le déphasage de la sinusoïde de sortie par rapport à celle d'entrée.

Si on pose :

$$e(t) = A \cos \omega t \text{ et } s(t) = B \cos(\omega t + \varphi)$$

on a :

$$\frac{B}{A} = G(\omega) \text{ et } \varphi = \arg G(j\omega)$$

Or :

$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega + 10)}{(j\omega + 1)}$$

d'où :

$$G(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{10\sqrt{\omega^2 + 100}}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

et :

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \arctan \frac{\omega}{10} - \arctan \omega$$

Nous pouvons alors aisément calculer l'expression du signal de sortie dans les deux cas proposés.

Pour :

$$e(t) = 10 \cos t$$

on a :

$$s(t) = 10G(1) \cos [t + \varphi(1)]$$

soit :

$$s(t) = 711 \cos [t - 0,69]$$

Pour :

$$e(t) = 100 \cos 1000t$$

on a :

$$s(t) = 100G(1000) \cos [1000t + \varphi(1000)]$$

soit :

$$s(t) \approx 1000 \cos [1000t]$$

## Chapitre 4

# Étude systématique des systèmes du premier et du second ordre

### 4.1 MÉTHODES D'ÉTUDE ET DÉFINITIONS

L'étude complète d'un système est composée de deux parties : son étude temporelle et son étude fréquentielle. En ce qui concerne l'étude temporelle, nous nous intéresserons ici à identifier les réponses  $s(t)$  des systèmes étudiés à des signaux d'entrée  $e(t)$  relativement simples, appelés entrées canoniques, qui sont l'impulsion de Dirac  $\delta(t)$ , l'échelon unitaire  $u(t)$  et la rampe unitaire  $v(t)$ .

La réponse d'un système à une impulsion de Dirac est appelée réponse impulsionnelle ; la réponse d'un système à un échelon unitaire est appelé réponse indicielle.

*Remarque* : Rappelons que l'impulsion de Dirac reste un signal à la réalité toute théorique puisqu'il est censé correspondre à une impulsion infiniment courte, infiniment haute et dont le produit de la durée par la hauteur vaut 1. Toutefois, malgré l'impossibilité de créer de véritables impulsions de Dirac dans la pratique, nous montrerons, dans les pages qui suivent, que l'étude impulsionnelle présente un intérêt certain.

L'étude fréquentielle sera menée en construisant systématiquement les diagrammes de Bode et de Nyquist des systèmes étudiés.

### 4.2 ÉTUDE DES SYSTÈMES DU PREMIER ORDRE

#### 4.2.1 Mise en équation

Les systèmes du premier ordre sont régis par des équations différentielles du premier degré. Leur fonction de transfert possède donc au maximum un zéro et un pôle. En physique, de tels systèmes sont très nombreux et, en général, ils ne possèdent pas de zéro. L'équation la plus couramment rencontrée est donc du type :

$$T \frac{ds}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

Les deux constantes  $T$  et  $K$  sont des nombres réels en général positifs.  $T$  est appelée constante de temps du système.  $K$  est appelée le gain statique. Ces deux appellations trouveront leur justification dans les résultats de l'étude que nous allons mener.

Ces systèmes sont encore parfois appelés systèmes à une seule constante de temps.

La fonction de transfert du système se déduit immédiatement de l'équation différentielle qui régit son fonctionnement en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres :

$$TpS(p) + S(p) = KE(p)$$

soit :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + Tp}$$

### 4.2.2 Réponse à une impulsion de Dirac

On étudie la réponse du système à une entrée  $e(t) = \delta(t)$ . On a donc :

$$E(p) = 1$$

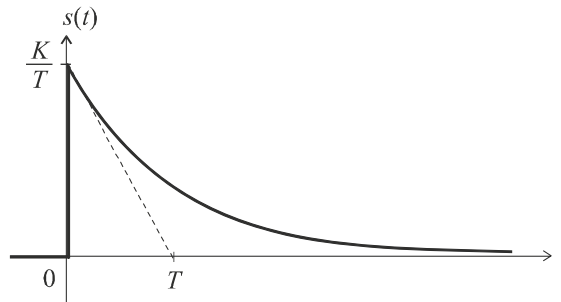
d'où :

$$S(p) = G(p) = \frac{K}{1 + Tp}$$

La transformée de Laplace correspond très exactement à la fonction de transfert du système ce qui est la particularité essentielle de la réponse impulsionnelle. On calcule facilement  $s(t)$  à partir de la table des transformées de Laplace

$$s(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

La constante de temps du système,  $T$  (qui porte bien son nom) peut être mise en évidence très facilement sur le graphique (figure 4.1). Comme dans toute fonction exponentielle décroissante, la tangente à l'origine coupe l'asymptote (ici, l'axe des abscisses) au point d'abscisse  $T$ .



**Figure 4.1** Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre.

**Remarque :** On peut noter qu'il existe une discontinuité (théorique) en  $t = 0$ . Dans la réalité physique, cette discontinuité n'existe pas plus que l'impulsion de Dirac parfaite...

### 4.2.3 Réponse indicielle

On étudie la réponse du système à un échelon unitaire  $e(t) = u(t)$ . On a donc :

$$E(p) = \frac{1}{p}$$

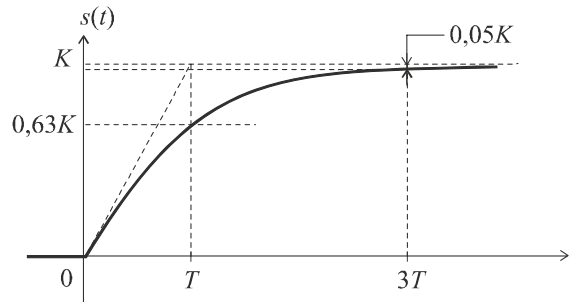
d'où :

$$S(p) = G(p) \cdot \frac{1}{p} = \frac{K}{p(1+Tp)}$$

On calcule facilement  $s(t)$  à partir de la table des transformées de Laplace :

$$s(t) = K \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

La constante de temps du système peut une fois de plus être facilement mise en évidence sur le graphique (figure 4.2). On remarquera ici aussi la position de la tangente à l'origine ainsi que l'asymptote en  $K$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.



**Figure 4.2** Réponse indicielle d'un système du premier ordre.

On peut définir, à partir de ce graphe, le temps de réponse  $t_r$  du système, par le temps au bout duquel la sortie atteint sa valeur asymptotique (on dit aussi de sa valeur à l'infini) à 5 % près. Il est facile de vérifier que ce temps de réponse est de l'ordre de  $3T$ .

On a :

$$s(t_r) = K \left( 1 - e^{-\frac{t_r}{T}} \right) = 0,95K$$

d'où :

$$\left( 1 - e^{-\frac{t_r}{T}} \right) = 0,95$$

Soit :

$$e^{-\frac{t_r}{T}} = 0,05$$

et finalement :

$$t_r = -T \ln 0,05 \approx 3T$$

Par ailleurs :

$$s(T) = K \left( 1 - e^{-1} \right) \approx 0,63K$$

#### 4.2.4 Réponse à une entrée en rampe

On étudie maintenant la réponse du système à une rampe unitaire  $e(t) = v(t) = t$ . On a donc :

$$E(p) = \frac{1}{p^2}$$

d'où :

$$S(p) = G(p) \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{K}{p^2(1+Tp)}$$

On remarque que cette expression est la transformée de Laplace d'une primitive de la sortie précédemment calculée.



En effet :

$$S(p) = \frac{1}{p} \left[ \frac{K}{p(1+Tp)} \right]$$

Il suffit donc d'intégrer l'expression trouvée pour la réponse indicielle :

$$s(t) = \int K \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) dt = \int K dt - \int K e^{-\frac{t}{T}} dt$$

$$s(t) = Kt + KT e^{-\frac{t}{T}} + C^{te}$$

La constante est facilement calculable, puisque l'ordonnée à l'origine des temps est forcément nulle. On a alors :

$$s(0) = KT + C^{te} = 0 \Rightarrow C^{te} = -KT$$

Finalement :

$$s(t) = K(t - T) + KT e^{-\frac{t}{T}}$$

La forme de cette expression nous permet de mettre en évidence une asymptote oblique à la courbe de  $s(t)$ .

En effet, le terme  $s(t) = KT e^{-\frac{t}{T}}$  tendant vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini, on a :  $s(t) \approx K(t - T)$ .

Comme le terme  $KT e^{-\frac{t}{T}}$  est toujours strictement positif, la courbe se trouve en permanence au dessus de son asymptote. Par ailleurs la tangente en 0 à la courbe nous est donnée par le calcul de la dérivée en  $t = 0$  :

$$\frac{ds}{dt} = K \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \Rightarrow \frac{ds}{dt}(0) = 0$$

Il est donc facile, à partir de ces éléments, de tracer le graphe de  $s(t)$ .

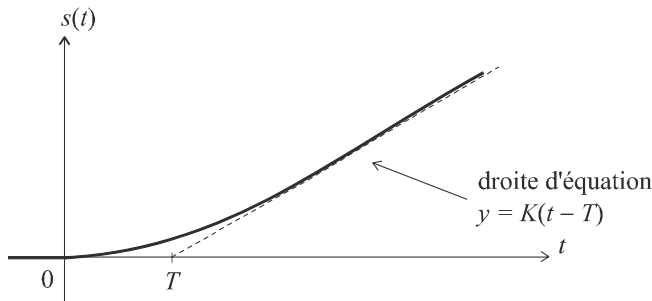


Figure 4.3 Réponse d'un système du premier ordre à une entrée en rampe.

### 4.2.5 Étude fréquentielle d'un système d'ordre 1

#### a) Diagramme de Bode

L'étude du diagramme de Bode d'un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{K}{1+Tp}$  a été menée dans le chapitre précédent. Nous nous limiterons ici à rappeler les principaux résultats obtenus (figure 4.4) et étudierons le tracé du diagramme de Nyquist.

D'un point de vue physique, nous pouvons constater que le système possède un comportement sélectif vis-à-vis des composantes de ses signaux d'entrée. Ce comportement qui consiste à amplifier les basses fréquences et à atténuer les hautes fréquences est qualifié de *passé-bas*.

Sur le graphe de la figure 4.4, nous pouvons noter la présence d'une *pulsation de coupure* à 0 dB notée  $\omega_{c,0}$  en dessous de laquelle les composantes spectrales sont amplifiées (gain supérieur à 1) et au-delà de laquelle elles sont atténuées (gain inférieur à 1).

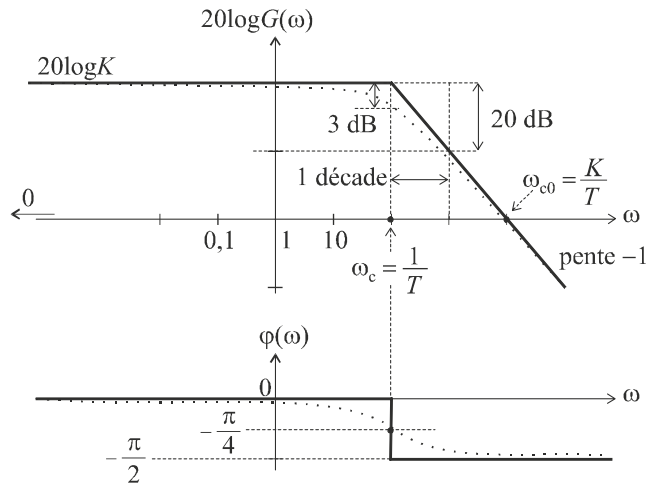


Figure 4.4 Diagramme de Bode d'un système du premier ordre.

**Remarque :** On veillera à ne pas confondre cette pulsation de coupure à 0 dB avec la pulsation de coupure à -3 dB qui correspond à la « cassure » du diagramme de gain. Par ailleurs, le paramètre  $K$  qui correspond au gain aux fréquences proches de 0 porte bien son nom de gain statique.

b) Diagramme de Nyquist

Comme étudié au chapitre précédent, le diagramme de Nyquist consiste à tracer, dans le plan complexe, le lieu des points d'affixe  $G(j\omega)$  lorsque  $\omega$  varie de 0 à  $+\infty$ .

On a :

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + jT\omega} = \frac{K(1 - jT\omega)}{(1 + jT\omega)(1 - jT\omega)} = \frac{K(1 - jT\omega)}{1 + T^2\omega^2}$$

soit :

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + T^2\omega^2} + j \frac{-KT\omega}{1 + T^2\omega^2} = X + jY$$

Les parties réelle et imaginaire sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée de chaque point de la courbe. Nous pouvons remarquer que :

$$\begin{aligned} \left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 &= \left(\frac{K}{1 + T^2\omega^2} - \frac{K}{2}\right)^2 + \left(\frac{KT\omega}{1 + T^2\omega^2}\right)^2 \\ \left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 &= \left(\frac{2K - K(1 + T^2\omega^2)}{2(1 + T^2\omega^2)}\right)^2 + \left(\frac{KT\omega}{1 + T^2\omega^2}\right)^2 \\ \left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 &= \left(\frac{K(1 - T^2\omega^2)}{2(1 + T^2\omega^2)}\right)^2 + \left(\frac{KT\omega}{1 + T^2\omega^2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 &= \frac{K^2 (1 - T^2 \omega^2)^2 + 4K^2 T \omega_2^2}{4 (1 + T^2 \omega^2)^2} \\ \left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 &= \frac{K^2 (1 + T^4 \omega^4 - 2T \omega_2^2) + 4K^2 T \omega_2^2}{4 (1 + T^2 \omega^2)^2} \\ \left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 &= \frac{K^2 (1 + T^4 \omega^4 + 2T \omega_2^2)}{4 (1 + T^2 \omega^2)^2} = \frac{K^2 (1 + T^2 \omega^2)^2}{4 (1 + T^2 \omega^2)^2} = \frac{K^2}{4} \end{aligned}$$

L'équation  $\left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{K^2}{4}$  correspond à un cercle de centre  $\left(\frac{K}{2}; 0\right)$  et de rayon  $\frac{K}{2}$ . Toutefois, le diagramme de Nyquist ne correspond pas au cercle entier.

En effet, on a : 
$$Y = \frac{-KT\omega}{1 + T^2\omega^2} < 0$$

Le diagramme est donc le demi-cercle de centre  $\left(\frac{K}{2}; 0\right)$  et de rayon  $\frac{K}{2}$  correspondant au demi-plan  $Y < 0$  (en trait plein sur la figure 4.5).

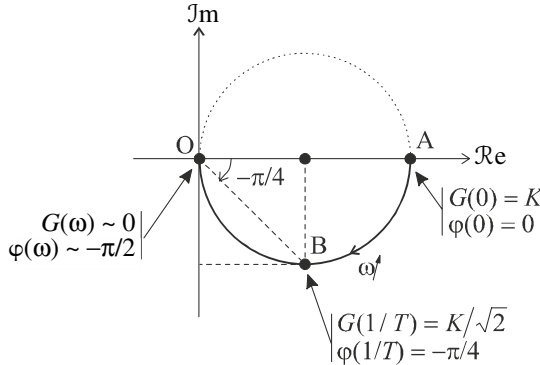


Figure 4.5 Diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre.

**Remarque :** Trois points particuliers sont à considérer : le point de départ du lieu au point de coordonnées  $(K, 0)$  correspondant à la pulsation nulle, le point B correspondant à la pulsation de coupure à  $-3$  dB ; rappelons ici que :

$$G(1/T) = \frac{K}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 20 \log G(1/T) = 20 \log K - 3 \text{ dB}$$

Enfin, le point O, point d'arrivée de la courbe lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$ . Ces différents points peuvent également être repérés dans le diagramme de Bode.

## 4.3 ÉTUDE DES SYSTÈMES DU SECOND ORDRE

### 4.3.1 Mise en équation

Les systèmes du second ordre sont régis par des équations différentielles du second degré. Leur fonction de transfert possède donc au maximum deux zéros et deux pôles. En physique, de tels systèmes sont très nombreux et, en général, ils ne possèdent pas de zéro. L'équation la plus couramment rencontrée est donc du type :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} \frac{ds}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

Les trois constantes  $\omega_n$ ,  $\xi$  (prononcer *ksti*) et  $K$  sont des nombres réels en général positifs.  $\omega_n$  est appelée pulsation propre du système ;  $\xi$  est appelée coefficient ou facteur d'amortissement.  $K$  est le gain statique du système. Ces appellations trouveront leur justification dans les résultats de l'étude que nous allons mener.

**Remarque :** Nous avons placé l'équation sous cette forme pour faire apparaître ces trois paramètres dont l'importance sera bientôt mise en évidence.

La fonction de transfert du système se déduit immédiatement de l'équation différentielle qui régit son fonctionnement en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres :

$$\frac{p^2}{\omega_n^2} S(p) + \frac{2\xi p}{\omega_n} S(p) + S(p) = KE(p)$$

soit :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$

### 4.3.2 Réponse indicielle

On étudie la réponse du système à un échelon unitaire  $e(t) = u(t)$ .

On a donc :

$$E(p) = \frac{1}{p}$$

D'où :

$$S(p) = \frac{G(p)}{p} = \frac{K}{p \left( \frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1 \right)}$$

Pour calculer l'expression de  $s(t)$ , il suffit d'invoquer la transformée de Laplace inverse à l'aide d'un logiciel de calcul formel comme Mathematica. Trois cas sont à considérer selon le signe du discriminant du polynôme du dénominateur.

On a :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \frac{4\xi^2}{\omega_n^2} - \frac{4}{\omega_n^2} = \frac{4}{\omega_n^2} (\xi^2 - 1)$$

a) *Discriminant positif*

On a :

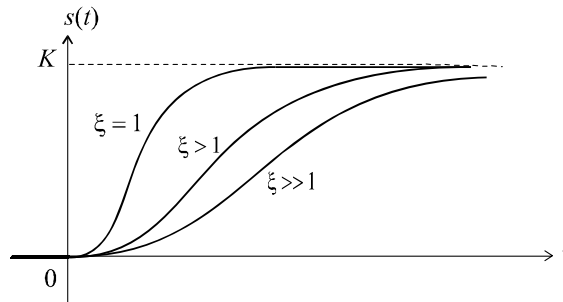
$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \xi > 1$$

Dans ce cas, on a :

$$s(t) = Ku(t) - \frac{K}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[ \left( \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) e^{-\omega_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})t} - \left( \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) e^{-\omega_n(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})t} \right]$$

**Attention :** cette expression n'est valable que pour  $t > 0$ . Pour  $t < 0$ , le signal de sortie est bien évidemment nul.

L'étude sommaire de cette fonction montre la présence d'une asymptote en  $K$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  et une tangente à l'origine nulle. Les deux termes en exponentielles décroissent d'autant plus lentement que  $\xi$  est grand ; dans ce cas, le signal  $s(t)$  tend moins rapidement vers son asymptote. Le graphe de la figure 4.6 présente l'évolution de  $s(t)$  pour diverses valeurs de  $\xi$ .



**Figure 4.6** Réponse indicielle d'un système du second ordre à coefficient d'amortissement supérieur à 1

**Remarque :** la réponse la plus rapide est observée pour un facteur d'amortissement très proche de 1.

b) *Discriminant nul*

On a : 
$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \xi = 1$$

La réponse a pour expression :

$$s(t) = Ku(t) - K(1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}$$

Comme cela était prévisible d'après l'étude menée précédemment, nous obtenons une réponse qui tend très rapidement vers l'asymptote (voir figure 4.6).

c) *Discriminant négatif*

On a : 
$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 0 < \xi < 1$$

On obtient cette fois :

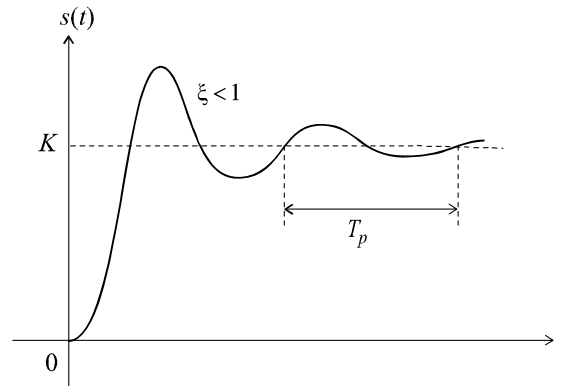
$$s(t) = Ku(t) - Ke^{-\xi\omega_n t} \left[ \cos \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t \right]$$

Ou encore :

$$s(t) = Ku(t) - \frac{K}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \left[ \sin \left( \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right) \right]$$

Nous constatons que la réponse du système est constituée de la différence de deux signaux : le signal  $Ku(t)$ , échelon de hauteur  $K$  et un signal sinusoïdal encadré par une enveloppe en exponentielle décroissante, qui tend donc vers 0 en oscillant.

Le graphe de  $s(t)$  possède donc une asymptote vers la constante  $K$  lorsque  $t$  tend vers l'infini et le signal tend vers cette asymptote en présentant un régime dit *oscillatoire amorti* (voir figure 4.7).



**Figure 4.7** Réponse indicielle d'un système du second ordre à coefficient d'amortissement inférieur à 1

**Remarque :** Les oscillations sont d'autant plus importantes (en hauteur et en durée) que le facteur d'amortissement est faible. S'il est nul, le signal de sortie est une sinusoïde oscillant entre 0 et  $2K$ .

#### d) Synthèse

De la valeur de  $\xi$  qui porte finalement bien son nom de facteur d'amortissement, dépend le type de réponse du système.

- Régime *amorti* :  $\xi > 1$ . Dans le cas du régime amorti, la sortie du système tend d'autant plus lentement vers sa valeur finale  $K$  que  $\xi$  est grand.
- Régime *critique* :  $\xi = 1$ . Le régime critique est caractérisé par la réponse la plus rapide possible : le signal  $s(t)$  tend très vite vers sa valeur finale et ce, sans oscillations.
- Régime *oscillatoire amorti* :  $\xi < 1$ . Dans le cas du régime oscillatoire amorti, la pulsation du signal sinusoïdal enveloppé par l'exponentielle décroissante a pour expression :

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

Elle est appelée pseudo-pulsation du régime oscillatoire amortie. Elle est toujours inférieure à la pulsation  $\omega_n$ .

On définit également la pseudo-période de ces oscillations par :

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Cette pseudo-période est égale à l'intervalle de temps correspondant à une alternance complète de la sinusoïde amortie (voir figure 4.7). Elle est d'autant plus grande que  $\xi$  est proche de 1.

### 4.3.3 Diagramme de Bode

Nous cherchons à étudier le comportement fréquentiel du système de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$

Une première étude nous montre que :  $G(p) \approx K$  lorsque  $p \rightarrow 0$  ; donc  $G(\omega) \approx K$  lorsque  $\omega \rightarrow 0$ .

$$\text{Soit :} \quad G_{\text{dB}} = 20 \log G(\omega) \approx 20 \log K$$

$K$  est bien le gain à la fréquence nulle, autrement dit, le gain statique. De même, lorsque  $p \rightarrow +\infty$ , on a :

$$G(p) \approx \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2}} = \frac{\omega_n^2 K}{p^2}$$

$$\text{Soit, pour } \omega \rightarrow +\infty : \quad G_{\text{dB}} \approx 20 \log K + 40 \log \omega_n - 40 \log \omega$$

Ces deux équivalents nous fournissent les deux asymptotes à la courbe, respectivement pour  $\omega \rightarrow 0$  et pour  $\omega \rightarrow +\infty$ . Ces deux droites sont aisément placées dans le diagramme de Bode de la figure 4.8. On notera qu'elles se coupent au point d'abscisse  $\omega = \omega_n$ .

En effet, le point de concours des deux asymptotes est tel que :

$$20 \log K + 40 \log \omega_n - 40 \log \omega = 20 \log K$$

$$\text{Soit :} \quad 40 \log \omega_n - 40 \log \omega = 0$$

$$\text{d'où :} \quad \omega = \omega_n$$

Bien que très intéressants, ces éléments sont toutefois insuffisants pour tracer avec précision le diagramme de gain complet. Il nous faut pour cela, réaliser une étude plus approfondie.

#### a) Cas où $\xi$ est supérieur à 1

Les techniques étudiées au chapitre 3 ne nous ont appris à tracer des diagrammes de Bode que dans le cas où la fonction de transfert est factorisée dans  $\mathbb{R}$  ce qui n'est le cas que si  $\xi > 1$ . Alors, le dénominateur de  $G(p)$  possède deux racines réelles négatives :

$$p_1 = -\omega_n \left[ \xi - \sqrt{(\xi^2 - 1)} \right] \quad \text{et} \quad p_2 = -\omega_n \left[ \sqrt{(\xi^2 - 1)} + \xi \right]$$

$$\text{On a alors :} \quad S(p) = \frac{K \omega_n^2}{p(p - p_1)(p - p_2)}$$

Nous sommes alors en présence de deux pulsations de coupure, respectivement  $\omega_1 = -p_1$  et  $\omega_2 = -p_2$ .

$$\text{Soit :} \quad \omega_1 = \omega_n \left[ \xi - \sqrt{(\xi^2 - 1)} \right] \quad \text{et} \quad \omega_2 = \omega_n \left[ \sqrt{(\xi^2 - 1)} + \xi \right]$$

$$\text{De plus :} \quad \omega_1 < \omega_n \quad \text{et} \quad \omega_2 > \omega_n$$

Ces deux pulsations de coupure sont d'autant plus éloignées l'une de l'autre et de  $\omega_n$  que  $\xi$  est grand.

Nous en savons désormais assez pour tracer le diagramme de Bode complet, tout du moins pour ce cas  $\xi > 1$  (figure 4.9).

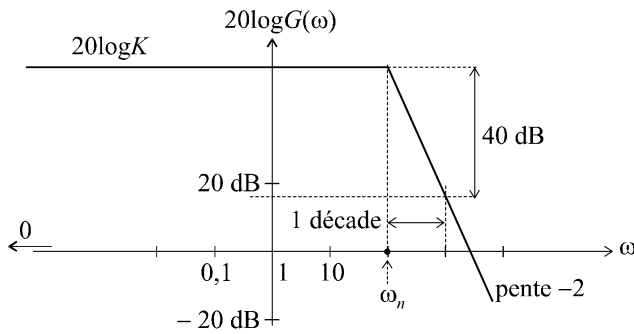


Figure 4.8 Asymptotes au diagramme de Bode.

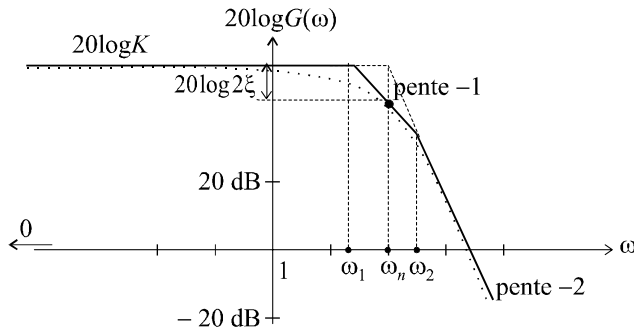


Figure 4.9 Diagramme de Bode d'un système du second ordre avec facteur d'amortissement supérieur à 1.

La courbe de gain réelle peut être esquissée à partir de ce diagramme asymptotique. On remarquera, notamment que :

$$G_{dB}(\omega_n) = 20 \log K - 20 \log 2\xi$$

En effet :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$

Soit :

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi j\omega}{\omega_n}}$$

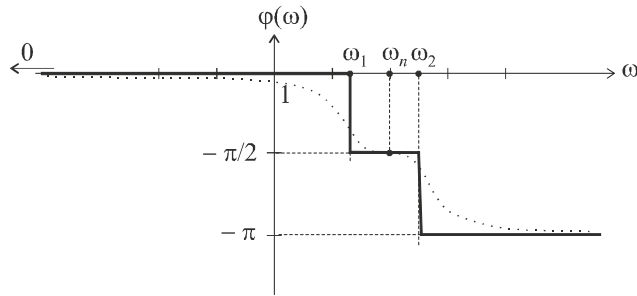
D'où :

$$G(j\omega_n) = \frac{K}{2\xi j} \Rightarrow 20 \log G(\omega_n) = 20 \log K - 20 \log 2\xi$$

**Remarque :** Cette expression reste valable quelque soit la valeur du coefficient d'amortissement.

Le diagramme de phase asymptotique se déduit immédiatement du diagramme de gain en déterminant chaque direction asymptotique de phase à partir de la pente du segment correspondant dans le diagramme de gain.





**Figure 4.10** Diagramme de phase d'un système du second ordre avec facteur d'amortissement supérieur à 1.

Pour esquisser le tracé réel de la courbe de déphasage, il semble intéressant de calculer la valeur exacte de  $\varphi(\omega_n)$ .

On a :

$$G(j\omega) = \frac{K\omega_n^2}{(j\omega + \omega_n [\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}])(j\omega + \omega_n [\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}])}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\omega_n [\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}]} - \arctan \frac{\omega}{\omega_n [\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}]}$$

$$\varphi(\omega_n) = -\arctan \frac{\omega_n}{\omega_n [\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}]} - \arctan \frac{\omega_n}{\omega_n [\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}]}$$

$$\varphi(\omega_n) = -\arctan \frac{1}{[\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}]} - \arctan \frac{1}{[\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}]}$$

Or :

$$\begin{aligned} \tan \left( \arctan \frac{1}{[\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}]} + \arctan \frac{1}{[\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}]} \right) &= \frac{\frac{1}{[\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}]} + \frac{1}{[\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}]} }{1 - \frac{1}{[\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}]} \cdot \frac{1}{[\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}]} } \\ &= \frac{[\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}] + [\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}]}{[\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}][\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}] - 1} \\ &= \frac{2\xi}{\xi^2 - \xi^2 + 1 - 1} \end{aligned}$$

Cette expression tend manifestement vers l'infini.

On a donc :

$$\varphi(\omega_n) = -\pi/2$$

b) Cas où  $\xi$  est égal à 1

On a : 
$$S(p) = \frac{K \omega_n^2}{(p + \omega_n)^2}$$

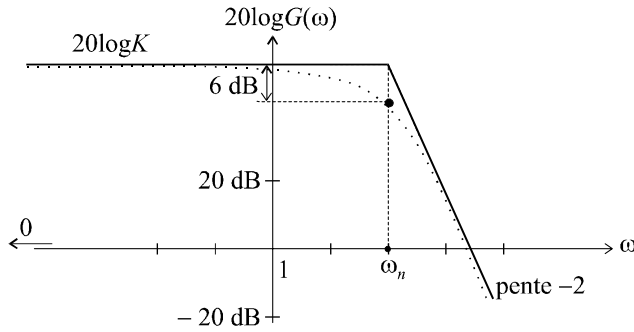
Nous sommes en présence d'une pulsation de coupure double en  $\omega = \omega_n$ . Le diagramme de Bode asymptotique de gain n'est donc constitué que des deux asymptotes déjà identifiées.

En ce qui concerne le diagramme de phase, il se déduit immédiatement du diagramme de gain.

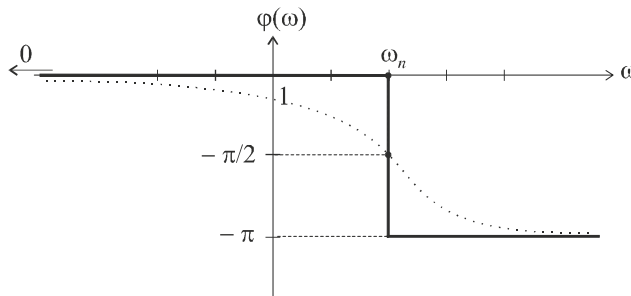
On a par ailleurs : 
$$G_{dB}(\omega_n) = 20 \log K - 20 \log 2 = 20 \log K - 6 \text{ dB}$$

et toujours : 
$$\varphi(\omega_n) = -\pi/2$$

Les figures 4.11 et 4.12 présentent les deux diagrammes obtenus. Les esquisses des diagrammes réels apparaissent en pointillé.



**Figure 4.11** Diagramme de Bode d'un système du second ordre avec facteur d'amortissement égal à 1.



**Figure 4.12** Diagramme de phase d'un système du second ordre avec facteur d'amortissement égal à 1.

On a, notamment : 
$$\varphi(\omega) = \arg S(j\omega) = \arg \frac{K \omega_n^2}{(j\omega + \omega_n)^2}$$

soit : 
$$\varphi(\omega) = -2 \arctan \frac{\omega}{\omega_n}$$

c) Cas où  $\xi$  est inférieur à 1

La fonction de transfert possède dans ce cas deux pôles complexes conjugués :

$$p_1 = -\omega_n \left[ \xi - j\sqrt{(1 - \xi^2)} \right] \quad \text{et} \quad p_2 = -\omega_n \left[ \xi + j\sqrt{(1 - \xi^2)} \right]$$

On a toujours :

$$G(p) = \frac{K\omega_n^2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

Les techniques étudiées au chapitre précédent ne permettent pas de déterminer un diagramme de gain asymptotique. Les seules informations dont nous disposons, pour le moment, sont les deux directions asymptotiques, respectivement pour  $\omega \rightarrow 0$  et pour  $\omega \rightarrow +\infty$  (figure 4.8).

Nous savons également que :

$$G_{dB}(\omega_n) = 20 \log K - 20 \log 2\xi$$

Cette expression laisse supposer que le gain, à la pulsation  $\omega_n$ , peut être supérieur à  $20 \log K$ , puisque  $20 \log 2\xi$  peut être négatif. Nous pouvons alors facilement imaginer le phénomène qui est susceptible de se produire : lorsque  $\omega$  varie de 0 à  $+\infty$ , le gain peut croître de  $20 \log K$  à une valeur maximale, puis décroître en rejoignant son asymptote de pente d'ordre  $-2$ .

Nous allons donc étudier ce phénomène, appelé phénomène de résonance, en déterminant la condition d'apparition de ce phénomène, la pulsation  $\omega_r$  pour laquelle le gain est maximal (rien ne prouve que le maximum de la courbe de gain se produise pour  $\omega = \omega_n$ ), ainsi que la valeur  $G_{\max}$  de ce gain maximum.

Soit :

$$p_1 = -\omega_n \left[ \xi - j\sqrt{(1 - \xi^2)} \right] \quad \text{et} \quad p_2 = -\omega_n \left[ \xi + j\sqrt{(1 - \xi^2)} \right]$$

On a :

$$G(j\omega) = \frac{K\omega_n^2}{(j\omega + \omega_n \left[ \xi - j\sqrt{1 - \xi^2} \right]) (j\omega + \omega_n \left[ \xi + j\sqrt{1 - \xi^2} \right])}$$

d'où :

$$G(\omega) = \frac{K\omega_n^2}{\sqrt{\left[ \omega_n^2 \xi^2 + (\omega - \omega_n \sqrt{1 - \xi^2})^2 \right] \left[ \omega_n^2 \xi^2 + (\omega + \omega_n \sqrt{1 - \xi^2})^2 \right]}}$$

Cette expression est maximale lorsque son dénominateur est minimal, autrement dit lorsque :

$$\frac{d}{d\omega} \left( \left[ \omega_n^2 \xi^2 + (\omega - \omega_n \sqrt{1 - \xi^2})^2 \right] \left[ \omega_n^2 \xi^2 + (\omega + \omega_n \sqrt{1 - \xi^2})^2 \right] \right) = 0$$

soit :

$$2 \left( \omega + \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \right) \left[ \omega_n^2 \xi^2 + (\omega - \omega_n \sqrt{1 - \xi^2})^2 \right] + 2 \left( \omega - \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \right) \left[ \omega_n^2 \xi^2 + (\omega + \omega_n \sqrt{1 - \xi^2})^2 \right] = 0$$

$$\omega \left[ 2\omega_n^2 \xi^2 + (\omega - \omega_n \sqrt{1 - \xi^2})^2 + (\omega + \omega_n \sqrt{1 - \xi^2})^2 - 4\omega_n^2 (1 - \xi^2) \right] = 0$$

$$\omega_n^2 \xi^2 + \omega^2 + \omega_n^2 (1 - \xi^2) - 2\omega_n^2 (1 - \xi^2) = 0$$

$$\omega^2 = \omega_n^2 (1 - 2\xi^2)$$

Cette égalité n'est possible que si  $1 - 2\xi^2 > 0$ , autrement dit lorsque :

$$\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dans ce cas, il existe bien une pulsation  $\omega$  telle que le dénominateur de  $S(p) = \frac{K\omega_n^2}{p(p-p_1)(p-p_2)}$  soit minimum (il est aisé de se rendre compte que cela ne peut correspondre à un maximum).

$G(\omega)$  est donc maximal pour :

$$\omega = \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

Remplaçons  $\omega$  par  $\omega_r$  dans l'expression de  $G(\omega)$  :

$$G_{\max} = \frac{K}{\sqrt{\left[ \xi^2 + \left( \sqrt{1 - 2\xi^2} - \sqrt{1 - \xi^2} \right)^2 \right] \left[ \xi^2 + \left( \sqrt{1 - 2\xi^2} + \sqrt{1 - \xi^2} \right)^2 \right]}}$$

$$G_{\max} = \frac{K}{2\sqrt{\left[ 1 - \xi^2 - \sqrt{(1 - 2\xi^2)(1 - \xi^2)} \right] \left[ 1 - \xi^2 + \sqrt{(1 - 2\xi^2)(1 - \xi^2)} \right]}}$$

$$G_{\max} = \frac{K}{2\sqrt{(1 - \xi^2)^2 - (1 - 2\xi^2)(1 - \xi^2)}}$$

$$G_{\max} = \frac{K}{2\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - \xi^2 - 1 + 2\xi^2)}} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

En résumé, si  $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , il existe une pulsation de résonance  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$  pour laquelle le gain présente un maximum  $G_{\max} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$ .

On définit alors le coefficient ou facteur de résonance  $Q$  (ou de surtension) par le rapport du gain maximal sur le gain à l'origine :

$$Q = \frac{G_{\max}}{K} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Plus la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi$  est proche de 0, plus la pulsation de résonance se rapproche de  $\omega_n$  et plus le gain maximal est élevé.

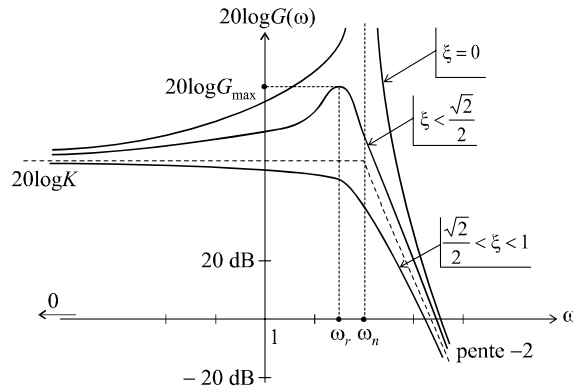
Pour :  $\xi = 0$

on a :  $\omega_r = \omega_n$  et  $G_{\max} \rightarrow +\infty$

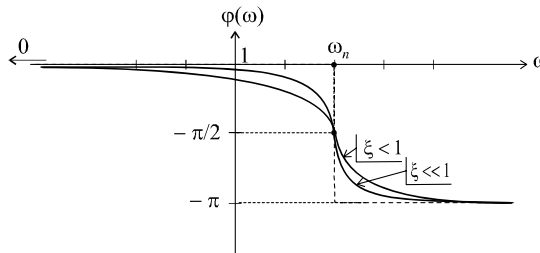
Le paramètre  $\omega_n$  porte donc bien son nom de pulsation propre du système puisqu'elle est la pulsation à laquelle peut se produire le phénomène de résonance le plus intense.

Si  $\frac{\sqrt{2}}{2} < \xi < 1$ , le phénomène de résonance n'existe pas ; la courbe de gain est strictement décroissante et reste constamment sous ses asymptotes. La figure 4.13 résume les différentes situations ainsi mises en

évidence. Pour la courbe de phase, toujours dans le cas où  $\xi < 1$ , une étude approfondie nous montre que celle-ci présente une inflexion en  $\omega = \omega_n$ , plus ou moins prononcée en fonction de  $\xi$  (figure 4.14).



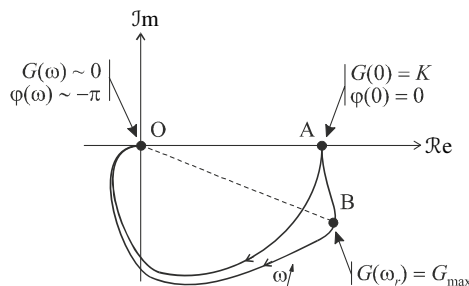
**Figure 4.13** Diagramme de Bode d'un système du second ordre avec facteur d'amortissement inférieur à 1.



**Figure 4.14** Diagramme de phase d'un système du second ordre avec facteur d'amortissement inférieur à 1.

### 4.3.4 Diagramme de Nyquist

Les diagrammes de Nyquist se déduisent intuitivement des diagrammes de Bode. La figure 4.15 présente les courbes obtenues en fonction des différents cas. On notera que toutes les courbes partent du même point, conformément aux diagrammes de Bode ( $G(0) = K$  et  $\varphi(0) = 0$ ) et arrivent toutes au point O, tangentiellement à l'axe réel, puisque  $G(\infty) = 0$  et  $\varphi(\infty) = -\pi$ .



**Figure 4.15** Diagrammes de Nyquist d'un système du second ordre.

Le phénomène de résonance se traduit ici par une inflexion de la courbe.

## EXERCICES

### 4.1 Réglage du gain statique d'un système du premier ordre

On considère un système de fonction de transfert  $G(p)$  avec :

$$G(p) = \frac{K}{1 + Tp} \text{ avec } T = 0,1 \text{ s}$$

Calculer l'expression précise de la pulsation de coupure à 0 dB définie par :

$$G(\omega_{c0}) = 1$$

Montrer que si  $K \gg 1$ , on a :

$$\omega_{c0} \approx \frac{K}{T}$$

Calculer la valeur du gain  $K$  qui permet d'obtenir une pulsation  $\omega_{c0} = 10$  rad/s.

### 4.2 Temps de réponse d'un système du second ordre très amorti

On considère un système de fonction de transfert  $G(p)$  avec :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1} \text{ avec } \xi \gg 1$$

On définit le temps de réponse  $t_r$  comme l'instant à partir duquel la réponse indicielle du système atteint sa valeur finale à 5 % près. Calculer l'expression de  $t_r$ .

### 4.3 Pulsation de coupure à 0 dB d'un système du second ordre

On considère un système de fonction de transfert  $G(p)$  avec :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1} \text{ avec } K > 1$$

Calculer en fonction de  $K$ ,  $\omega_n$  et  $\xi$ , dans les trois cas  $\xi < 1$ ,  $\xi = 1$  et  $\xi > 1$ , l'expression de la pulsation de coupure à 0 dB définie par :

$$G(\omega_{c0}) = 1$$

Montrer que si  $K \gg 1$ , on a, dans tous les cas :  $\omega_{c0} \approx \omega_n \sqrt{K}$ .

### 4.4 Calcul du dépassement de la réponse indicielle d'un système du second ordre

On considère un système de fonction de transfert  $G(p)$  à l'entrée duquel on injecte un échelon unitaire. Soit  $s(t)$  le signal de sortie et  $s_\infty$  sa valeur finale.

On donne :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$

Calculer en fonction de  $\xi$ , en pourcentage de la valeur finale  $s_\infty$  et dans le cas où  $\xi < 1$ , la valeur du dépassement  $d$  défini comme le rapport :

$$d = \frac{s_{\max} - s_\infty}{s_\infty} \times 100$$

#### 4.5 Réponse d'un système du second ordre à une rampe en régime critique

On considère un système de fonction de transfert  $G(p)$  à l'entrée duquel on injecte une rampe unitaire :  $e(t) = v(t) = t$  pour  $t > 0$ .

On donne :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1} \text{ avec } \xi = 1$$

Calculer l'expression du signal de sortie  $s(t)$  et tracer son graphe.

#### 4.6 Diagramme de Nyquist d'un système résonant pur

Tracer le diagramme de Nyquist du système défini par :

$$G(p) = \frac{10}{\frac{p^2}{100} + 1}$$

## SOLUTIONS

4.1 Le gain fréquentiel du système a pour expression :

$$G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + 0,01\omega^2}}$$

La pulsation de coupure à 0 dB peut être aisément calculée :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1 + 0,01\omega_{c0}^2}} = 1 \Rightarrow \omega_{c0} = 10\sqrt{K^2 - 1}$$

Si  $K \gg 1$ , on a :

$$\omega_{c0} = 10\sqrt{K^2 - 1} \approx 10K = \frac{K}{T}$$

Pour obtenir une pulsation  $\omega_{c0} = 10$  rad/s, on doit avoir :

$$10\sqrt{K^2 - 1} = 10 \Rightarrow K = \sqrt{2}$$

**4.2** La réponse indicielle d'un tel système du second ordre, pour  $\xi > 1$ , a pour expression :

$$s(t) = K - \frac{K}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[ \left( \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) e^{-\omega_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})t} - \left( \xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) e^{-\omega_n(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})t} \right]$$

Si on considère que  $\xi \gg 1$ , on peut faire une approximation à l'ordre 1 de l'expression  $\sqrt{\xi^2 - 1}$  :

$$\sqrt{\xi^2 - 1} = \xi \sqrt{\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2}} = \xi \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}} \approx \xi \left( 1 - \frac{1}{2\xi^2} \right)$$

d'où :

$$s(t) \approx K - \frac{K}{2\xi} \left[ 2\xi e^{-\frac{\omega_n t}{2\xi}} - \frac{1}{2\xi} e^{-2\xi\omega_n t} \right]$$

Compte tenu de la définition du temps de réponse, on a :

$$0,95K = K - \frac{K}{2\xi} \left[ 2\xi e^{-\frac{\omega_n t_r}{2\xi}} - \frac{1}{2\xi} e^{-2\xi\omega_n t_r} \right]$$

soit :

$$0,1\xi = 2\xi e^{-\frac{\omega_n t_r}{2\xi}} - \frac{1}{2\xi} e^{-2\xi\omega_n t_r}$$

Par ailleurs :

$$\xi \gg 1 \Rightarrow 2\xi e^{-\frac{\omega_n t_r}{2\xi}} \gg \frac{1}{2\xi} e^{-2\xi\omega_n t_r}$$

d'où :

$$0,1\xi = 2\xi e^{-\frac{\omega_n t_r}{2\xi}}$$

Par conséquent :

$$\frac{\omega_n t_r}{2\xi} = -\ln 0,05 \Rightarrow t_r = -\frac{2\xi}{\omega_n} \ln 0,05 = \frac{6\xi}{\omega_n}$$

**4.3** La fonction de transfert en fréquence du système a pour expression :

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{2j\xi\omega}{\omega_n}}$$

d'où :

$$G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

Par définition :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_{c0}^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega_{c0}^2}{\omega_n^2}}} = 1$$

soit :

$$\left(1 - \frac{\omega_{c0}^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega_{c0}^2}{\omega_n^2} = K^2$$

Posons  $X = \frac{\omega_{c0}^2}{\omega_n^2}$  :

$$X^2 + (4\xi^2 - 2)X + 1 - K^2 = 0$$

Résolvons cette équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4\xi^2 - 2)^2 + 4(K^2 - 1)$$

Comme  $K > 1$ , on a toujours  $\Delta > 0$ .



Par conséquent :

$$X = \frac{2 - 4\xi^2 \pm \sqrt{(4\xi^2 - 2)^2 + 4(K^2 - 1)}}{2}$$

Une seule de ces solutions étant positive, on a :

$$\omega_{c0} = \omega_n \sqrt{\frac{2 - 4\xi^2 + \sqrt{(4\xi^2 - 2)^2 + 4(K^2 - 1)}}{2}}$$

Cette expression est valable quelle que soit la valeur de  $\xi$ .

Si on suppose, de surcroît, que  $K \gg 1$ , on alors :

$$\omega_{c0} \approx \omega_n \sqrt{\frac{2 - 4\xi^2 + \sqrt{4K^2}}{2}} \approx \omega_n \sqrt{\frac{2K}{2}} = \omega_n \sqrt{K}$$

**4.4** La réponse indicielle d'un tel système du second ordre, pour  $\xi < 1$ , a pour expression :

$$s(t) = Ku(t) - K e^{-\xi\omega_n t} \left[ \cos \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t \right]$$

Calculons la dérivée de cette fonction temporelle :

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= K\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t} \left[ \cos \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t \right] \\ &\quad - K e^{-\xi\omega_n t} \left[ -\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \sin \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \xi \omega_n \cos \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t \right] \end{aligned}$$

Soit :

$$\frac{ds}{dt} = K\omega_n e^{-\xi\omega_n t} \left( \frac{\xi^2}{\sqrt{1 - \xi^2}} + \sqrt{1 - \xi^2} \right) \sin \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t$$

ou encore :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t$$

Cette dérivée s'annule pour :

$$\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t = k\pi$$

Donc pour les valeurs :

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Le maximum que l'on cherche à identifier correspond à la valeur :

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Par conséquent :

$$s_{\max} = s(t_1) = s \left( \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \right)$$

soit :

$$s_{\max} = K - K e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \left[ \cos \pi + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \pi \right]$$

d'où :

$$s_{\max} = K + K e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$$

De toute évidence :  $s_\infty = K$

On en déduit donc :  $d\% = \frac{s_{\max} - s_\infty}{s_\infty} \times 100 = 100 \times e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

**4.5** La fonction de transfert du système a pour expression :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2p}{\omega_n} + 1}$$

avec  $E(p) = \frac{1}{p^2}$ , on a :  $S(p) = \frac{K}{p^2 \left( \frac{p}{\omega_n} + 1 \right)^2} = \frac{K\omega_n^2}{p^2(p + \omega_n)^2}$

Cette transformée de Laplace n'apparaît pas dans la table fournie en annexe. En revanche, on y trouve :

$$X(p) = \frac{K\omega_n^2}{p(p + \omega_n)^2} = K \frac{\omega_n^2}{p(p + \omega_n)^2} \Rightarrow x(t) = K - K(1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}$$

Comme  $S(p) = \frac{X(p)}{p}$ , on a :  $s(t) = \int x(t) dt$

soit :  $s(t) = \int K dt - \int K e^{-\omega_n t} dt - \int K\omega_n t e^{-\omega_n t} dt$

Intégrons :  $s(t) = Kt + \frac{K}{\omega_n} e^{-\omega_n t} - \frac{K}{\omega_n} [1 - (1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}] + C^{te}$

d'où :  $s(t) = Kt(1 + e^{-\omega_n t}) + \frac{2K}{\omega_n} e^{-\omega_n t} - \frac{K}{\omega_n} + C^{te}$

En considérant que  $s(0) = 0$ , on a :

$$s(0) = \frac{K}{\omega_n} + C^{te} = 0 \Rightarrow C^{te} = -\frac{K}{\omega_n}$$

Au final, on a donc :  $s(t) = Kt(1 + e^{-\omega_n t}) + \frac{2K}{\omega_n} e^{-\omega_n t} - \frac{2K}{\omega_n}$

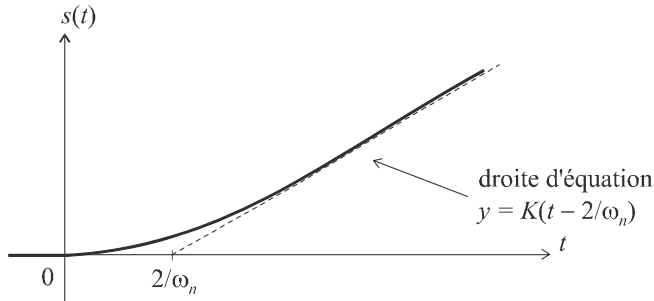
ou encore :  $s(t) = \left[ Kt - \frac{2K}{\omega_n} \right] + \left[ Kt + \frac{2K}{\omega_n} \right] e^{-\omega_n t}$

Cette expression fait apparaître que le graphe de  $s(t)$  possède une asymptote d'équation  $y(t) = Kt - \frac{2K}{\omega_n}$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . La courbe reste toujours au dessus de son asymptote étant donné que  $s(t) - y(t)$  est toujours positif. Pour tracer la courbe avec plus de précision, il est possible d'invoquer sa dérivée, que l'on connaît déjà :

$$\frac{ds}{dt} = x(t) = K - K e^{-\omega_n t} - K\omega_n t e^{-\omega_n t}$$

On remarque notamment que :  $\frac{ds}{dt}(0) = 0$

Le graphe de  $s(t)$  est présenté sur la figure 4.16.



**Figure 4.16** Réponse d'un système du second ordre à une rampe en régime critique.

**4.6** La fonction de transfert en fréquence a pour expression :

$$G(j\omega) = \frac{10}{1 - \frac{\omega^2}{100}}$$

Nous remarquons, bien sûr, que cette expression est toujours réelle. Le diagramme de Nyquist est donc porté par l'axe des réels. Il convient toutefois d'étudier avec précision la manière dont le lieu est parcouru lorsque  $\omega$  croît de 0 à  $+\infty$ .

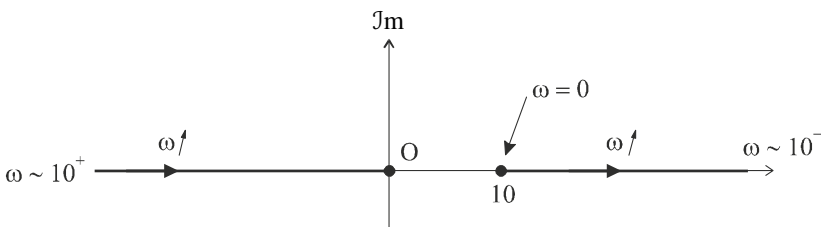
Pour  $0 < \omega < 10$ , on a :  $G(j\omega) > 0$

Sur ce même intervalle,  $G(j\omega)$  croît de 10 à  $+\infty$ . La portion correspondante, dans le diagramme de Nyquist est donc la demi-droite appartenant à l'axe réel et comprise entre 10 et  $+\infty$ .

Pour  $\omega > 10$ , on a :  $G(j\omega) < 0$

Nous nous trouvons cette fois sur le demi-axe réel négatif et  $G(j\omega)$  croît de  $-\infty$  à  $0^-$ . La portion correspondante, dans le diagramme de Nyquist est donc la demi-droite appartenant à l'axe réel et comprise entre  $-\infty$  et  $0^-$ .

En prenant soin d'orienter ce lieu de Nyquist quelque peu singulier dans le sens des  $\omega$  croissants, on obtient le graphe de la figure 4.17.



**Figure 4.17** Diagrammes de Nyquist d'un système résonant pur.



DEUXIÈME PARTIE

---

# **Automatique des systèmes linéaires**



## Chapitre 5

# Problématique générale de l'automatique Mise en équation des asservissements linéaires

### 5.1 INTRODUCTION

D'une manière générale, les principaux problèmes posés par la mise en œuvre des systèmes physiques ou industriels concernent leur commande, à savoir la détermination optimale des signaux d'entrée qu'il faut leur appliquer pour qu'ils se comportent de la manière souhaitée. Les méthodes d'étude et d'analyse étudiées dans les chapitres précédents nous ont fourni l'approche méthodologique générale d'analyse des systèmes. Nous abordons à présent le cœur de la problématique de l'automatique, à savoir l'étude des systèmes bouclés.

### 5.2 INCONVÉNIENTS DE LA COMMANDE EN BOUCLE OUVERTE

La commande en boucle ouverte d'un système consiste à introduire, à l'entrée de ce système, le signal  $e(t)$  permettant d'obtenir à sa sortie, le signal  $s(t)$  correspondant à la réponse voulue. Cela nécessite, bien sûr, la connaissance d'un modèle de fonctionnement du système, par exemple, de sa fonction de transfert  $G(p)$ . Ainsi, la connaissance d'un modèle de fonctionnement d'un moteur à courant continu permettra de connaître la tension d'entrée qu'il faudra lui appliquer pour obtenir telle ou telle vitesse de rotation.

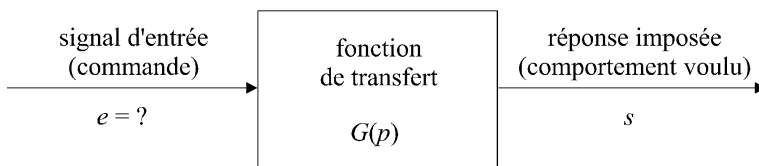


Figure 5.1 Problématique générale de la commande des systèmes.

Dans le formalisme de Laplace, on peut donc écrire :

$$S(p) = G(p)E(p) \quad \Rightarrow \quad E(p) = \frac{S(p)}{G(p)}$$

Puis, en appliquant la transformation de Laplace inverse, on obtient l'expression temporelle de la commande :

$$E(p) \xrightarrow{\text{transformation de Laplace inverse}} e(t)$$

Malheureusement, il est pratiquement impossible, dans la pratique, de déterminer à coup sûr le signal de commande qui assurera au système le fonctionnement voulu et ce, pour deux raisons essentielles : les modèles de fonctionnement sont souvent très imparfaits et les systèmes réels sont en général soumis à des perturbations, la plupart du temps imprévisibles et difficilement modélisables.

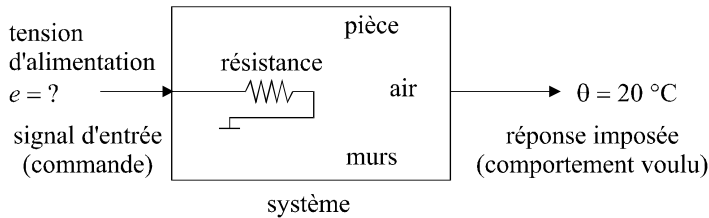


Figure 5.2 Modélisation d'un système de chauffage.

Considérons encore, à titre d'exemple, un radiateur électrique (figure 5.2). Traduisons son fonctionnement idéal souhaité par le fait que nous voulons obtenir, dans la pièce, une température de 20 °C (nous appellerons cela la température de consigne). Malgré la connaissance de la température initiale de la pièce, même si l'on a une bonne connaissance du modèle de fonctionnement du radiateur et même si l'on a modélisé les pertes de chaleur au travers des murs de la pièce, non seulement le modèle sera si complexe qu'il nous faudra le simplifier, donc le rendre imparfait, mais personne ne pourra prévoir la disparition de ce nuage qui va brutalement faire entrer le soleil dans la pièce et élever ainsi de manière tout à fait imprévisible la température, réduisant à néant nos prédictions en ce qui concerne le signal de commande (la tension que nous injectons dans la résistance chauffante du radiateur).

Et le problème est bien là : en écrivant  $S(p) = G(p)E(p)$ , nous avons bien affaire à un modèle prédictif et on ne peut pas, par définition, prévoir, ni même modéliser, l'imprévisible.

### 5.3 PRINCIPE DE LA COMMANDE EN BOUCLE FERMÉE

Le principe de la commande en boucle fermée résulte d'une simple question de logique et de bon sens : pour mieux maîtriser le fonctionnement d'un système, mesurons en permanence son comportement, vérifions que ce comportement correspond bien à ce que l'on attend et utilisons cette information pour adapter le signal de commande.

Ainsi, dans l'exemple du radiateur électrique, mesurons la température et décidons, soit de chauffer si la température de la pièce est inférieure à la température voulue, soit d'arrêter de chauffer si cette température de *consigne* est atteinte (c'est le principe du thermostat).

On peut même pousser encore plus loin cette réflexion : chauffons beaucoup plus si la température mesurée est très éloignée de la température voulue et ralentissons la puissance de chauffe lorsque l'on s'approche de la consigne. On pourrait même imaginer d'adjoindre au radiateur un système de refroidissement au cas où la température de consigne soit largement dépassée (c'est le principe des dispositifs de climatisation).

En conclusion, pour mieux commander un système quelconque, il faut :

- mesurer l'évolution de son comportement, à l'aide d'un capteur adéquat ;
- comparer l'information délivrée par ce capteur à une valeur de consigne ;
- utiliser la différence entre consigne et mesure comme information permettant de construire le signal de commande.

C'est ainsi que le schéma général de la figure 5.3 fait apparaître :

- la mesure du comportement réel du système, suivie éventuellement d'un dispositif (B) servant à adapter le signal mesuré ;



- un soustracteur qui calcul l'écart entre la consigne et la mesure ; ce soustracteur justifie la présence du dispositif (B), lorsque, par exemple, la grandeur mesurée n'est pas de même nature physique que la consigne : souvent, cette consigne est fournie à l'aide d'un signal électrique ; une température, une vitesse, etc. doivent être retransformées en tension avant de pouvoir être soustraites de la consigne, ce que font en général les capteurs utilisés. (B) représente donc le capteur qui transforme grandeur physique en signal électrique ;
- un dispositif (C) qui, éventuellement, adapte l'écart avant qu'il ne devienne le signal de commande : souvent, les signaux de consigne ou de mesure sont des signaux de faible puissance et de faible amplitude tandis que les signaux de commande sont plutôt des signaux de forte amplitude. À cet égard, rien n'empêche de considérer que ce dispositif fait partie du système et qu'il en constitue en quelque sorte l'étage d'entrée. Ainsi, on peut considérer que l'écart constitue bien le signal de commande de notre système.

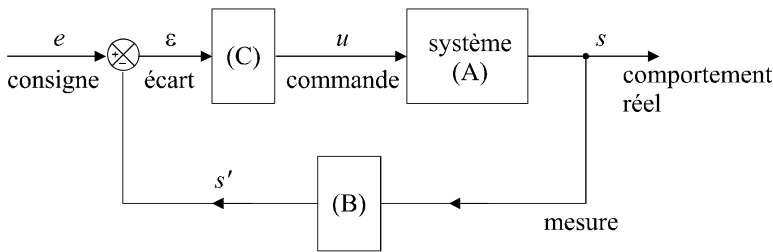


Figure 5.3 Schéma général d'une boucle de régulation.

L'ensemble constitué du système (A) et éventuellement du dispositif (C) est appelé chaîne directe ou chaîne de commande. L'ensemble constitué de la mesure et du dispositif (B) est appelée chaîne de retour ou boucle de retour. Le schéma de la figure 5.3 correspond au principe général de ce qu'on appelle communément la boucle de régulation. Le signal de consigne devient la véritable entrée du système bouclé tandis qu'on laisse le signal de commande évoluer seul.

Dans certains cas, le dispositif (B) peut être inexistant ; on parle alors de boucle à retour unitaire.

Vérifions, au travers de l'exemple du radiateur électrique (figure 5.4), que ce type de schéma mérite bien cette appellation de boucle de régulation et que le signal de commande  $u$  est bel et bien construit automatiquement :

Supposons qu'il règne, à l'intérieur de la pièce, une température de  $10\text{ }^{\circ}\text{C}$  et que l'on mette en route le système représenté sur la figure 5.4, à un instant  $t = 0$ , avec pour objectif de réguler la température de la pièce à  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Supposons également que le capteur délivre une tension  $v = k\theta$  avec  $k = 1\text{ V}/^{\circ}\text{C}$ .

Le signal de consigne n'est rien d'autre qu'un échelon de tension entre 0 et 20 V.

Dès que le système est mis en route, le capteur mesure la température de  $10\text{ }^{\circ}\text{C}$  et délivre donc une tension de 10 V ; l'écart est donc maximal : le signal de commande l'est aussi et la puissance de chauffe est importante. L'air de la pièce va donc se réchauffer, la température mesurée par le capteur croît, l'écart a donc tendance à diminuer et plus la température mesurée se rapproche de la consigne, plus le signal de commande décroît. La puissance de chauffe diminue et il n'est pas difficile d'avoir l'intuition que ce signal a vocation à décroître vers 0 tandis que la température de la pièce va se rapprocher des  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  voulus. Lorsque la mesure est égale à la consigne, l'écart est nul, le système de chauffage s'arrête.

Dès que la température dans la pièce commencera à décroître, le capteur délivrera un signal inférieur à 20 V, le radiateur recommencera à chauffer (légèrement) pour maintenir la température voulue. Si on ouvre brutalement la fenêtre, la température peut chuter de manière importante ; l'écart entre consigne et mesure est alors important. La puissance de chauffe le sera donc aussi, forçant le système à réagir de sorte qu'on revienne rapidement à la température de  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

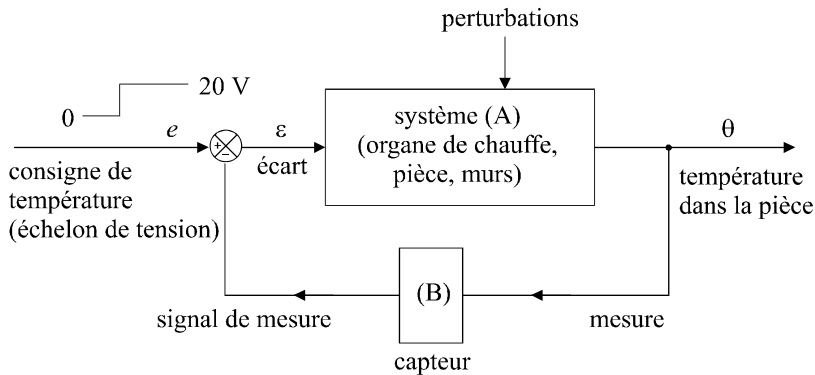


Figure 5.4 Schéma d'un système de chauffage régulé.

### 5.4 MODÉLISATION D'UNE BOUCLE DE RÉGULATION

En formulant l'hypothèse que tous les systèmes et dispositifs impliqués dans la boucle soient linéaires, il nous est possible d'utiliser le formalisme laplacien pour établir un modèle de fonctionnement liant l'entrée du système bouclé (le signal de consigne) à sa sortie (la grandeur physique à réguler).

La figure 5.5 propose le schéma général d'une boucle de régulation dans ce formalisme : il nous faut considérer, pour chaque signal, sa transformée de Laplace, et pour chaque élément du système, sa fonction de transfert.

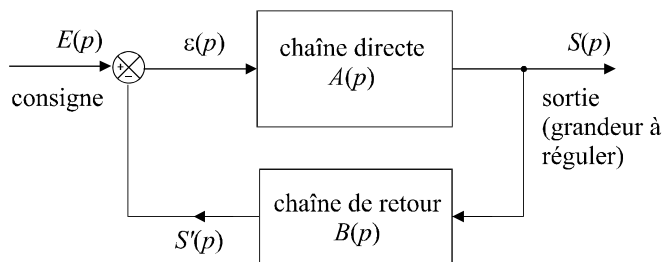


Figure 5.5 Modèle d'une boucle de régulation.

Si chaque élément de la boucle est linéaire, il nous est possible d'exprimer la sortie  $S(p)$  en fonction du signal de consigne (l'entrée)  $E(p)$  et ainsi, d'obtenir un modèle de fonctionnement global du système :

On peut écrire :

$$S(p) = A(p)\varepsilon(p)$$

Or :

$$\varepsilon(p) = E(p) - S'(p) = E(p) - B(p)S(p)$$

d'où :

$$S(p) = A(p)[E(p) - B(p)S(p)]$$

$$S(p)[1 + A(p)B(p)] = A(p)E(p)$$

soit :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

Cette expression apparaît bien comme la fonction de transfert liant la sortie et l'entrée de notre boucle de régulation.

Posons :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

définissant ainsi la *fonction de transfert en boucle fermée* de la boucle de régulation.

On définit également, pour une boucle de régulation, sa *fonction de transfert en boucle ouverte* par :

$$G(p) = \frac{S'(p)}{E(p)} = A(p)B(p)$$

Dans le cas d'une boucle à retour unitaire, on a  $B(p) = 1$ .

Soit :

$$G(p) = \frac{S'(p)}{E(p)} = A(p)$$

d'où :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$$

## 5.5 LE PROBLÈME DE LA STABILITÉ

Le problème de la stabilité est un problème général de la commande des systèmes : il pose la question suivante.

*Le signal de sortie converge-t-il effectivement vers une valeur finie ou est-il susceptible de diverger ou d'osciller ?*

Ce problème est encore plus crucial dans les systèmes bouclés, compte tenu que le signal de sortie est réinjecté à l'entrée du système. Dans ces conditions, la boucle peut effectivement se comporter comme prévu, c'est-à-dire évoluer vers un état où la grandeur à réguler se rapproche de la valeur de consigne, ce qui correspond au fonctionnement idéal tel que nous l'avons décrit dans le paragraphe 5.2, ce que nous considérerons comme un fonctionnement stable ; mais elle peut également s'emballer, avec pour conséquence une non-convergence du signal de sortie, comportement que nous qualifierons d'instable.

Il est évident qu'il est nécessaire, lors de la conception d'une boucle de régulation, de lui assurer à tout prix un comportement stable, ce que nous étudierons dans le prochain chapitre.

## 5.6 LES PERFORMANCES D'UN SYSTÈME RÉGULÉ

À supposer qu'un système régulé possède effectivement un comportement stable (ce qui est une obligation), son fonctionnement est caractérisé par un certain nombre de performances qu'il nous faut apprendre à prévoir (c'est un minimum), voire même à corriger si elles ne sont pas satisfaisantes (c'est beaucoup mieux).

Reprenons l'exemple de la régulation du système de chauffage représenté sur la figure 5.4. Imaginons que lors de la mise en route du système, la température de la pièce soit de l'ordre de 10 °C et que la valeur de consigne soit égale à 20 °C.

Nous nous attendons alors à ce que le dispositif nous fournisse une température ambiante la plus voisine possible de 20 °C. Plus la température réelle sera voisine de la valeur de consigne, plus le système sera *précis*.

Nous nous attendons également à avoir une température de 20 °C le plus vite possible. Il n'est pas question d'attendre des heures pour disposer d'un confort thermique acceptable. Plus la valeur de consigne est atteinte rapidement en sortie du système, plus le dispositif est *rapide*. Autrement dit, il nous intéresse de disposer d'un système caractérisé par un régime transitoire le plus court possible.

La durée n'est pas la seule caractéristique du régime transitoire. Il nous faut aussi nous intéresser à sa forme, notamment à un phénomène dit de *dépassement* : on peut très bien imaginer que la température finale de 20 °C soit atteinte après un régime transitoire au cours duquel la température passe par un pic à 23 °C. Ceci n'est bien évidemment pas acceptable.

Précision, rapidité et limitation (voire absence) de dépassement sont trois performances essentielles d'un système asservi. Il nous faudra apprendre à les prévoir et, le cas échéant, à les corriger pour qu'elles puissent satisfaire à un cahier des charges imposé.

## EXERCICES

### 5.1 Calcul d'une fonction de transfert en boucle fermée

On considère la boucle de régulation représentée sur la figure 5.6. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte de ce système et sa fonction de transfert en boucle fermée.

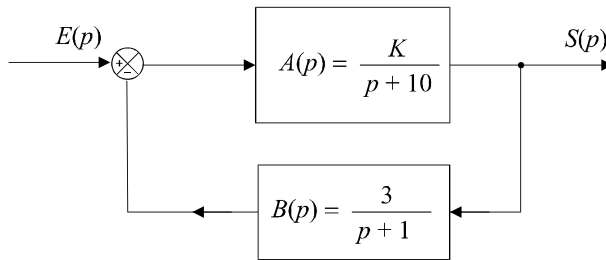


Figure 5.6 Boucle de régulation.

### 5.2 Réduction à retour unitaire d'une boucle de régulation

On considère la boucle de régulation représentée sur la figure 5.7. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte de ce système et sa fonction de transfert en boucle fermée. Proposer un schéma équivalent à cette boucle de régulation dans laquelle le retour sera unitaire.

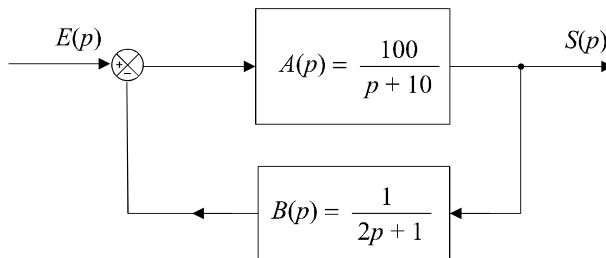
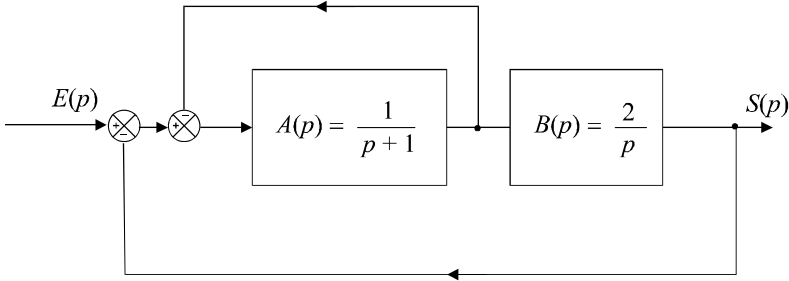


Figure 5.7 Boucle de régulation.

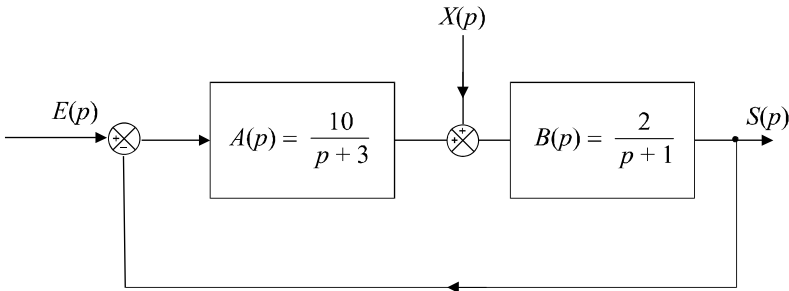
**5.3 Calcul d'une fonction de transfert d'une double boucle**

On considère la boucle de régulation représentée sur la figure 5.8. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte de ce système et sa fonction de transfert en boucle fermée.



**Figure 5.8** Boucle de régulation à retour réglé.

**5.4 Calcul de la fonction de transfert d'un système perturbé**



**Figure 5.9** Boucle de régulation perturbée.

Dans le schéma de la figure 5.9, on a modélisé les perturbations susceptibles d'agir sur la chaîne directe d'une boucle de régulation par le signal  $X(p)$ . Calculer l'expression de  $S(p)$  en fonction de  $E(p)$ ,  $X(p)$  et des différentes fonctions de transfert des éléments du système.

Calculer la fonction de transfert  $H_1(p)$  définie par :

$$H_1(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \text{ lorsque } X(p) = 0$$

Calculer la fonction de transfert  $H_2(p)$  définie par :

$$H_2(p) = \frac{S(p)}{X(p)} \text{ lorsque } E(p) = 0$$

### 5.5 Fonction de transfert à retour réglé

Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée du système représenté sur la figure 5.10.

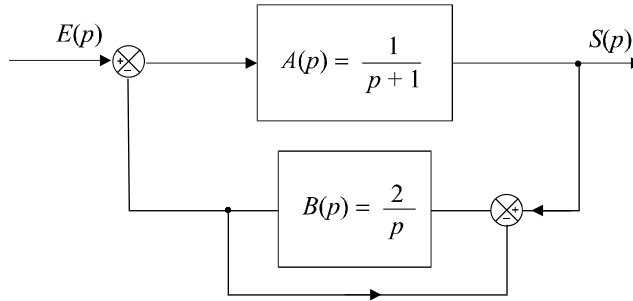


Figure 5.10 Boucle de régulation à retour réglé.

### 5.6 Détermination de l'état d'équilibre d'un système en boucle fermée

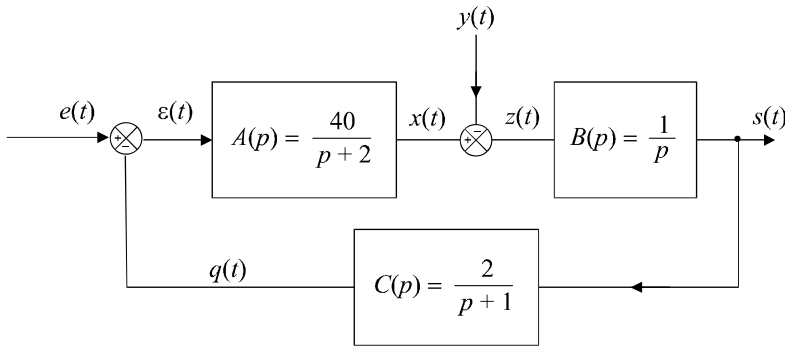


Figure 5.11 Boucle d'asservissement.

Le système asservi de la figure 5.11 est supposé stable. On applique, à l'instant  $t = 0$ , deux signaux  $e(t)$  et  $y(t)$  qui sont respectivement un échelon unité et un échelon de hauteur 4. Soit  $e(t) = u(t)$  et  $y(t) = 4 \cdot u(t)$ . Déterminer, en régime permanent, la valeur de tous les signaux présents dans cette boucle.

### 5.7 Mise en équation et étude d'un asservissement de niveau dans une cuve

On considère une cuve parallélépipédique de section  $S = 800 \text{ cm}^2$  munie d'un flotteur raccordé à une vanne. La vanne assure le remplissage de la cuve avec un débit  $q$  proportionnel à la différence de hauteur d'eau par rapport à une hauteur de consigne  $h_0 = 24 \text{ cm}$ . La vanne est donc fermée si  $h = h_0$  et ouverte au maximum lorsque la cuve est vide. On notera  $k$  ce coefficient de proportionnalité et on donne :  $k = 0,002 \text{ m}^2/\text{s}$ .

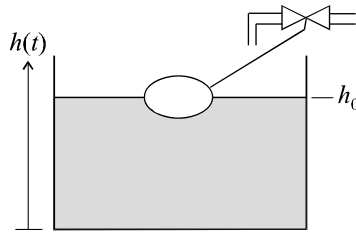


Figure 5.12 Régulation de niveau dans une cuve.

Établir le schéma fonctionnel du système en faisant apparaître une boucle de régulation.  $h_0$  correspond à la consigne,  $h(t)$  correspond à la réponse du système. Établir la fonction de transfert en boucle fermée de ce système.

On suppose que la cuve se vide brutalement. Calculer le temps de réponse du système qui donne un ordre de grandeur du temps de remplissage de la cuve.

### 5.8 Décomposition d'un asservissement en blocs intégrateurs simples

Calculer la fonction de transfert en boucle fermée du système présenté sur la figure 5.13.

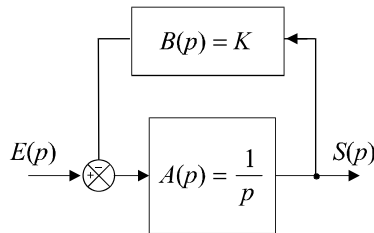


Figure 5.13 Intégrateur avec boucle de retour.

Montrer que la boucle d'asservissement présentée sur la figure 5.14 peut être représentée en n'utilisant, dans la chaîne directe, que des intégrateurs bouclés à l'aide de gains correctement choisis.

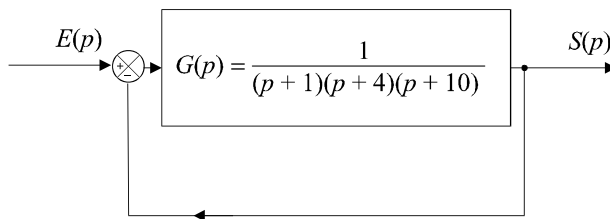


Figure 5.14 Boucle de régulation.

## SOLUTIONS

5.1 Il suffit d'appliquer les définitions des fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée :

En boucle ouverte : 
$$G(p) = A(p)B(p) = \frac{3K}{(p + 10)(p + 1)}$$

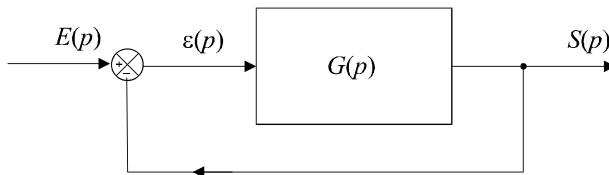
En boucle fermée : 
$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} = \frac{\frac{K}{(p + 10)}}{1 + \frac{3K}{(p + 10)(p + 1)}}$$

soit : 
$$H(p) = \frac{K(p + 1)}{K(p + 1)(p + 10) + 3K}$$

5.2 Par définition, la fonction de transfert en boucle fermée est :

En boucle fermée : 
$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} = \frac{\frac{100}{(p + 10)}}{1 + \frac{100}{(p + 10)(2p + 1)}}$$

soit : 
$$H(p) = \frac{100(2p + 1)}{(p + 10)(2p + 1) + 100} = \frac{100(2p + 1)}{2p^2 + 21p + 110}$$



**Figure 5.15** Boucle à retour unitaire.

*A priori*, nous pourrions rechercher un schéma équivalent dont la forme est représentée sur la figure 5.15. Un tel système posséderait une fonction de transfert en boucle fermée égale à :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$$

On devrait donc avoir : 
$$\frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{100(2p + 1)}{2p^2 + 21p + 110}$$

Plutôt que de rechercher une telle fonction de transfert, ce qui n'est pas obligatoirement possible, on préfère modifier la boucle en incluant la boucle de retour dans la chaîne directe (figure 5.16).



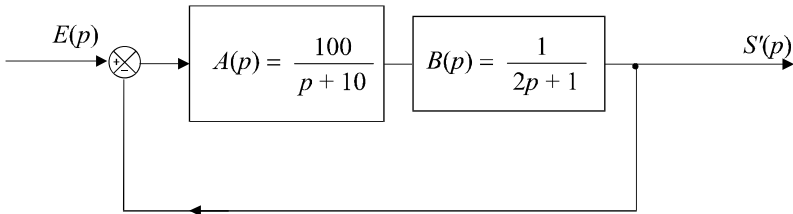


Figure 5.16 Transformation de la boucle de régulation.

Dans ces conditions, le système n'est plus tout à fait équivalent au système initial. La nouvelle sortie correspond en réalité à  $S'(p)$ , le signal  $S(p)$  se retrouvant à la sortie du bloc  $A(p)$ . Si on désire retrouver  $S(p)$  à la sortie du système, il suffit de transformer  $S'(p)$  en plaçant, en sortie, comme indiqué sur la figure 5.17, un bloc de fonction de transfert :

$$\frac{1}{B(p)} = 2p + 1$$

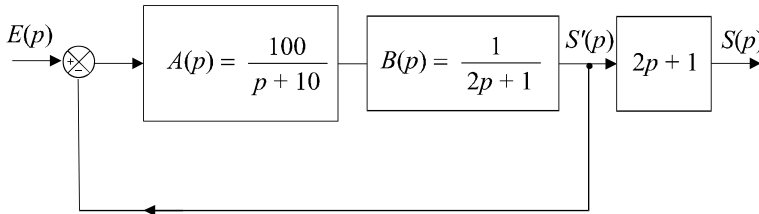


Figure 5.17 Transformation finale de la boucle de régulation.

**5.3** Commençons par transformer le bloc constitué de  $A(p)$ . Soit  $\varepsilon(p)$  le signal d'entrée du bloc et soit  $X(p)$  son signal de sortie (figure 5.18).

Appelons  $A'(p)$  sa fonction de transfert en boucle fermée. Soit :  $A'(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon(p)}$ .

Cette boucle étant à retour unitaire, on a :  $A'(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)} = \frac{1}{p + 2}$ .

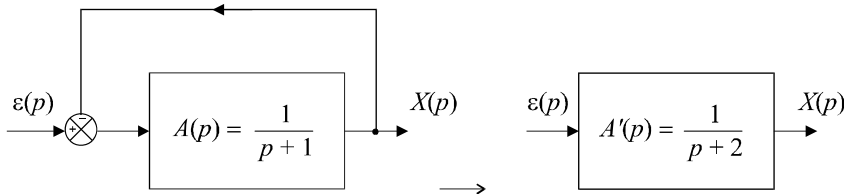


Figure 5.18 Réduction du bloc intermédiaire.

Nous pouvons donc remplacer l'ensemble du bloc par un système de fonction de transfert  $A'(p)$ , comme indiqué sur la figure 5.19.

À partir de ce schéma simplifié, nous pouvons sans peine calculer successivement la fonction de transfert en boucle ouverte ou fermée :

$$G(p) = A'(p)B(p) = \frac{1}{p + 2} \cdot \frac{2}{p} = \frac{2}{p(p + 2)}$$

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{2}{p(p + 2) + 2} = \frac{2}{p^2 + 2p + 2}$$

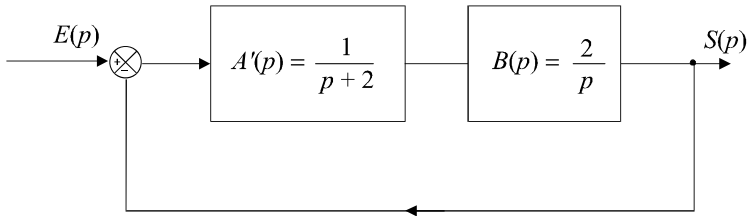


Figure 5.19 Boucle de régulation simplifiée.

5.4 Exprimons simplement le signal de sortie :

$$S(p) = B(p) [X(p) + A(p)\varepsilon(p)]$$

Soit :

$$S(p) = B(p)X(p) + A(p)B(p) [E(p) - S(p)]$$

$$S(p) [1 + A(p)B(p)] = B(p)X(p) + A(p)B(p)E(p)$$

d'où :

$$S(p) = \frac{B(p)}{1 + A(p)B(p)} X(p) + \frac{A(p)B(p)}{1 + A(p)B(p)} E(p)$$

Par conséquent :

$$H_1(p) = \frac{A(p)B(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

et :

$$H_2(p) = \frac{B(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

5.5 Commençons par transformer le bloc constitué de  $B(p)$ . Soit  $S(p)$  le signal d'entrée du bloc et soit  $X(p)$  son signal de sortie (figure 5.20).

Appelons  $B'(p)$  sa fonction de transfert en boucle fermée. Soit :  $B'(p) = \frac{S(p)}{X(p)}$

Cette boucle étant à retour unitaire, on a :  $B'(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{B(p)}{1 + B(p)} = \frac{2}{p+2}$

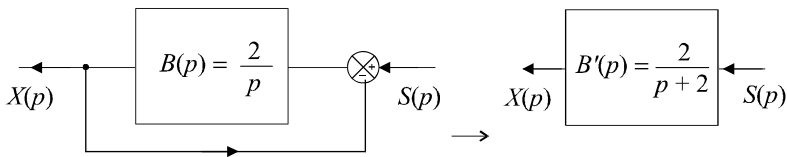


Figure 5.20 Réduction du bloc intermédiaire.

Nous pouvons donc remplacer l'ensemble du bloc par un système de fonction de transfert  $B'(p)$ , comme indiqué sur la figure 5.21.

À partir de ce schéma simplifié, nous pouvons sans peine calculer successivement la fonction de transfert en boucle ouverte ou fermée :

$$G(p) = A(p)B'(p) = \frac{1}{p+1} \cdot \frac{2}{p+2} = \frac{2}{(p+1)(p+2)}$$

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{2}{(p+1)(p+2) + 2} = \frac{2}{p^2 + 3p + 4}$$

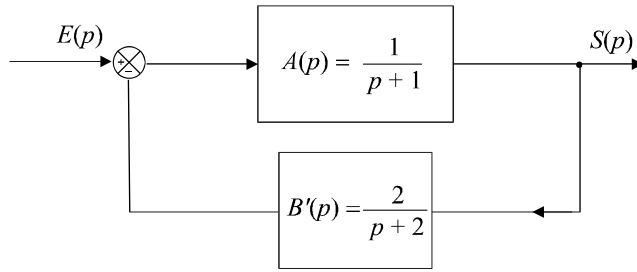


Figure 5.21 Boucle de régulation simplifiée.

5.6 Comme le système est supposé stable, tous les signaux tendent vers une valeur finie en régime permanent autrement dit lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

En particulier,  $s(t) \rightarrow s_\infty$  qui est une valeur finie. Par conséquent, le signal d'entrée de l'intégrateur  $B(p)$  ne peut tendre que vers 0, sinon,  $s(t)$  ne pourrait pas converger. On a donc :  $z_\infty = 0$ .

Comme  $y(t) = 4$  pour tout  $t$ , on a bien sûr :  $y_\infty = 4$ . On en déduit donc que :

$$x_\infty = z_\infty + y_\infty = 4$$

En régime permanent, chaque fonction de transfert se comporte comme un gain constant (son gain statique). Pour le système de fonction de transfert  $A(p)$ , ce gain statique, obtenu en faisant tendre  $p$  vers 0, est égal à  $10/3$ .

On a donc :

$$\varepsilon_\infty = \frac{2x_\infty}{40} = \frac{2}{10} = 0,2$$

Comme  $e_\infty = 1$ , on a :

$$\varepsilon_\infty = e_\infty - q_\infty \Rightarrow q_\infty = e_\infty - \varepsilon_\infty = 1 - 0,2 = 0,8$$

Pour finir :

$$s_\infty = \frac{0,8}{2} = 0,4$$

En conclusion :

$$\begin{cases} e_\infty = 1 \\ \varepsilon_\infty = 0,2 \\ x_\infty = 4 \\ y_\infty = 4 \\ s_\infty = 0,4 \\ q_\infty = 0,8 \end{cases}$$

5.7 Si on considère que la vanne est le système à commander et que le flotteur constitue le capteur de hauteur, nous devons considérer une boucle d'asservissement dont le schéma correspond à la figure 5.22.

Cette vision est conforme au fonctionnement du système : le signal  $H_0(p)$  constitue la consigne, la hauteur  $H(p)$  est mesurée par le flotteur et comme la vanne est commandée directement par la différence de hauteur  $H_0(p) - H(p)$ , on aura  $B(p) = 1$ .

On a donc :

$$q = \frac{dV}{dt} = S \frac{dh}{dt} = k(h_0 - h)$$

Par conséquent :

$$SpH(p) = k[H_0(p) - H(p)]$$

d'où :

$$H(p) = \frac{k}{Sp} [H_0(p) - H(p)]$$

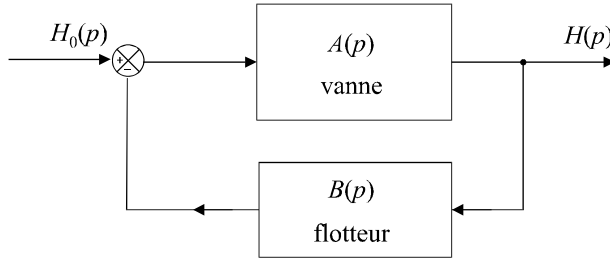


Figure 5.22 Modélisation du dispositif.

Comme le système qui lie  $[H_0(p) - H(p)]$  à  $H(p)$  n'est autre que  $A(p)$ , on en déduit :

$$A(p) = \frac{H(p)}{H_0(p) - H(p)} = \frac{k}{Sp}$$

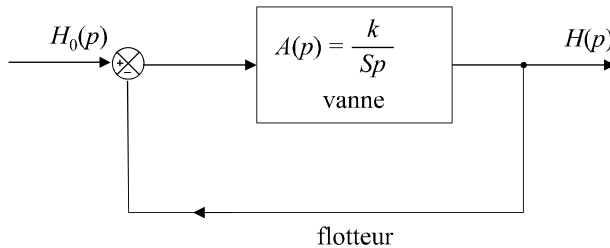


Figure 5.23 Modélisation de la boucle d'asservissement.

On peut donc calculer aisément la fonction de transfert en boucle fermée, que nous prendrons soin de nommer, exceptionnellement par une autre variable que  $H$ .

Soit :

$$T(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)} = \frac{\frac{k}{Sp}}{1 + \frac{k}{Sp}} = \frac{1}{1 + \frac{S}{k}p} = \frac{1}{1 + \frac{0,08}{0,002}p} = \frac{1}{1 + 40p}$$

Si la cuve se vide brutalement, tout se passe comme si on appliquait brutalement, à l'entrée du système, un signal de consigne de hauteur 24 cm. S'agissant d'un système du premier ordre, nous savons que le temps de réponse est de l'ordre de trois fois la constante de temps. Or celle-ci, visiblement, est égale à 40 s.

Par conséquent :

$$t_r \approx 3 \times 40 \text{ s} = 120 \text{ s} = 2 \text{ mn}$$

La cuve mettra donc environ 2 minutes à se remplir.

5.8 De manière évidente, on a :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} = \frac{1}{p + K}$$

Ce résultat nous permet de montrer que n'importe quelle fonction de transfert ne possédant aucun zéro et dont le dénominateur est factorisable dans  $\mathbb{R}$  peut être décomposée en éléments ne comportant que des intégrateurs bouclés individuellement par des gains.

En effet, une telle fonction de transfert peut se mettre sous la forme :

$$G(p) = \alpha \cdot \frac{1}{(p+a)} \cdot \frac{1}{(p+b)} \cdot \frac{1}{(p+c)} \dots$$

autrement dit, en plaçant en cascade plusieurs blocs identiques à celui de la figure 5.13. Ainsi, la fonction de transfert proposée dans l'énoncé se décompose en trois éléments de ce type :

$$G(p) = \frac{1}{(p+1)} \cdot \frac{1}{(p+4)} \cdot \frac{1}{(p+10)}$$

Le schéma initial peut donc être décomposé comme indiqué sur la figure 5.24. On a parfois l'habitude représenter chaque bloc intégrateur par le symbole de l'intégration et chaque gain par un triangle, symbole traditionnel de l'amplificateur (figure 5.25).

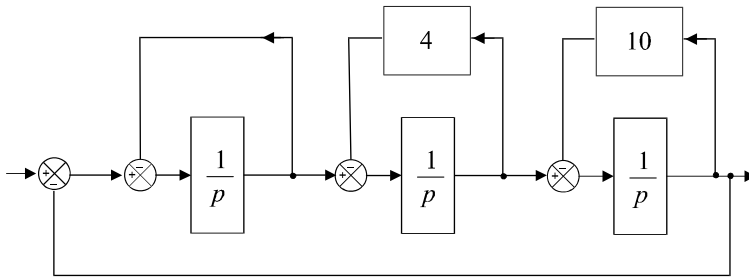


Figure 5.24 Décomposition du système.

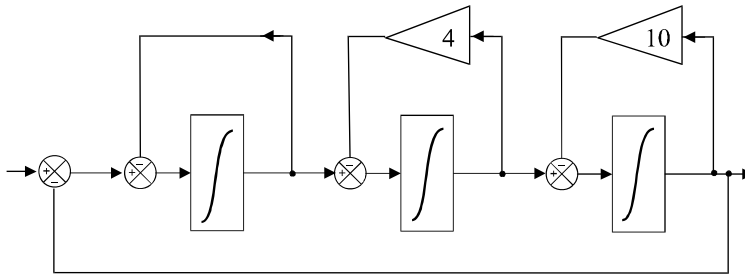


Figure 5.25 Mise sous forme symbolique.

## Chapitre 6

# Stabilité des systèmes linéaires asservis

## 6.1 CRITÈRE MATHÉMATIQUE DE STABILITÉ

### 6.1.1 Énoncé du critère de stabilité

Un système bouclé est stable si et seulement si sa sortie, autrement dit la grandeur physique réelle à réguler reste bornée lorsque l'on injecte un signal borné à son entrée. Dans la pratique, on exige que le signal de sortie converge effectivement vers une valeur finie. D'une manière plus générale, aucun signal dans la boucle de régulation, ne doit osciller ou tendre vers l'infini.

*Remarque :* Dans certains cas, notamment celui des systèmes non linéaires, on peut tolérer la présence d'oscillations dans les signaux, du moment qu'elles restent d'amplitudes limitées.

La stabilité d'un système asservi est une condition obligatoire : l'instabilité est en général synonyme de destruction du système.

La condition mathématique de stabilité s'énonce ainsi :

Un système asservi est stable si et seulement si sa fonction de transfert en boucle fermée ne possède aucun pôle à partie réelle positive.

Même si elles ne constituent pas une démonstration complète à proprement parler, les lignes qui suivent permettent de justifier ce résultat qui est l'un des théorèmes les plus fondamentaux de l'automatique.

Considérons le schéma général d'un système asservi représenté sur la figure 6.1. Sa fonction de transfert en boucle fermée est :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

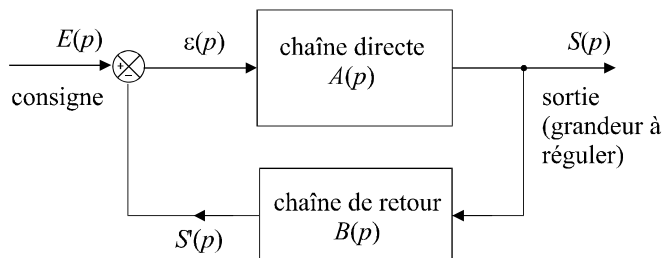


Figure 6.1 Schéma général d'une boucle de régulation.

Cette fonction de transfert est une fraction rationnelle de deux polynômes en  $p$ , factorisables dans le corps des complexes :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\alpha \prod_{j=1}^m (p - z_j)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)}$$

Les  $p_i$  sont les  $n$  pôles de  $H(p)$ . Les  $z_j$  sont ses  $m$  zéros. Ces pôles et zéros peuvent être réels ou complexes. Si un échelon de consigne unitaire est placé à l'entrée du système, on a :

$$S(p) = \frac{H(p)}{p} = \frac{\alpha \prod_{j=1}^m (p - z_j)}{p \prod_{i=1}^n (p - p_i)}$$

Imaginons une décomposition en éléments simples de cette fraction rationnelle et séparons, dans cette décomposition, les termes correspondant à des pôles réels  $r_i$  et ceux correspondant à des pôles complexes  $\tau_k + j\omega_k$  :

$$S(p) = \frac{a}{p} + \sum_i \frac{b_i}{p - r_i} + \sum_k \frac{b_k}{p - (\tau_k + j\omega_k)}$$

La transformée inverse de  $S(p)$  est :

$$s(t) = au(t) + \sum_i b_i e^{r_i t} + \sum_k b_k e^{(\tau_k + j\omega_k)t}$$

Cette expression nous montre déjà que la présence d'un pôle réel positif  $r_i$  introduit dans le signal de sortie, une exponentielle croissante tendant vers l'infini lorsque  $t$  tend vers l'infini. Le système ne peut donc pas être stable s'il existe un pôle réel positif.

Par ailleurs, les termes  $b_k e^{(\tau_k + j\omega_k)t}$  peuvent s'écrire :

$$b_k e^{(\tau_k + j\omega_k)t} = b_k e^{\tau_k t} b_k e^{j\omega_k t}$$

Ces termes, en se recombinant avec les termes  $b_k' e^{(\tau_k - j\omega_k)t}$  (la présence d'un pôle complexe entraîne obligatoire la présence de son conjugué), vont donner naissance à des termes de la forme :

$$e^{\tau_k t} (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t)$$

Les termes de ce type ne peuvent converger vers une valeur finie que si la partie réelle  $\tau_k$  des pôles correspondant est négative. La présence d'un pôle complexe à partie réelle positive entraîne donc l'instabilité du système.

En rassemblant les deux cas, on montre bien que le système ne peut être stable que si tous ses pôles sont à partie réelle négative.

## 6.1.2 Inconvénients du critère mathématique

Le critère mathématique énoncé précédemment possède l'avantage d'être inconditionnel et universel. Toutefois, il possède un certain nombre d'inconvénients.

- Il nécessite non seulement la connaissance de la fonction de transfert mais il suppose également que l'on soit capable de calculer ses pôles. Cette tâche peut être aisée pour des systèmes d'ordres peu élevés, mais elle devient très vite ardue pour des systèmes d'ordres élevés ou qui possèdent de nombreux paramètres.
- La fonction de transfert n'est qu'un modèle qui peut parfois, pour des raisons de simplifications nécessaires, être éloigné de la réalité physique de l'objet qu'il décrit. Le critère mathématique diagnostique la stabilité ou l'instabilité d'un système correspondant au modèle choisi et l'on ne peut jamais être sûr que le système réel, quant à lui, est stable ou pas.
- Pour finir, les lois qui régissent les systèmes physiques peuvent évoluer dans le temps : des pièces peuvent s'user ou des éléments peuvent être sensibles à des variations des conditions de l'environnement extérieur. Un système stable aujourd'hui peut très bien devenir instable par la suite.

Il résulte de ces considérations, d'une part que le critère mathématique est la plupart du temps difficile à utiliser dans la pratique et d'autre part, qu'il possède un caractère trop « binaire ».

Dans les pages qui suivent, nous nous intéresserons à des critères plus faciles à mettre en œuvre et surtout à ceux qui introduisent une notion de marge de stabilité, autrement dit qui permettent de quantifier la stabilité comme une performance en faisant apparaître la notion de système plus ou moins stable. Plus un système sera stable, plus il aura des chances de le rester et les imprécisions de modélisation seront bien évidemment moins dangereuses.

## 6.2 CRITÈRE ALGÈBRE DE ROUTH

### 6.2.1 Principe

Le critère algébrique de Routh ne permet pas de définir une telle notion de marge de sécurité, mais il autorise le diagnostic de stabilité pour des systèmes d'ordre élevé et possédant de surcroît, un ou plusieurs paramètres :

Soit  $H(p)$  la fonction de transfert en boucle fermée et soit  $D(p)$  le dénominateur de  $H(p)$ .  $D(p)$  est un polynôme de degré  $n$  :

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0.$$

On applique le critère de Routh en plaçant la suite de coefficients  $a_i$  dans un tableau, sur deux lignes, dans l'ordre des  $n$  décroissants, alternativement une ligne sur deux. On effectue ensuite un calcul pour créer une ligne supplémentaire, selon l'algorithme présenté sur le schéma ci-dessous.

$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\dots$	$a_1$
$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\dots$	$a_0$
$\frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$\frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$	$\dots$	$\frac{a_{n-1}a_1 - a_n a_0}{a_{n-1}}$	$\dots$

On dispose alors d'un tableau de trois lignes, la troisième ligne possédant moins de termes que les précédentes. On complète alors cette troisième ligne, à droite, par des zéros.

$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\dots$	$a_1$
$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\dots$	$a_0$
$b_m$	$b_{m-1}$	$b_{m-2}$	$b_0$	$0$



On recommence le même calcul sur les deux dernières lignes pour créer une quatrième ligne.

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_n & & a_{n-2} & & a_{n-4} & \cdots & a_1 \\
 a_{n-1} & & a_{n-3} & & a_{n-5} & \cdots & a_0 \\
 b_m & & b_{m-1} & & b_{m-2} & b_0 & 0 \\
 \frac{b_m a_{n-3} - a_{n-1} b_{m-1}}{b_m} & & \frac{b_m a_{n-5} - a_{n-1} b_{m-2}}{b_m} & & \cdots & & 
 \end{array}$$

On itère le processus jusqu'à ce qu'il n'y ai plus que des 0 sur la ligne.

Le nombre de pôles à partie réelle positive, de la fonction de transfert  $H(p)$  est égal au nombre de changements de signe dans la première colonne.  
 En conséquence, le système est stable en boucle fermée si tous les coefficients de la première colonne sont de même signe.

**Remarque :** Le nombre maximal de lignes est égal au nombre de termes dans le polynômes  $D(p)$ , autrement dit à l'ordre du système, plus 1.

### 6.2.2 Exemple

Soit  $G(p) = \frac{K}{p(p^2 + p + 3)}$  un système placé dans une boucle de régulation à retour unitaire (figure 6.2).

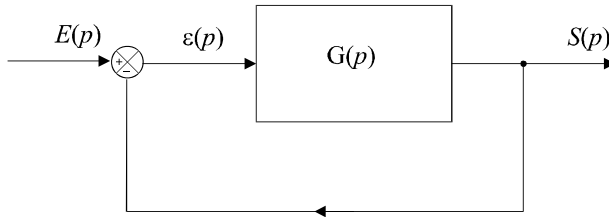


Figure 6.2 Boucle de régulation étudiée.

Calculons sa fonction de transfert en boucle fermée :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{\frac{K}{p(p^2 + p + 3)}}{1 + \frac{K}{p(p^2 + p + 3)}} = \frac{K}{p(p^2 + p + 3) + K}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$D(p) = p(p^2 + p + 3) + K = p^3 + p^2 + 3p + K$$

Appliquons le critère de Routh en construisant le tableau suivant :

1	3
1	K
3 - K	0
K	0

**Remarque :** Une cinquième ligne ne serait composée que de 0.

Pour que le système soit stable, il faut qu'il n'y ait aucun changement de signe dans la première colonne, donc que  $3 - K > 0$ .

Le système est donc stable si  $K < 3$ .

## 6.3 CRITÈRE DE NYQUIST

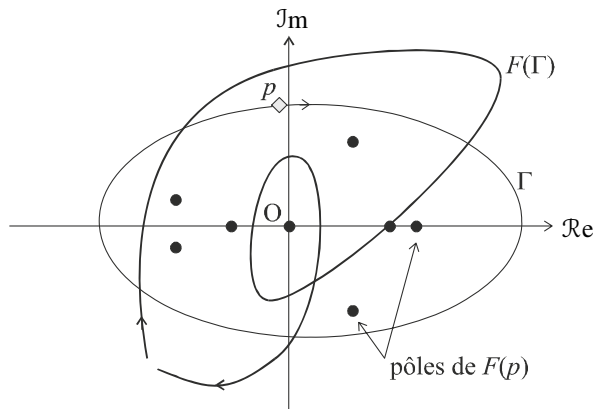
Le critère de Nyquist est un critère graphique de stabilité en boucle fermée obtenu à partir du lieu de Nyquist du système en boucle ouverte. Il est une conséquence du théorème de Cauchy appliqué à la fonction de transfert d'un système asservi.

### a) Théorème de Cauchy

Soit une fonction complexe d'une variable complexe  $F(p)$  possédant  $n$  pôles et  $m$  zéros. On considère, dans le plan complexe, un contour fermé  $\Gamma$  de telle sorte que tous les pôles et tous les zéros de la fonction  $F(p)$  se trouvent à l'intérieur de ce contour (figure 6.3).

Lorsque  $p$  se déplace le long du contour  $\Gamma$ , son image par  $F$  se déplace le long d'une courbe que nous pouvons appeler  $F(\Gamma)$ .

Le nombre de tours effectué par  $F(\Gamma)$  autour de l'origine est égal à  $m - n$ . La différence  $m - n$  est comptée positivement si le sens de rotation de  $p$  le long de  $\Gamma$  coïncide avec le sens de rotation de  $F(\Gamma)$  autour de  $O$  et négativement dans le cas contraire.



**Figure 6.3** Illustration du théorème de Cauchy.

### b) Contour de Nyquist

On définit le contour de Nyquist par la courbe  $\Gamma$  définie par le demi-périmètre d'un cercle de rayon  $R$  et de centre  $O$  lorsque  $R \rightarrow \infty$ , du côté des parties réelles positives.

Ce contour est donc formé de l'axe des imaginaires ( $p = j\omega$ ) pour  $\omega$  variant de  $-\infty$  à  $+\infty$  et d'un arc de cercle de rayon infini qui le referme. Il contient donc tout le demi-plan correspondant aux parties réelles positives (figure 6.4). On l'oriente arbitrairement dans le sens horaire. Cela signifie que l'on supposera, dans l'application du théorème de Cauchy, que  $p$  décrit le contour  $\Gamma$  dans le sens indiqué sur la figure 6.4.

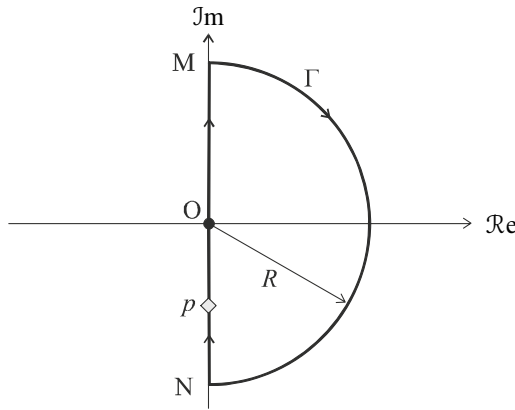


Figure 6.4 Contour de Nyquist.

c) Application du théorème de Cauchy à l'étude de la stabilité

Considérons le système quelconque représenté sur la figure 6.5.

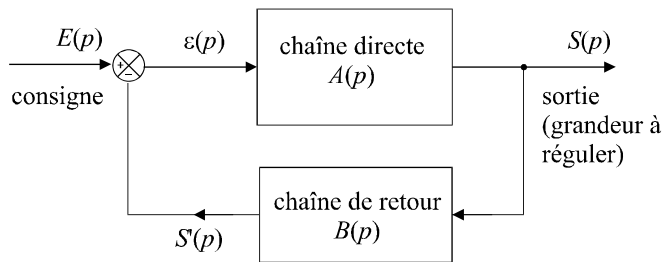


Figure 6.5 Schéma général d'une boucle de régulation.

Ce système est stable en boucle fermée si et seulement si sa fonction de transfert en boucle fermée :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

ne possède aucun pôle à partie réelle positive.

Autrement dit, l'étude la stabilité du système revient à étudier les solutions de l'équation :

$$1 + A(p)B(p) = 0$$

ou encore :

$$1 + G(p) = 0$$

$G(p)$  est la fonction de transfert en boucle ouverte du système. Cela signifie qu'il est possible d'appréhender l'étude la stabilité d'un système en boucle fermée à partir de sa fonction de transfert en boucle ouverte. Le mathématicien Nyquist a eu l'idée de proposer un critère de stabilité basé sur l'application du théorème de Cauchy à la fonction  $F(p) = G(p) + 1$ .

Rappelons que le système est stable si et seulement si aucun pôle de  $H(p)$  n'est à partie réelle positive. Les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée étant les zéros de cette fonction  $F(p)$ , cela signifie que le système est stable si et seulement si aucun zéro de  $F(p)$  ne se trouve à l'intérieur du contour de Nyquist. Il faut donc, pour que le système soit stable, que l'on ait :  $m = 0$ ,  $m$  étant le nombre de zéros de  $F(p)$ , donc le nombre de pôles de  $H(p)$ .

Remarquons par ailleurs, que les pôles de  $G(p)$  sont aussi ceux de  $F(p)$  ; en effet, une fraction rationnelle à laquelle on ajoute 1 donne, après réduction au même dénominateur, une nouvelle fraction rationnelle de même dénominateur. Par conséquent, le nombre  $n$  de pôles de  $F(p)$  se trouvant à l'intérieur du contour de Nyquist est égal au nombre de pôles instables (à partie réelle positive) de  $G(p)$ .

Si on trace l'image par  $F = 1 + G$  du contour de Nyquist, on pourra donc diagnostiquer la stabilité du système en boucle fermée si le nombre de tours effectués par  $F(\Gamma)$  autour de l'origine est égal à  $-n$  où  $n$  est le nombre de pôles de  $G(p)$  à partie réelle positive. Cette conclusion nous conduit à un premier énoncé du critère de Nyquist :

Un système est stable en boucle fermée si l'image du contour de Nyquist par la fonction  $F(p) = G(p)+1$  fait autour de l'origine, dans le sens horaire, un nombre de tours égal à  $-n$  où  $n$  est le nombre de pôles à partie réelle positive de la fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$ . L'image du contour de Nyquist, par ailleurs, ne doit pas passer par l'origine.

*d) Deuxième énoncé du critère de Nyquist*

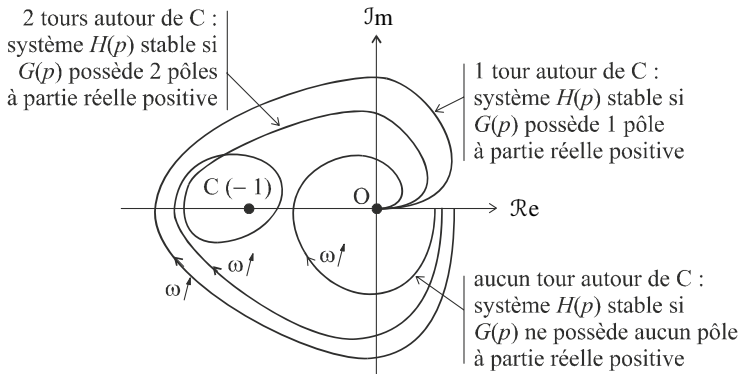
L'étude la position de l'image de  $\Gamma$  par  $F = 1 + G$  par rapport au point O est équivalente à l'étude de la position de son image par  $G$  par rapport au point  $(-1, 0)$  que nous nommerons C et que nous appellerons point critique. Les résultats du paragraphe précédent nous conduisent donc à ce nouvel énoncé :

Un système est stable en boucle fermée si l'image du contour de Nyquist par la fonction  $G(p)$  fait autour du point critique, dans le sens horaire, un nombre de tours égal à  $-n$  où  $n$  est le nombre de pôles à partie réelle positive de la fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$ . L'image du contour de Nyquist, par ailleurs, ne doit pas passer par le point critique.

Le tracé de l'image par  $G(p)$  du contour de Nyquist ne doit pas poser de problème. En effet, si nous décomposons ce contour en trois « segments », on constate que l'image du segment OM (demi-axe  $p = j\omega$ ) n'est autre que le lieu de Nyquist du système en boucle ouverte. L'image du segment NO (demi-axe  $p = -j\omega$ ) est son symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Et l'image du demi-cercle MN est celle d'un ensemble de points de coordonnées  $p = Re^{j\theta}$  lorsque  $R \rightarrow \infty$  et lorsque  $\theta \in \left[ \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right]$ . En règle générale, cette image est confondue avec le point O.

Pour appliquer le critère de Nyquist, il suffit donc, pour déterminer l'image du contour  $\Gamma$  de tracer le lieu de Nyquist du système en boucle ouverte et son symétrique par rapport à l'axe des abscisses et de parcourir la courbe ainsi constituée dans le sens  $\omega \rightarrow -\infty$  vers  $\omega \rightarrow +\infty$ .

La figure 6.6 illustre cet énoncé du critère de Nyquist.



**Figure 6.6** Illustration du critère de Nyquist.

**Remarque :** Le critère de Nyquist mentionne le nombre de tours effectués dans le sens horaire qui doit être égal à l'opposé du nombre de pôles instables de la fonction de transfert en boucle ouverte. On peut également dire que le nombre de tours dans le sens anti-horaire est égal au nombre de pôles instables.

e) *Exemple*

Soit un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  placé dans une boucle de régulation à retour unitaire, avec :

$$G(p) = \frac{K}{(p-1)(p+10)^2}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  possède donc un pôle à partie réelle positive : 1 et un pôle double à partie réelle négative :  $-10$ .

Dans un premier temps, étudions la stabilité de ce système en boucle fermée à partir du critère de Routh ; calculons, pour ce faire, la fonction de transfert en boucle fermée :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{K}{(p-1)(p^2+20p+100)+K}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$D(p) = (p-1)(p^2+20p+100)+K = p^3+19p^2+120p+(K-100)$$

Appliquons le critère de Routh en construisant le tableau suivant :

1	120
19	$K-100$
$\frac{2380-K}{19}$	0
$K-100$	0

**Remarque :** Une cinquième ligne ne serait composée que de 0.

Pour que le système soit stable, il faut qu'il n'y ait aucun changement de signe dans la première colonne. Le système est donc stable si  $100 < K < 2380$ .

Pour tracer le lieu de Nyquist, nous devons à présent réaliser l'étude fréquentielle du système en boucle ouverte :

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega-1)(j\omega+10)^2}$$

soit :

$$G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(\omega^2+1)}(\omega^2+100)}$$

et :

$$\varphi(\omega) = 0 - \arg(-1+j\omega) - 2 \arg(j\omega+10)$$

d'où :

$$\varphi(\omega) = -\pi + \arctan \omega - 2 \arctan \frac{\omega}{10}$$

Choisissons une valeur de  $K$  pour laquelle le système est stable, par exemple  $K = 1000$ . Le diagramme de Bode de ce système se trace aisément (figure 6.7) et le diagramme de Nyquist se déduit de ce diagramme

de Bode (figure 6.8). L'image du contour de Nyquist par  $G(p)$  correspond à ce lieu de Nyquist, à son symétrique par rapport à l'axe réel et à l'image du demi-cercle  $MN$ , c'est-à-dire de l'ensemble des complexes définis par :

$$p = R e^{j\theta} \text{ lorsque } R \rightarrow \infty \text{ et lorsque } \theta \in \left[ \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right].$$

Il est facile de vérifier que l'image de tout point  $p = R e^{j\theta}$  par  $G(p)$  correspond au point  $O$ .

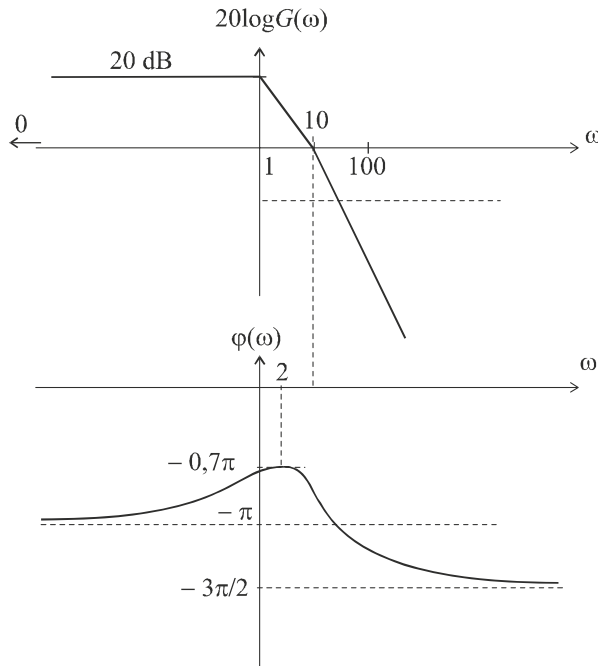


Figure 6.7 Diagrammes de Bode du système.

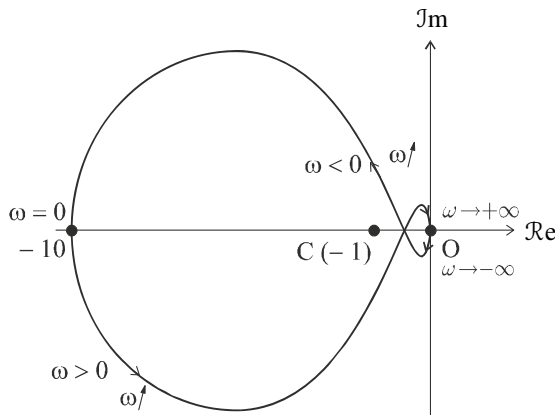


Figure 6.8 Diagramme de Nyquist du système.

**Remarque :** Le tracé point par point de ces courbes peut être facilement obtenu à l'aide de n'importe quel tableur ou logiciel graphique.

Parcourons l'image par  $G(p)$  du contour de Nyquist dans le sens des  $\omega$  croissants : nous sommes dans le sens anti-horaire. Cette image fait un seul tour autour du point critique ; le système est donc bien stable étant donné que la fonction de transfert en boucle ouverte possède un seul pôle à partie réelle positive.

## 6.4 CRITÈRE DU REVERS

Le critère du revers constitue, en quelque sorte, une vision simplifiée du critère de Nyquist dans le cas, fort répandu, où la fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  du système étudié ne possède aucun pôle à partie réelle positive.

Dans ces conditions, le critère de stabilité peut s'exprimer comme suit :

Si la fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  d'un système asservi ne possède aucun pôle à partie réelle positive, alors ce système est stable en boucle fermée si, en parcourant le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte dans le sens des  $\omega$  croissants, on laisse toujours le point critique  $C$  à gauche de la courbe.

La figure 6.5 illustre ce critère du revers

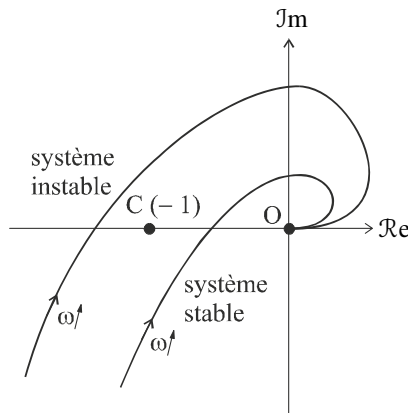


Figure 6.9 Critère du revers.

**Remarque :** Ne jamais perdre de vue que l'on trace toujours le lieu de Nyquist du système en boucle ouverte pour étudier sa stabilité en boucle fermée.

## 6.5 MARGES DE STABILITÉ

### 6.5.1 Concept de marge de stabilité

L'ensemble des critères que nous venons d'étudier permet de diagnostiquer si oui ou non un système est stable en boucle fermée. Le résultat est toujours binaire : le système est stable ou instable. Toutefois, certains de ces critères permettent de pressentir la notion de marge de sécurité relative à la stabilité d'un système.

Ainsi, lorsque la condition de stabilité donnée par le critère de Routh nous indique qu'un système est stable, par exemple si  $K < 3$ , nous avons l'intuition qu'il est sans doute préférable, pour la stabilité du système, de régler le gain  $K$  sur 2 plutôt que sur 2,99.

De même, nous aurons tendance à considérer qu'un système dont le lieu de Nyquist passe loin à droite du point critique, sera « plus » stable que s'il passait très près de ce point.

Ces considérations nous invitent donc à définir une notion de marge de stabilité, en relation avec cet « éloignement » par rapport au seuil critique d'instabilité. Nous allons ainsi définir successivement la marge de gain et la marge de phase, à partir d'observations géométriques simples dans le lieu de Nyquist du système.

### 6.5.2 Marge de gain

#### a) Définition

Considérons le diagramme de Nyquist d'un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$ . Formulons l'hypothèse que cette fonction de transfert en boucle ouverte ne possède que des pôles à partie réelle négative, ce qui nous permet d'appréhender sa stabilité en boucle fermée à l'aide du critère du revers. En vertu de ce critère, le système est stable en boucle fermée si et seulement si son lieu de Nyquist en boucle ouverte laisse constamment le point critique à sa gauche (figure 6.10).

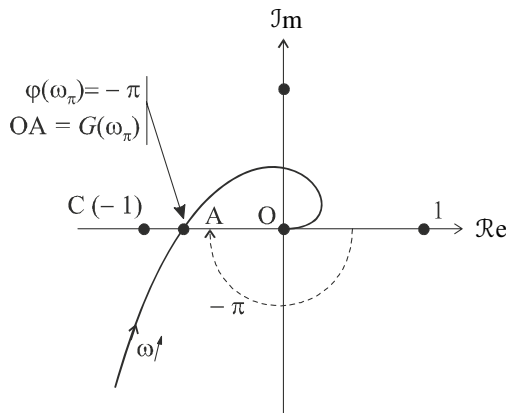


Figure 6.10 Évaluation de la marge de gain.

Très intuitivement, le système sera d'autant plus stable, c'est-à-dire, plus sûr, que la courbe « passera » loin du point critique. Une des possibilités, pour chiffrer cet éloignement, consiste à évaluer la distance entre le point critique C et le point A défini comme le point d'intersection de la courbe avec l'axe réel.

Plus la distance CA est importante, plus le système est stable. On pourrait définir la marge de stabilité par cette distance, mais on préfère, en général utiliser la distance OA qui correspond aux coordonnées :

$$\begin{cases} G(\omega) = OA \\ \varphi(\omega) = -\pi \end{cases}$$

**Remarque :** L'angle formé par l'axe des réels et le segment OA pourrait tout aussi bien valoir  $+\pi$ . Toutefois, la plupart des systèmes réels rencontrés dans la pratique présentent en fait des déphasages négatifs. En règle générale, le point de concours entre la courbe de Nyquist en boucle ouverte et l'axe des réels correspond donc à un déphasage égal à  $-\pi$ .

Appelons  $\omega_\pi$  la pulsation pour laquelle se produit cette intersection.

On a :

$$OA = G(\omega_\pi)$$



On définit alors la marge de gain par :

$$\Delta G = -20 \log OA = -20 \log G(\omega_\pi)$$

Cette définition permet de chiffrer une marge gain en décibels d'autant plus importante que le système est stable.

En considérant que l'on a toujours  $G(\omega_\pi) < 1$  (car sinon le point A se trouverait à gauche du point C et le système serait donc instable), on a :

$$0 < \Delta G < +\infty$$

Plus  $\Delta G$  est grand, plus le système est stable.

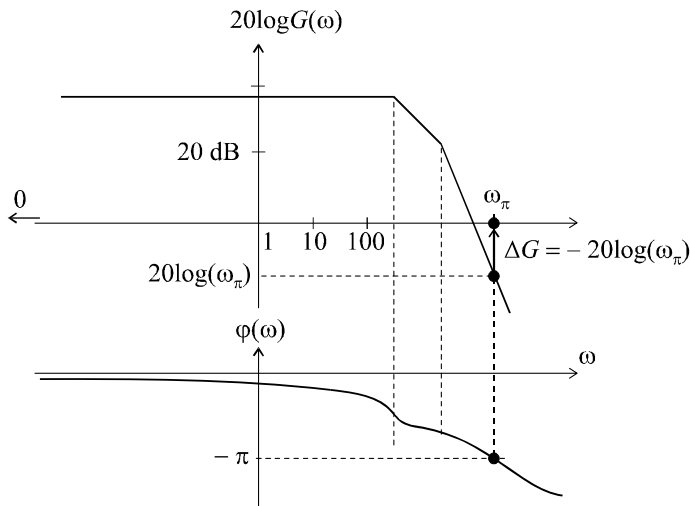


Figure 6.11 Mise en évidence de la marge de gain sur le diagramme de Bode.

**Remarque :** Il est possible de localiser la mesure de la marge de gain sur le diagramme de Bode. Il suffit de repérer, grâce au diagramme de phase, la pulsation correspondant au déphasage égal à  $-\pi$ , puis, dans le diagramme de gain, à cette pulsation, de mesurer  $\Delta G$ , directement en décibels (figure 6.11).

b) Exemple

Considérons un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  placé dans une boucle de régulation à retour unitaire,

avec :

$$G(p) = \frac{5}{\left(\frac{p}{100} + 1\right)^3}$$

Le calcul de la marge de gain consiste à chercher, dans un premier temps, la valeur de  $\omega_\pi$ , puis à calculer  $\Delta G = -20 \log G(\omega_\pi)$ .

$\omega_\pi$  est telle que :

$$\varphi(\omega_\pi) = -\pi$$

On a :

$$G(j\omega) = \frac{5}{\left(j\frac{\omega}{100} + 1\right)^3}$$

donc :

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = 0 - 3 \arctan \frac{\omega}{100}$$

$$\varphi(\omega_\pi) = -\pi \Rightarrow -3 \arctan \frac{\omega_\pi}{100} = -\pi \Rightarrow \omega_\pi = 100 \tan \frac{\pi}{3} = 100\sqrt{3}$$

On a alors :

$$\Delta G = -20 \log G(100\sqrt{3})$$

$$\Delta G = -20 \log \frac{5}{\left(\sqrt{\frac{\omega_\pi^2}{10^4} + 1}\right)^3} = -20 \log \frac{5}{(\sqrt{3+1})^3} = -20 \log \frac{5}{8}$$

soit :

$$\Delta G = 4 \text{ dB}$$

### 6.5.3 Marge de phase

#### a) Définition

Une marge de gain importante ne garantit pas obligatoirement une excellente stabilité. On peut effectivement observer des systèmes présentant un point d'intersection A entre le lieu de Nyquist est l'axe des abscisses suffisamment éloigné du point critique C, tout en ayant une courbe qui peut passer au voisinage de ce point critique. La figure 6.12 en est une illustration. Dans ce cas de figure, un modèle trop imprécis ou des perturbations de fonctionnement du système peuvent bien évidemment s'avérer dangereux.

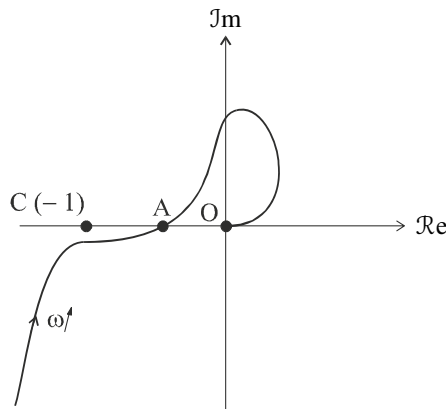


Figure 6.12 Diagramme de Nyquist.

C'est pour cette raison que l'on introduit également la notion de marge de phase qui permet de chiffrer « l'éloignement angulaire » entre le lieu de Nyquist et le point critique. Considérons, sur la figure 6.13, le diagramme de Nyquist d'un système stable (le lieu de Nyquist laisse constamment le point critique C sur sa gauche).

Traçons le cercle de rayon 1 passant par O. Ce cercle passe bien sûr par le point critique C. Le point B situé à l'intersection du lieu de Nyquist et de ce cercle est le point du lieu qui correspond à la pulsation  $\omega_{c0}$  puisque, par définition,  $G(\omega_{c0}) = 1$ . En évaluant l'éloignement de ce point B par rapport au point C, nous pouvons à nouveau définir une marge de stabilité. Cette marge, mesurée par l'écart angulaire COB, est appelée marge de phase du système et notée  $\Delta\varphi$ .

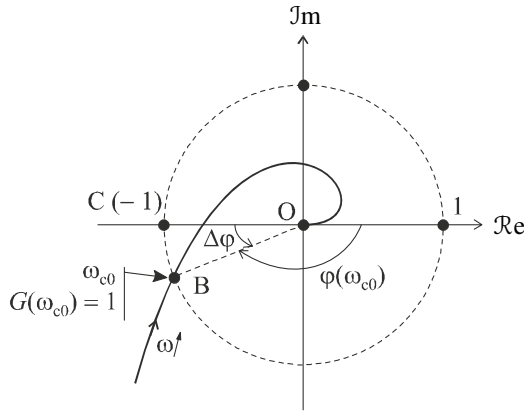


Figure 6.13 Définition de la marge de phase.

Comme :  $\varphi(\omega_{c0}) - \Delta\varphi = -\pi$

on a :  $\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0})$

**Remarque :** Il est possible de localiser la mesure de la marge de phase sur le diagramme de Bode. Il suffit de repérer, grâce au diagramme de gain, la position de la pulsation de coupure à 0 dB puis, dans le diagramme de phase, à cette pulsation, de mesurer la marge de phase comme l'écart entre  $-\pi$  et le déphasage correspondant (figure 6.14)

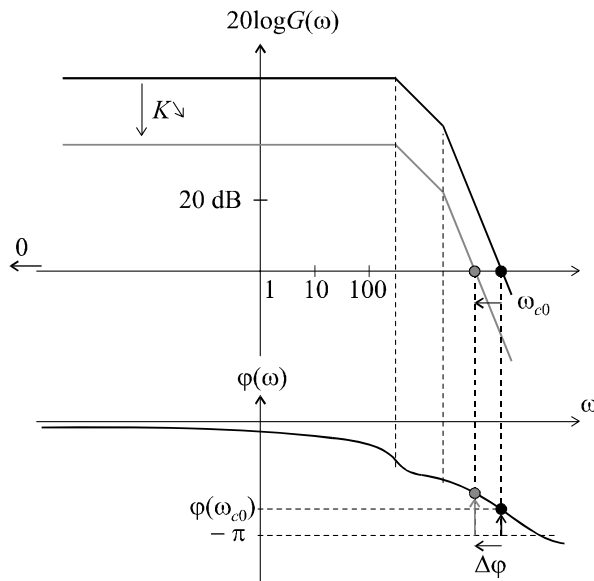


Figure 6.14 Marge de phase mesurée sur la diagramme de Bode.

**Remarque :** En général, la marge de phase est exprimée en degrés. On considère qu'une marge de phase supérieure à  $45^\circ$  correspond à une bonne stabilité.

b) Exemple

Considérons à nouveau le système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  placé dans une boucle de régulation à retour unitaire,

avec :

$$G(p) = \frac{5}{\left(\frac{p}{100} + 1\right)^3}$$

Le calcul de la marge de phase consiste à chercher, dans un premier temps, la valeur de  $\omega_{c0}$ , puis à calculer  $\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0})$ .

$\omega_{c0}$  est telle que :

$$G(\omega_{c0}) = 1$$

On a :

$$G(j\omega) = \frac{5}{\left(\frac{j\omega}{100} + 1\right)^3}$$

De plus :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{5}{\left(\sqrt{\frac{\omega_{c0}^2}{10^4} + 1}\right)^3} = 1$$

donc :

$$\sqrt{\frac{\omega_{c0}^2}{10^4} + 1} = \sqrt[3]{5}$$

soit :

$$\omega_{c0}^2 = 10^4 \left[ \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 - 1 \right]$$

d'où :

$$\omega_{c0} \approx 139 \text{ rad/s}$$

On a alors :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0})$$

Comme :

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = 0 - 3 \arctan \frac{\omega}{100}$$

on a :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi - 3 \arctan \frac{139}{100} = 0,3 \text{ rad} = 17^\circ$$

## 6.6 INFLUENCE DU GAIN SUR LA STABILITÉ

Considérons un système de fonction de transfert  $G(p)$ , placé dans la chaîne directe d'une boucle de régulation avec un amplificateur de gain  $K$ , la boucle de retour étant supposée unitaire (figure 6.15). On formulera également l'hypothèse que tous les pôles de  $G(p)$  sont à partie réelle négative, afin de pouvoir étudier la stabilité du système en boucle fermée à l'aide du critère du revers.

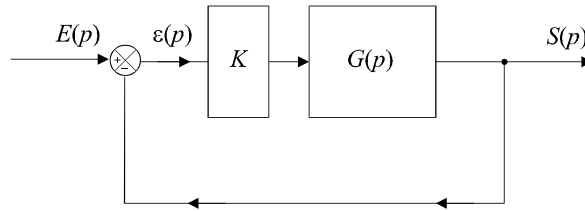


Figure 6.15 Schéma de la boucle de régulation.

Supposons dans un premier temps que le système soit stable pour  $K = 1$  et traçons le lieu de Nyquist  $\Gamma_1$  dans ce cas, autrement dit nous traçons le diagramme pour  $G(j\omega)$ . Le lieu passe bien évidemment à droite du point critique puisque le système est supposé stable (courbe en trait plein sur la figure 6.16).

Si on suppose à présent que  $K > 1$ , on aura pour nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte :

$$G'(p) = K \cdot G(p) \Rightarrow G'(j\omega) = K \cdot G(j\omega)$$

soit :

$$G'(\omega) = K \cdot G(\omega) \text{ et } \varphi'(\omega) = \varphi(\omega)$$

Le nouveau lieu de Nyquist obtenu,  $\Gamma_2$  (en pointillés sur la figure 6.16), se déduit donc simplement de  $\Gamma_1$  par simple homothétie de rapport  $K$ . En effet, pour une pulsation  $\omega$  donnée, si  $M$  et  $M'$  sont respectivement les deux points de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  correspondant à cette pulsation, on a :

$$G'(\omega) = K \cdot G(\omega) \text{ et } \varphi'(\omega) = \varphi(\omega)$$

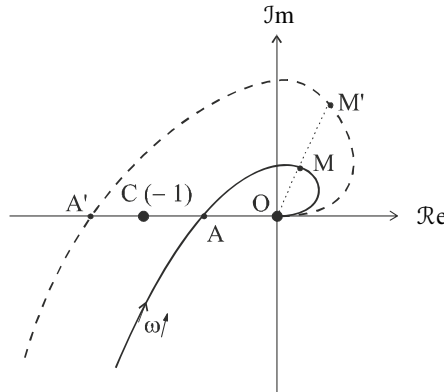


Figure 6.16 Influence du gain sur la stabilité.

La figure 6.16 montre que le choix d'une valeur trop importante de  $K$  risque de faire passer la courbe à gauche du point critique, le rendant, de fait, instable. Ce résultat, que nous pouvons considérer comme général, montre l'influence du gain sur la stabilité des systèmes linéaires continus.

## EXERCICES

### 6.1 Stabilité d'un système du premier ordre

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{K}{1 + Tp} \text{ avec } K > 0 \text{ et } T > 0$$

Montrer que ce système, placé dans une boucle à retour unitaire, est stable en boucle fermée quelle que soit la valeur du gain statique  $K$ .

### 6.2 Stabilité d'un système du second ordre

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1} \text{ avec } K > 0, \xi > 0 \text{ et } \omega_n > 0$$

Montrer que ce système, placé dans une boucle à retour unitaire, est stable en boucle fermée quelle que soit la valeur du gain statique  $K$ .

### 6.3 Stabilité d'un système du troisième ordre

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{K}{p(p+1)(p+2)} \text{ avec } K > 0$$

Déterminer à l'aide du critère de Routh les conditions de stabilité de ce système en boucle fermée lorsqu'il est placé dans une boucle d'asservissement à retour unitaire.

### 6.4 Stabilité d'un système du troisième ordre à un pôle triple

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{K}{(p+1)^3} \text{ avec } K > 0$$

Déterminer à l'aide du critère de Routh les conditions de stabilité de ce système en boucle fermée lorsqu'il est placé dans une boucle d'asservissement à retour unitaire. Calculer la valeur de  $K$  qui assure au système une marge de phase égale à  $45^\circ$ .

### 6.5 Stabilité d'un système du troisième ordre à un pôle double

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{K}{p(p+3)^2} \text{ avec } K > 0$$

Déterminer à l'aide du critère de Routh les conditions de stabilité de ce système en boucle fermée lorsqu'il est placé dans une boucle d'asservissement à retour unitaire. Calculer la valeur de  $K$  qui assure au système une marge de phase égale à  $45^\circ$ .

### 6.6 Régulation d'un système avec deux conditions de stabilité

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{K}{p(p+100)^2} \text{ avec } K > 0$$

Déterminer les conditions sur la valeur de  $K$  de manière à ce que le système soit caractérisé, en boucle fermée à retour unitaire, par une marge de phase supérieure à  $45^\circ$  et par une marge de gain supérieure à 6 dB.

### 6.7 Mise en évidence des marges sur les diagrammes de Bode

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{K}{(p+10)^3} \text{ avec } K > 0$$

Déterminer la valeur de  $K$  qui assure au système une marge de gain égale à 6 dB. Calculer la marge de phase pour cette valeur de  $K$ . Tracer les diagrammes de Bode du système en boucle ouverte en y faisant apparaître ces marges.

### 6.8 Réglage de la pulsation de coupure à 0 dB

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{K}{p(p+10)^2} \text{ avec } K > 0$$

Déterminer la valeur de  $K$  qui permet d'obtenir une pulsation de coupure à 0 dB égale à :

$$\omega_{c0} = 20 \text{ rad/s}$$

Déterminer la valeur de la marge de phase pour cette valeur de  $K$ .

## SOLUTIONS

**6.1** La stabilité peut ici être facilement étudiée par le calcul de l'unique pôle de la fonction de transfert en boucle fermée.

On a :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{K}{Tp+1+K}$$

L'unique pôle de cette fonction de transfert en boucle fermée est :

$$p_1 = -\frac{K+1}{T}$$

Ce pôle est négatif, de toute évidence. Par conséquent le système est stable quelle que soit la valeur du gain statique  $K$ .

**6.2** La fonction de transfert en boucle fermée a ici pour expression :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1 + K}$$

Cette fonction de transfert possède deux pôles que nous pouvons facilement calculer. Calculons pour ce faire le discriminant du trinôme situé au dénominateur :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \frac{4\xi^2}{\omega_n^2} - \frac{4(1+K)}{\omega_n^2} = \frac{4}{\omega_n^2} [\xi^2 - (1+K)]$$

Si  $\xi^2 - (1+K) > 0$ ,  $\Delta > 0$  et la fonction de transfert  $H(p)$  possède alors deux pôles réels ayant pour expressions :

$$p_{1/2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_n} \pm \frac{2}{\omega_n} \sqrt{\xi^2 - (1+K)}}{\frac{2}{\omega_n^2}}$$

De toute évidence :

$$\frac{2}{\omega_n} \sqrt{\xi^2 - (1+K)} < \frac{2\xi}{\omega_n}$$

Par conséquent, les deux pôles  $p_1$  et  $p_2$  sont toujours strictement négatifs. Dans ce cas, le système est donc toujours stable en boucle fermée.

Si  $\xi^2 - (1+K) = 0$ ,  $\Delta = 0$  et la fonction de transfert  $H(p)$  possède alors un pôle réel double ayant pour expression :

$$p_1 = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_n}}{\frac{2}{\omega_n^2}} = -\xi\omega_n$$

Ce pôle est toujours négatif. Par conséquent le système est toujours stable en boucle fermée.

Si  $\xi^2 - (1+K) < 0$ ,  $\Delta < 0$  et la fonction de transfert  $H(p)$  possède alors deux pôles complexes conjugués ayant pour expressions :

$$p_{1/2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_n} \pm j \frac{2}{\omega_n} \sqrt{(1+K) - \xi^2}}{\frac{2}{\omega_n^2}}$$

La partie réelle de ces deux pôles est toujours négative. Le système est donc stable en boucle fermée.

En conclusion, quels que soient les cas étudiés, le système proposé est toujours stable en boucle fermée.

### 6.3 Calculons la fonction de transfert en boucle fermée :

On a :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{p(p+1)(p+2) + K}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert a pour expression :

$$D(p) = p(p+1)(p+2) + K = p^3 + 3p^2 + 2p + K$$

Établissons la table de Routh pour étudier la condition de stabilité :

1	2
3	K
6 - K	0
K	0

Le système est stable en boucle fermée s'il n'y a aucun changement de signe dans la première colonne, donc si  $K < 6$ .

### 6.4 Calculons la fonction de transfert en boucle fermée :

On a :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{(p+1)^3 + K}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert a pour expression :

$$D(p) = (p+1)^3 + K = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 + K$$

Établissons la table de Routh pour étudier la condition de stabilité :

1	3
3	K + 1
$\frac{8 - K}{3}$	0
K	0



Le système est stable en boucle fermée s'il n'y a aucun changement de signe dans la première colonne, donc si  $K < 8$ . Pour disposer d'une marge de phase égale à  $45^\circ$ , il faut avoir :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \frac{\pi}{4}$$

Or :

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega + 1)^3} \Rightarrow \varphi(\omega) = -3 \arctan \omega$$

On a donc :

$$\pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi - 3 \arctan \omega_{c0} = \frac{\pi}{4}$$

d'où :

$$3 \arctan \omega_{c0} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \omega_{c0} = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \text{ rad/s}$$

Or  $\omega_{c0}$  est tel que :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\left(\sqrt{\omega_{c0}^2 + 1}\right)^3} = 1 \Rightarrow K = \left(\sqrt{2}\right)^3 = 2,8$$

En conclusion, on obtient une marge de phase  $\Delta\varphi = 45^\circ$  pour  $K = 2,8$ .

### 6.5 Calculons la fonction de transfert en boucle fermée :

On a :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{p(p+3)^2 + K}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert a pour expression :

$$D(p) = p(p+3)^2 + K = p^3 + 6p^2 + 9p + K$$

Établissons la table de Routh pour étudier la condition de stabilité :

1	9
6	K
54 - K	0
K	0

Le système est stable en boucle fermée s'il n'y a aucun changement de signe dans la première colonne, donc si  $K < 54$ . Pour disposer d'une marge de phase égale à  $45^\circ$ , il faut avoir :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \frac{\pi}{4}$$

Or :

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega + 3)^2} \Rightarrow \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{\omega}{3}$$

On a donc :

$$\pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi - \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{\omega_{c0}}{3} = \frac{\pi}{4}$$

d'où :

$$2 \arctan \frac{\omega_{c0}}{3} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \omega_{c0} = 3 \tan \frac{\pi}{8} = 1,24 \text{ rad/s}$$

Or  $\omega_{c0}$  est tel que :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\omega_{c0}(\omega_{c0}^2 + 9)} = 1 \Rightarrow K = 13$$

En conclusion, on obtient une marge de phase  $\Delta\varphi = 45^\circ$  pour  $K = 13$ .

**6.6** La condition sur la marge de phase s'exprime ainsi :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \frac{\pi}{4}$$

Or :

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega + 100)^2} \Rightarrow \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{\omega}{100}$$

On a donc :

$$\pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi - \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{\omega_{c0}}{100} = \frac{\pi}{4}$$

d'où :

$$2 \arctan \frac{\omega_{c0}}{100} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \omega_{c0} = 100 \tan \frac{\pi}{8} = 41,4 \text{ rad/s}$$

Or  $\omega_{c0}$  est tel que :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\omega_{c0}(\omega_{c0}^2 + 10^4)} = 1 \Rightarrow K = 485 \cdot 10^3$$

En conclusion, on obtient une marge de phase  $\Delta\varphi > 45^\circ$  pour  $K < 485 \cdot 10^3$ .

Calculons à présent la marge de gain. Par définition :

$$\Delta G = -20 \log G(\omega_\pi) \text{ avec } \varphi(\omega_\pi) = -\pi$$

On a :

$$\varphi(\omega_\pi) = -\frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{\omega_\pi}{100} = -\pi$$

soit :

$$\arctan \frac{\omega_\pi}{100} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \omega_\pi = 100 \text{ rad/s}$$

On a donc :

$$G(\omega_\pi) = \frac{K}{\omega_\pi(\omega_\pi^2 + 10^4)} = \frac{K}{2 \cdot 10^6}$$

d'où :

$$\Delta G = -20 \log G(\omega_\pi) = -20 \log \frac{K}{2 \cdot 10^6} = -20 \log K + 126 \text{ dB}$$

Il est donc aisé de déterminer la condition sur  $K$  pour obtenir une marge de gain supérieure à 6 dB :

$$\Delta G > 6 \text{ dB} \Rightarrow -20 \log K > -120 \text{ dB}$$

$$\log K < 6 \Rightarrow K < 10^6$$

Comme les deux conditions  $\Delta\varphi > 45^\circ$  et  $\Delta G > 6 \text{ dB}$  doivent être simultanément vérifiées, il nous faut choisir la condition la plus restrictive sur  $K$  :

$$K < 485 \cdot 10^3$$

**6.7** Calculons la fonction de transfert en boucle fermée :

On a :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{(p + 10)^3 + K}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert a pour expression :

$$D(p) = (p + 10)^3 + K = p^3 + 30p^2 + 300p + K$$

Établissons la table de Routh pour étudier la condition de stabilité :

1	300
30	$K$
$9000 - K$	0
$K$	0

Le système est stable en boucle fermée s'il n'y a aucun changement de signe dans la première colonne, donc si  $K < 9000$ .

Pour disposer d'une marge de gain égale à 6 dB, il faut avoir :

$$\Delta G = -20 \log G(\omega_\pi) = 6 \text{ dB avec } \varphi(\omega_\pi) = -\pi$$

On a :

$$\varphi(\omega_\pi) = -3 \arctan \frac{\omega_\pi}{10} = -\pi$$

soit :

$$\arctan \frac{\omega_\pi}{10} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega_\pi = 17,3 \text{ rad/s}$$

On a donc :

$$G(\omega_\pi) = \frac{K}{\left(\sqrt{\omega_\pi^2 + 100}\right)^3} = \frac{K}{8000}$$

d'où :

$$\Delta G = -20 \log G(\omega_\pi) = -20 \log \frac{K}{8000} = -20 \log K + 78 \text{ dB}$$

Il est donc aisé de déterminer la valeur de  $K$  qui permet d'obtenir une marge de gain égale à 6 dB :

$$\Delta G = 6 \text{ dB} \Rightarrow -20 \log K = -72 \text{ dB}$$

$$K = 3981$$

Calculons à présent la marge de phase correspondant à cette valeur du gain.

On a :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{3981}{\left(\sqrt{\omega_{c0}^2 + 100}\right)^3} = 1$$

d'où :

$$\sqrt{\omega_{c0}^2 + 100} = 15,85 \Rightarrow \omega_{c0} = 12,3 \text{ rad/s}$$

On a donc :

$$\Delta \varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi - 3 \arctan \frac{\omega_{c0}}{10} = 0,48 \text{ rad} = 27^\circ$$

Traçons à présent le diagramme de Bode du système. Pour  $\omega \rightarrow 0$ , on a :

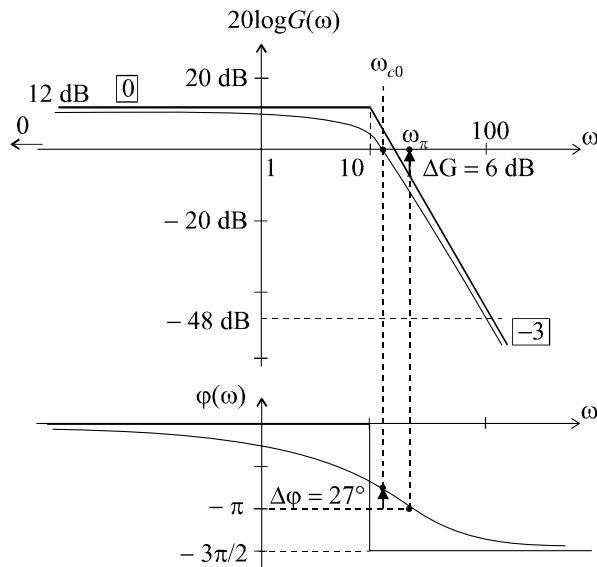
$$G(p) \approx \frac{K}{1000} \Rightarrow G(\omega) \approx \frac{K}{1000} \approx 3,98$$

Soit un gain statique de  $20 \log 3,98 = 12 \text{ dB}$ .

Le diagramme de Bode de gain est donc constitué d'un premier segment horizontal, à 12 dB, valable jusqu'à la pulsation de coupure  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ . Au delà de cette pulsation, la pente est décrétementée de 3 unités, autrement dit, passe à  $-60 \text{ dB/décade}$ . Pour tracer ce segment avec précision, il suffit de remarquer qu'il passe par le point  $(100, -48 \text{ dB})$ .

Le diagramme de phase asymptotique se déduit des pentes du diagramme de gain et les deux diagrammes réels peuvent facilement être esquissés, voire tracés avec précision compte tenu de la simplicité de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Il est alors facile de repérer la pulsation  $\omega_{c0}$ , point de concours du diagramme de gain réel avec l'axe des abscisses. La marge de phase se mesure alors, pour cette pulsation  $\omega_{c0}$ , dans le diagramme de phase : il s'agit de l'écart entre  $-\pi$  et la valeur du déphasage  $\varphi(\omega_{c0})$ .



**Figure 6.17** Mise en évidence des marges de stabilité sur le diagramme de Bode.

De même, la pulsation  $\omega_\pi$  se repère facilement dans le diagramme de phase : il s'agit du point de concours entre le diagramme de phase réel et la droite d'équation  $\varphi = -\pi$ . Pour cette pulsation, la marge de gain se mesure alors dans le diagramme de gain : il s'agit de l'écart entre la courbe réelle et l'axe des abscisses (figure 6.17).

**6.8** Par définition, on a :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\omega_{c0} (\omega_{c0}^2 + 100)} = 1 \text{ avec } K > 0$$

Par conséquent :

$$K = \omega_{c0} (\omega_{c0}^2 + 100) = 10^4$$

Par ailleurs :

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega (j\omega + 10)^2} \Rightarrow \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{\omega}{10}$$

On a donc :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi - \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{20}{10} = -0,64 \text{ rad}$$

La marge de phase étant négative, le système est instable. Il est donc impossible de régler  $K$  de manière à obtenir  $\omega_{c0} = 20$  rad/s tout en assurant la stabilité du système.

## Chapitre 7

# Performances des systèmes linéaires asservis

### 7.1 PROBLÉMATIQUE GÉNÉRALE

Considérons un système à réguler (figure 7.1) à l'entrée duquel on introduit un signal de consigne  $e(t)$  sous la forme d'un échelon. Si le système est stable, nous nous attendons, bien évidemment, à ce que le signal de sortie converge vers une valeur finie  $s_\infty$  la plus proche possible de cette consigne. Plus la valeur de convergence de la sortie sera proche de la valeur de consigne, plus le système sera précis.

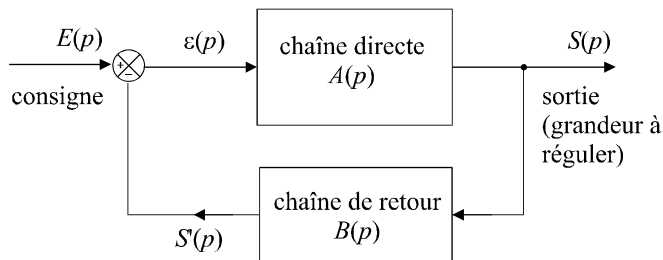


Figure 7.1 Schéma général d'une boucle de régulation.

Nous nous attendons également à ce que cette valeur de convergence soit atteinte le plus vite possible. On réclame donc au système une certaine rapidité.

Pour finir, la forme du régime transitoire nous intéresse également, notamment pour la présence éventuelle d'un dépassement temporaire de la valeur finale de la sortie. La limitation de ce dépassement constitue donc aussi une performance particulière d'un système régulé ou asservi.

La figure 7.2 qui présente une réponse typique d'un système asservi commandé par une consigne en échelon, nous permet de localiser, sur la courbe de cette réponse, ces différentes performances.

Nous pourrions également ajouter à ces trois critères, un quatrième élément qui est, la plupart du temps, est considéré comme une performance : la marge de stabilité.

**Remarque :** Si l'évaluation de la précision et du dépassement semblent relativement aisées à définir, les choses sont un peu plus complexes pour la rapidité, un système linéaire n'atteignant jamais, en théorie, sa valeur finale. Nous définirons un peu plus tard des paramètres adéquats pour quantifier cette performance.

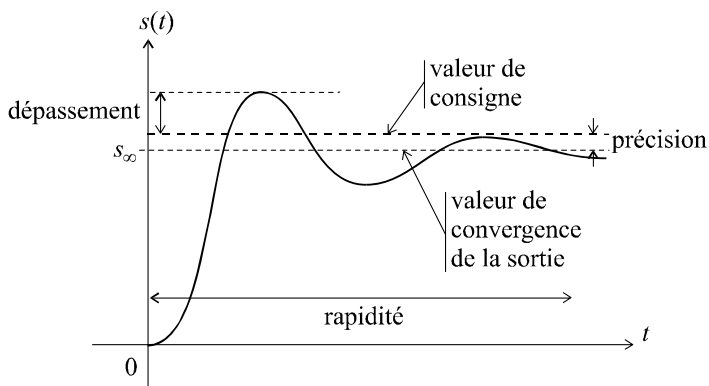


Figure 7.2 Réponse d'un système à une consigne en échelon.

## 7.2 PRÉCISION D'UN SYSTÈME ASSERVI

### 7.2.1 Erreur statique ou erreur de position

#### a) Définition

Soit un système bouclé de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  et de fonction de transfert en boucler fermée  $H(p)$ .

On appelle erreur statique (ou erreur de position) du système en boucle fermée, le paramètre  $\varepsilon_p$  défini par :

$$\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) \text{ lorsque } e(t) = u(t), \text{ échelon unitaire}$$

En invoquant le théorème de la valeur finale, on a :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p[E(p) - S(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} p[E(p) - H(p)E(p)]$$

Puisque l'entrée est un échelon unitaire, on a :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left[ \frac{1}{p} - \frac{H(p)}{p} \right]$$

Soit :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} [1 - H(p)]$$

Cette erreur de position est un des paramètres qui permet d'évaluer la précision d'un système en boucle fermée. Plus  $\varepsilon_p$  est faible, meilleure est la précision du système.

#### b) Erreur de position d'un système de gain statique $K$ en boucle ouverte

Formulons l'hypothèse qu'un système possède une fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  placée dans une boucle à retour unitaire, avec :

$$G(p) = \frac{K}{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}$$

Nous avons affaire à un système de gain statique  $K$ , étant donné que :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(\omega) = \lim_{p \rightarrow 0} G(p) = K$$

La fonction de transfert en boucle fermée est donc égale à :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{1 + K + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= \lim_{p \rightarrow 0} [1 - H(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ 1 - \frac{K}{1 + K + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n} \right] \\ \varepsilon_p &= 1 - \frac{K}{1 + K} = \frac{1}{K + 1} \end{aligned}$$

L'erreur de position en boucle fermée d'un système possédant un gain statique  $K$  en boucle ouverte est égale à  $\varepsilon_p = \frac{1}{K + 1}$ .

Nous pouvons en conclure que la précision est d'autant meilleure que le gain statique est important.

**Remarque :** Ce résultat, bien qu'intéressant, possède néanmoins un côté inquiétant : nous savons déjà qu'une bonne stabilité est souvent associée à un gain statique en boucle ouverte relativement faible. Il va sans doute être difficile de concilier les problèmes de stabilité avec des contraintes de précision, tout du moins, tant que nous n'aurons pas étudié le chapitre 8 qui nous montrera comment corriger les systèmes pour qu'ils satisfassent à un ensemble de spécificités qui, pour le moment, peuvent nous paraître contradictoires.

### c) Erreur de position d'un système comportant un ou plusieurs pôles nuls

Notre système possède toujours une fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  placée dans une boucle à retour unitaire, mais cette fois-ci, avec :

$$G(p) = \frac{K}{p^\alpha (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n)}$$

Le paramètre  $\alpha$  est un entier positif non nul.

La fonction de transfert en boucle fermée est donc égale à :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{K + p^\alpha (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n)}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= \lim_{p \rightarrow 0} [1 - H(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ 1 - \frac{K}{K + p^\alpha (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n)} \right] \\ \varepsilon_p &= 1 - \frac{K}{K} = 0 \end{aligned}$$

L'erreur de position en boucle fermée d'un système dont la fonction de transfert en boucle ouverte comporte au moins un pôle nul, est nulle.

Cela revient à dire que de tels systèmes sont caractérisés par une précision statique parfaite. De tels systèmes sont également appelés : « systèmes comportant au moins un intégrateur dans la fonction de transfert en boucle ouverte ».

## 7.2.2 Erreur de vitesse ou erreur de traînage

### a) Définition

Soit un système bouclé de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  et de fonction de transfert en boucle fermée  $H(p)$ .

On appelle erreur de vitesse (ou erreur de traînage) du système en boucle fermée, le paramètre  $\varepsilon_v$  défini par :

$$\varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) \text{ lorsque } e(t) = t, \text{ rampe unitaire}$$

En invoquant le théorème de la valeur finale, on a :

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p[E(p) - S(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} p[E(p) - H(p)E(p)]$$

Puisque l'entrée est une rampe unitaire :

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p[E(p) - H(p)E(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} p \left[ \frac{1}{p^2} - \frac{H(p)}{p^2} \right]$$

Soit :

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1 - H(p)}{p}$$

L'erreur de vitesse est le second paramètre qui permet d'évaluer la précision d'un système en boucle fermée. Il se différencie de l'erreur de position par le fait qu'il permet de chiffrer l'aptitude d'un système à fournir une réponse qui suit le plus précisément possible une consigne qui varie dans le temps (cas général des asservissements), tandis que l'erreur de position évalue son aptitude à se conformer à une consigne constante (cas particulier de la régulation). Plus  $\varepsilon_v$  est faible, meilleure est la précision du système dans le cas d'une consigne variable.

**Remarque :** Un système peut très bien posséder une très bonne précision statique (erreur de position faible voire nulle), donc être tout à fait apte à être régulé de manière précise, mais avoir une erreur de vitesse importante, autrement dit être tout à fait inapte à répondre correctement à une consigne variable dans le temps.

### b) Erreur de vitesse d'un système de gain statique $K$ en boucle ouverte

Formulons l'hypothèse qu'un système possède une fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  placée dans une boucle à retour unitaire, avec :

$$G(p) = \frac{K}{1 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_n p^n}$$

La fonction de transfert en boucle fermée est égale à :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{1 + K + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_n p^n}$$

Par conséquent :

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1 - H(p)}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \left[ 1 - \frac{K}{1 + K + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_n p^n} \right]$$

$$\varepsilon_v \rightarrow +\infty$$

L'erreur de vitesse en boucle fermée d'un système possédant un gain statique  $K$  en boucle ouverte est infinie.



Nous en déduisons qu'il n'est pas possible d'astreindre un système possédant un gain statique  $K$  en boucle ouverte, à une bonne précision en boucle fermée dans le cas d'une consigne variant dans le temps.

### c) Erreur de vitesse d'un système comportant un ou plusieurs pôles nuls

Notre système possède toujours une fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  placée dans une boucle à retour unitaire, mais cette fois-ci, avec :

$$G(p) = \frac{K}{p^\alpha (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n)}$$

Le paramètre  $\alpha$  est un entier positif non nul.

La fonction de transfert en boucle fermée est égale à :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{K + p^\alpha (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n)}$$

Par conséquent :

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1 - H(p)}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \left[ 1 - \frac{K}{K + p^\alpha (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n)} \right]$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \left[ 1 - \frac{K}{K + p^\alpha} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \left[ \frac{p^\alpha}{K + p^\alpha} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ \frac{p^{\alpha-1}}{K + p^\alpha} \right]$$

Si  $\alpha = 1$ , on a :

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{K + p} \right] = \frac{1}{K}$$

Si  $\alpha > 1$ , on a :

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ \frac{p}{K + p^\alpha} \right] = 0$$

Cela revient à dire que pour qu'un système possède en boucle fermée une erreur de vitesse nulle, donc une parfaite précision lorsqu'il est soumis à une consigne variable, il faut que sa fonction de transfert en boucle ouverte possède au moins un pôle nul double, autrement dit un terme en  $p^2$  au dénominateur de  $G(p)$ . On peut aussi dire que la fonction de transfert en boucle ouverte possède deux intégrateurs.

Dans le cas où  $G(p)$  ne possède qu'un seul pôle nul, l'erreur de vitesse est non nulle.

## 7.3 RAPIDITÉ DES SYSTÈMES RÉGULÉS

### 7.3.1 Définitions

#### a) Temps de réponse

Bien qu'en théorie, les systèmes linéaires soient caractérisés par des régimes transitoires de durées infinies, il est possible d'estimer leur durée « pratique » grâce à la notion de temps de réponse, défini comme le temps mis pour atteindre la valeur finale de la sortie à un certain pourcentage près.

Considérons le système bouclé représenté sur la figure 7.3.

Soumis à une consigne en échelon, le système, supposé stable, répond par un signal qui tend vers une valeur finie que nous noterons  $s_\infty$ . On définit alors le temps de réponse à  $x$  % près par :

$$\forall t > t_{rx\%}, \quad (1 - x/100)s_\infty < s(t) < (1 + x/100)s_\infty$$

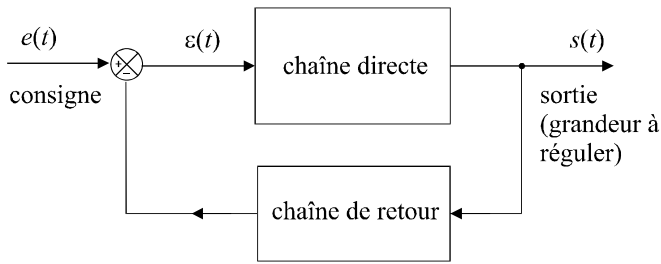


Figure 7.3 Schéma général d'une boucle de régulation.

On choisit très souvent d'utiliser la notion de temps de réponse à 5 % près, ce qui revient à dire que le temps de réponse est l'instant à partir duquel la sortie a atteint sa valeur finale à  $\pm 5\%$  près (figure 7.4).

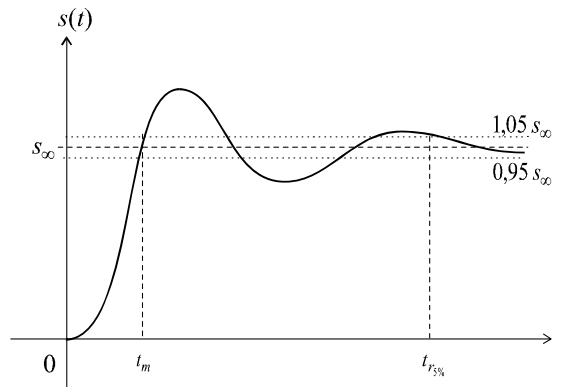


Figure 7.4 Paramètres de rapidité en boucle fermée.

### b) Temps de montée

On préfère souvent, à la notion de temps de réponse, celle de *temps de montée* défini comme le temps  $t_m$  au bout duquel le signal de sortie franchit pour la première fois son asymptote, dans le cas, bien évidemment, où ce phénomène se produit. En théorie, c'est le cas pour des systèmes d'ordre supérieur ou égal à deux, sous certaines conditions. Toutefois, la complexité des systèmes étudiés dans la pratique est telle que les ordres des systèmes sont souvent élevés et que le phénomène de dépassement se produit très fréquemment. Par conséquent, rares sont les systèmes pour lesquels ce temps de montée ne peut pas être défini.

La raison pour laquelle ce paramètre est très souvent retenu est la suivante : si l'objectif est d'atteindre rapidement la valeur finale du signal de sortie, l'instant  $t_m$  correspond, de toute évidence à l'instant pour lequel cet objectif est atteint. Bien sûr le signal  $s(t)$  va continuer à croître ; mais si l'on maîtrise le phénomène de dépassement, l'évolution de  $s(t)$ , après l'instant  $t_m$ , va se traduire par quelques oscillations tendant rapidement vers  $s_\infty$ . Le temps de montée est donc un bon paramètre pour chiffrer la rapidité d'un système en boucle fermée.

**Remarque :** Dorénavant, nous nous intéresserons à des systèmes pour lesquels un temps de montée peut être défini et nous choisirons ce temps de montée comme paramètre significatif de la rapidité de ce système.

### 7.3.2 Temps de montée d'un système du second ordre

Considérons un système du second ordre de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  placé dans une boucle de régulation à retour unitaire, avec :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$

Calculons la fonction de transfert en boucle fermée de ce système :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1 + K}$$

soit :

$$H(p) = \frac{\frac{K}{K+1}}{\frac{p^2}{(1+K)\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{(1+K)\omega_n} + 1}$$

Cette fonction de transfert en boucle fermée possède une forme similaire à la celle de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Il est donc possible d'utiliser les résultats de l'étude menée au chapitre 4 à propos de l'étude indicielle des systèmes du second ordre, à condition de poser :

$$K_{\text{BF}} = \frac{K}{K+1}, \text{ défini comme le gain statique en boucle fermée ;}$$

$$\omega_{n\text{BF}} = \omega_n \sqrt{K+1}, \text{ définie comme la pulsation propre en boucle fermée ;}$$

$$\xi_{\text{BF}} = \frac{\xi}{\sqrt{K+1}}, \text{ facteur d'amortissement en boucle fermée.}$$

On a alors :

$$H(p) = \frac{K_{\text{BF}}}{\frac{p^2}{\omega_{n\text{BF}}^2} + \frac{2\xi_{\text{BF}} p}{\omega_{n\text{BF}}} + 1}$$

Plaçons un échelon à l'entrée du système en boucle fermée.

On a alors :

$$S(p) = \frac{1}{p} \frac{K_{\text{BF}}}{\frac{p^2}{\omega_{n\text{BF}}^2} + \frac{2\xi_{\text{BF}} p}{\omega_{n\text{BF}}} + 1}$$

Si l'on doit définir un temps de montée, il faut bien sûr que le phénomène de dépassement se produise, donc que  $\xi_{\text{BF}} < 1$ . Nous pouvons alors appliquer le résultat obtenu au chapitre 4 :

$$s(t) = K_{\text{BF}} - \frac{K_{\text{BF}}}{\sqrt{1 - \xi_{\text{BF}}^2}} e^{-\omega_{n\text{BF}} t} \left[ \sin \left( \omega_{n\text{BF}} \sqrt{1 - \xi_{\text{BF}}^2} t + \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi_{\text{BF}}^2}}{\xi_{\text{BF}}} \right) \right]$$

On peut alors calculer le temps de montée en résolvant l'équation :

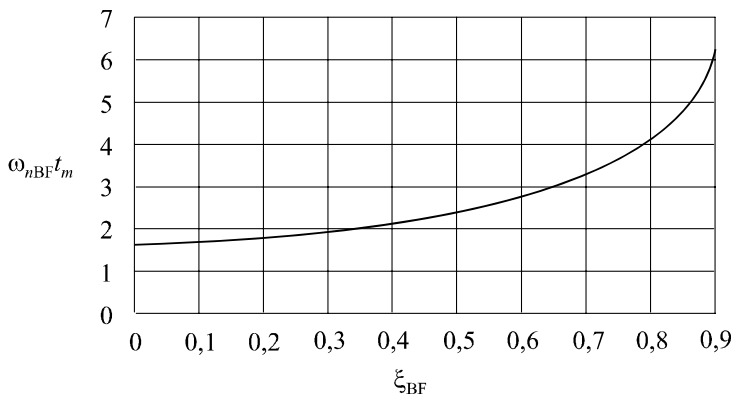
$$s(t_m) = K_{\text{BF}}$$

La plus petite valeur obtenue nous donne l'expression du temps de montée.

Elle correspond à :

$$\omega_{nBF}t_m = \frac{\pi - \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi_{BF}^2}}{\xi_{BF}}}{\sqrt{1 - \xi_{BF}^2}}$$

Cette expression peut, de prime abord, paraître ésotérique, mais l'étude de la fonction  $\omega_{nBF}t_m = f(\xi_{BF})$  pour  $\xi_{BF}$  variant de 0 à 1 peut nous être très utile pour mettre en évidence ce qui est sans doute l'un des résultats les plus intéressants de l'automatique des systèmes linéaires. Cette étude nous conduit au graphe de la figure 7.5.



**Figure 7.5** Temps de montée en fonction du facteur d'amortissement.

L'analyse de cette fonction nous montre que pour les valeurs courantes du facteur d'amortissement (entre 0,2 et 0,8), on a :

$$2 < \omega_{nBF}t_m < 4$$

Nous retiendrons de cet encadrement, une valeur approchée de  $\omega_{nBF}t_m$  :

$$\omega_{nBF}t_m = 3$$

Pour percevoir l'intérêt de cette équation, notons que  $\omega_{nBF}$ , définie comme la pulsation propre en boucle fermée, est égale à :

$$\omega_{nBF} = \omega_n \sqrt{K + 1}$$

où  $\omega_n$  représente la pulsation propre du système en boucle ouverte. Or, si l'on considère à nouveau la fonction de transfert en boucle ouverte, nous avons :

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{2j\xi\omega}{\omega_n}} \Rightarrow G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

Calculons la valeur de ce gain réel en boucle ouverte pour la pulsation  $\omega = \omega_n \sqrt{K + 1}$  :

$$G(\omega_n \sqrt{K + 1}) = \frac{K}{\sqrt{(1 - K + 1)^2 + 4\xi^2(K + 1)}}$$

Si  $K \gg 1$ , ce qui est le cas le plus fréquemment rencontré, on a :

$$G(\omega_n \sqrt{K+1}) \approx 1$$

Autrement dit, la pulsation propre du système en boucle fermée est très proche de la valeur de la pulsation de coupure à 0 dB :

$$\omega_{nBF} = \omega_n \sqrt{K+1} \approx \omega_{c0}$$

Par conséquent :

$$t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}}$$

Il s'agit là d'un résultat fort intéressant : rappelons que  $t_m$  est le temps de montée en boucle fermée et que  $\omega_{c0}$  est la pulsation de coupure à 0 dB du système en boucle ouverte.

Ce résultat nous montre qu'il est possible d'estimer la valeur du temps de montée en boucle fermée à partir d'une des caractéristiques fréquentielles du système en boucle ouverte.

**Remarque :** Nous parlons d'estimation et non pas de calcul du temps de montée, cette expression n'étant vraie que pour  $K$  grand devant 1 d'une part, et pour des valeurs de  $\xi_{BF}$  voisines de 0,65 (voir figure 7.5) puisque c'est en  $\xi_{BF} = 0,65$  que la fonction  $\omega_{nBF} t_m = f(\xi_{BF})$  est égale à 3. Toutefois, nous retiendrons que cette équation permet d'obtenir l'ordre de grandeur du temps de montée en boucle fermée et que cet ordre de grandeur est souvent suffisant pour évaluer la rapidité du système.

### 7.3.3 Généralisation

Pour tout système linéaire d'ordre quelconque présentant un fonctionnement analogue à un deuxième ordre, nous conserverons cette estimation de l'ordre de grandeur du temps de montée en boucle fermée :

$$t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}}$$

**Remarque :** Pour que cette estimation soit utilisable, il faut bien évidemment que la notion de temps de montée puisse être définie, donc que la réponse indicielle du système présente effectivement un dépassement.

Bien retenir, par ailleurs, que  $\omega_{nBF} \approx \omega_{c0}$

## 7.4 LIMITATION DU DÉPASSEMENT

### 7.4.1 Dépassement pour un système du second ordre

Pour un système du second ordre de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  telle que :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$

la valeur du dépassement en boucle fermée exprimé en pourcentage de la valeur finale de la réponse indicielle, dans le cas, bien sûr, où  $\xi_{BF} < 1$ , a pour expression :

$$d_{\%} = 100 \times e^{-\frac{\pi \xi_{BF}}{\sqrt{1-\xi_{BF}^2}}}$$

Ce résultat a été démontré au chapitre 4, dans l'exercice 4.4 et nous savons déjà que ce dépassement est d'autant plus important que  $\xi$  est faible.

### 7.4.2 Relation entre la marge de phase et le dépassement en boucle fermée pour un système du second ordre

L'objectif consiste ici, à l'instar de la relation mise en évidence au paragraphe 7.3.2 entre le temps de montée en boucle fermée et la pulsation de coupure à 0 dB du système en boucle ouverte, à établir une relation entre le dépassement en boucle fermée et la marge de phase qui, rappelons-le, est un paramètre significatif de la stabilité en boucle fermée mais que l'on obtient à partir de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Si :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1},$$

alors :

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{2j\xi\omega}{\omega_n}}$$

La marge de phase étant définie par :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0})$$

et sachant que :

$$\omega_{c0} \approx \omega_n \sqrt{K+1}$$

on a :

$$\Delta\varphi = \pi + \arg G(j\omega_{c0}) = \pi + \arg \frac{K}{-K + 2j\xi\sqrt{K+1}}$$

soit :

$$\Delta\varphi = \arctan \frac{2\xi\sqrt{K+1}}{K}$$

Si  $K$  est grand devant 1, on peut proposer une approximation de cette marge de phase en effectuant un développement limité à l'ordre 1 de la fonction arctangente :

$$\Delta\varphi \approx \frac{2\xi}{\sqrt{K}}$$

Rappelons que cette marge de phase est naturellement exprimée en radians, mais qu'on peut la convertir en degrés :

$$\Delta\varphi^\circ \approx \frac{2\xi}{\sqrt{K}} \times \frac{180}{\pi} \approx 115 \times \frac{\xi}{\sqrt{K}}$$

Or :

$$\xi_{\text{BF}} = \frac{\xi}{\sqrt{K+1}}$$

Si  $K \gg 1$ ,

$$\xi_{\text{BF}} \approx \frac{\xi}{\sqrt{K}}$$

Nous retiendrons de ces deux résultats, que le facteur d'amortissement en boucle fermée est du même ordre de grandeur que la marge de phase exprimée en degrés et divisée par 100 :

$$\xi_{\text{BF}} \approx \frac{\Delta\varphi^\circ}{100}$$

**Remarque :** L'approximation peut paraître grossière, mais il ne s'agit que d'un ordre de grandeur.

Comme le dépassement en boucle fermée ne dépend que du facteur d'amortissement  $\xi_{BF}$ , nous venons de montrer qu'il est possible de prédire ce dépassement en boucle fermée à partir de la valeur de la marge de phase, autrement dit, à partir de la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$\Delta\varphi^\circ \rightarrow \xi_{BF} \approx \frac{\Delta\varphi^\circ}{100} \rightarrow d\% = \exp\left(-\pi \frac{\xi_{BF}}{\sqrt{1-\xi_{BF}^2}}\right)$$

On peut également se référer à l'abaque des réponses indicielles en temps réduit d'un système du second ordre fourni en annexe et y lire directement, à partir de la courbe correspondant au facteur d'amortissement constaté, la valeur de son dépassement.

### 7.4.3 Généralisation

Pour tout système linéaire d'ordre quelconque présentant un fonctionnement analogue à un deuxième ordre, nous conserverons cette estimation qui permet de prédire la valeur du dépassement en boucle fermée :

$$\xi_{BF} \approx \frac{\Delta\varphi^\circ}{100}$$

## 7.5 INFLUENCE DU GAIN STATIQUE EN BOUCLE OUVERTE SUR LES PERFORMANCES EN BOUCLE FERMÉE

Considérons un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  caractérisé par un gain statique variable  $K$ .

Soit :

$$G(p) = \frac{K}{a_n p^n + \dots + a_1 p + 1}$$

Nous savons déjà que l'augmentation de  $K$  réduit la marge de phase, donc diminue la stabilité du système.

Comme :

$$\xi_{BF} \approx \frac{\Delta\varphi^\circ}{100}$$

cette augmentation du gain statique aura également pour conséquence la diminution du facteur d'amortissement en boucle fermée, donc l'augmentation du dépassement.

À l'inverse, en diminuant le gain statique, on augmente la stabilité et on limite le dépassement en boucle fermée. Ces deux performances sont donc liées et évoluent positivement dans le même sens lorsque l'on réduit le gain.

Malheureusement, agir sur le gain statique en boucle ouverte influence aussi la rapidité et la précision du système en boucle fermée. En effet, nous savons déjà qu'une bonne précision est liée à un gain statique important. Réduire le gain statique en boucle ouverte contribue donc à rendre le système moins précis en boucle fermée.

Quant à l'influence du gain statique sur la rapidité, il est possible de la mettre en évidence en simulant l'évolution du diagramme de Bode du système consécutive à une diminution du gain statique.

En diminuant  $K$ , le diagramme de Bode de gain du système se décale vers le bas (figure 7.5) tandis que la courbe de phase ne change pas. De ce décalage résulte une diminution de la pulsation de coupure à 0 dB,  $\omega_{c0}$ .

Si  $\omega_{c0}$  diminue, alors le temps de montée augmente, compte tenu que :

$$t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}}$$

Le système devient donc plus lent.

**Remarque :** Le décalage du diagramme de Bode de gain vers le bas permet aussi de mettre en évidence l'augmentation de la marge de phase.

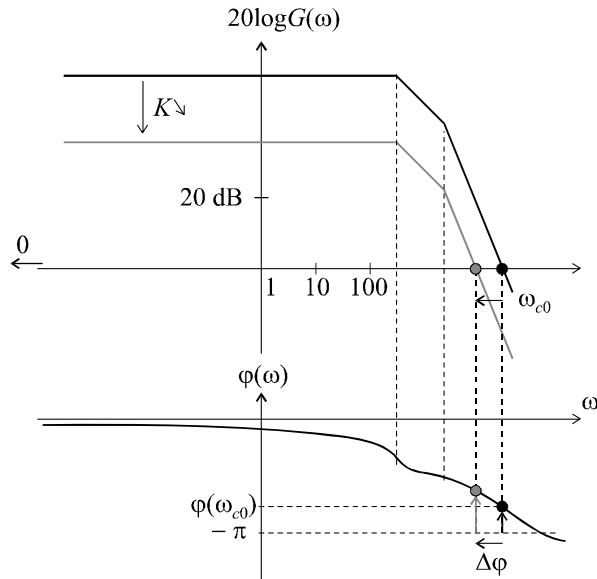


Figure 7.6 Influence d'une diminution du gain statique sur les performances.

En conclusion, la marge de stabilité et la limitation du dépassement, en boucle fermée, sont améliorées par une diminution du gain statique en boucle ouverte, tandis que la rapidité et la précision s'en trouvent dégradées. Inversement, une augmentation du gain statique en boucle ouverte améliore la rapidité et la précision en boucle fermée, mais rend le système moins stable et augmente le dépassement.

## 7.6 ÉTUDE DE CAS

### 7.6.1 Énoncé du problème. Cahier des charges

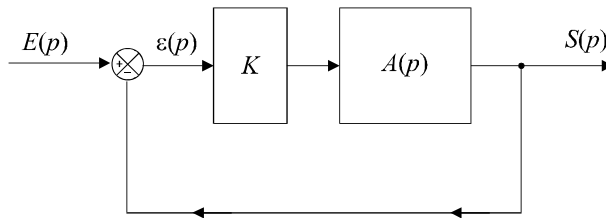
Considérons un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $A(p)$  :

$$A(p) = \frac{10}{p(p+1)^2}$$

Ce système est placé, avec un amplificateur de gain  $K$  dans une boucle à retour unitaire (figure 7.7).

On souhaite régler  $K$  de sorte que l'on puisse disposer, en boucle fermée d'une marge de phase supérieure à  $45^\circ$ , d'un dépassement inférieur à 10 % et prédire, dans ces conditions l'ordre de grandeur du temps de montée.





**Figure 7.7** Schéma de la boucle de régulation.

**Remarque :** Ce cahier des charges n'impose aucune contrainte de précision pour la bonne et simple raison que l'erreur statique est nulle, quoi qu'il arrive, étant donné que la fonction de transfert en boucle ouverte possède un pôle nul.

### 7.6.2 Étude de la stabilité

Étudions les conditions de stabilité à l'aide du critère de Routh :

$$G(p) = \frac{10K}{p(p+1)^2} \Rightarrow H(p) = \frac{10K}{p(p+1)^2 + 10K} = \frac{10K}{p^3 + 2p^2 + p + 10K}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$D(p) = p^3 + 2p^2 + p + 10K$$

Appliquons le critère de Routh en construisant le tableau suivant :

1	1
2	10K
$\frac{2 - 10K}{2}$	0
10K	0

**Remarque :** Une cinquième ligne ne serait composée que de 0.

Pour que le système soit stable, il faut qu'il n'y ait aucun changement de signe dans la première colonne.

Le système est donc stable si  $K < \frac{1}{5}$ .

### 7.6.3 Réglage du gain

Le cahier des charges nous impose à la fois :

$$\Delta\varphi > 45^\circ$$

et :

$$d < 10\%$$

Or un dépassement de 10 % correspond à un facteur d'amortissement en boucle fermée de l'ordre de 0,6 (voir abaque des réponses indicielles d'un système du second ordre).

$$\xi_{BF} = 0,6 \Rightarrow \Delta\varphi^\circ \approx 100\xi_{BF} \approx 60^\circ$$

**Remarque :** Nous n'avons pas affaire à un système du second ordre mais n'oublions pas que nous avons généralisé ce résultat à tout système dont le comportement peut être assimilé à celui d'un second ordre.

La condition imposée sur le dépassement est encore plus contraignante que la clause concernant la marge de stabilité. Nous retiendrons donc qu'il nous faut régler le gain statique  $K$  de manière à obtenir une marge de phase de  $60^\circ$ .

La marge de phase étant définie par :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0})$$

avec :

$$\varphi(\omega) = \arg \frac{10K}{j\omega(j\omega + 1)^2} = 0 - \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \omega$$

On a :

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \omega_{c0}$$

soit :

$$2 \arctan \omega_{c0} = \frac{\pi}{6}$$

d'où :

$$\omega_{c0} = \tan \frac{\pi}{12} \approx 0,27 \text{ rad/s}$$

La pulsation de coupure à 0 dB étant définie par  $G(\omega_{c0}) = 1$ , on a :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{10K}{\omega_{c0}(\omega_{c0}^2 + 1)} = 1$$

d'où :

$$K = \frac{1}{10} \omega_{c0} (\omega_{c0}^2 + 1) \approx 0,03$$

### 7.6.4 Prédiction du temps de montée en boucle fermée

Appliquons l'équation prédictive mise en évidence pour un système du second ordre et généralisée :

$$t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}}$$

soit :

$$t_m \approx \frac{3}{0,03} \approx 100 \text{ s}$$

### 7.6.5 Conclusion

Dans ce cas, relativement simple, seules la marge de stabilité et la limitation du dépassement nous étaient imposées. Compte tenu de l'absence de conditions de rapidité et de précision, il était prévisible qu'en choisissant un gain suffisamment faible, on pourrait sans aucun problème satisfaire aux deux contraintes du cahier des charges.

Les choses se compliqueront lorsque le cahier des charges imposera un ensemble complet de performances. Il ne sera pas toujours possible, en réglant simplement le gain, d'asservir un système de manière optimale.

En effet, si dans notre étude de cas, nous avons imposé un temps de montée inférieur à 50 s, nous n'aurions pu trouver aucune valeur de  $K$  qui convienne ; pour augmenter la rapidité, il faudrait augmenter  $K$ , donc diminuer la marge de phase, ce qui nous conduirait à un dépassement supérieur à 10 %.

Le prochain chapitre présente comment on peut parvenir à concilier toutes les exigences d'un cahier des charges, en ajoutant, dans la boucle de régulation, des correcteurs dont le rôle consistera à améliorer telle ou telle performance sans dégrader les autres.

## EXERCICES

---

### 7.1 Évaluation de la précision d'un système

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{100}{(1 + 10p)(10 + p)}$$

Calculer, en boucle fermée, l'erreur de position et l'erreur de vitesse de ce système placé dans une boucle à retour unitaire.

---

### 7.2 Précision d'un système à un pôle nul

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{10}{p(p + 1)^2}$$

Calculer, en boucle fermée, l'erreur de position et l'erreur de vitesse de ce système placé dans une boucle à retour unitaire.

---

### 7.3 Réglage de la précision d'un système du deuxième ordre

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{K}{(p + 3)^2} \text{ avec } K > 0$$

On place ce système dans une boucle à retour unitaire. Déterminer la valeur de  $K$  qui assure au système en boucle fermée une erreur de position égale à 5 %.

---

### 7.4 Évaluation des performances globales d'un système du deuxième ordre

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{100}{(p + 1)(p + 10)}$$

Calculer l'erreur statique du système placé dans une boucle à retour unitaire.

Déterminer la valeur de la marge de phase et en déduire la valeur du dépassement en boucle fermée.

Calculer la valeur du temps de montée en boucle fermée.

---

### 7.5 Réglage de la rapidité d'un système du second ordre

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{K}{p(p + 10)} \text{ avec } K > 0$$

Déterminer la valeur de  $K$  qui assure au système, placé dans une boucle à retour unitaire, un temps de montée égal à 0,1 s.

Que vaut la marge de phase, dans ces conditions ?  
 Quelle est alors la valeur du dépassement en boucle fermée ?

### 7.6 Limitation du dépassement d'un système du troisième ordre

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{K}{p(p+5)^2} \text{ avec } K > 0$$

Déterminer la valeur de  $K$  qui assure à ce système, placé dans une boucle à retour unitaire, une marge de phase supérieure à  $45^\circ$  et un dépassement en boucle fermée inférieur à 10 %.  
 Quelle est alors la valeur du temps de montée ?

### 7.7 Optimisation des performances d'un système du troisième ordre

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{K}{(10p+1)^3} \text{ avec } K > 0$$

Déterminer la condition sur  $K$  de manière à obtenir une marge de phase supérieure ou égale à  $45^\circ$ . En déduire le temps de montée minimal que l'on pourra obtenir en plaçant ce système dans une boucle à retour unitaire, ainsi que l'erreur statique minimale.

### 7.8 Réglage de la rapidité d'un système du troisième ordre

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{K}{p(p+10)^2} \text{ avec } K > 0$$

On place ce système dans une boucle à retour unitaire.  
 Calculer l'erreur de position du système en boucle fermée.  
 Déterminer la valeur de  $K$  qui permet d'obtenir un temps de montée  $t_m = 0,2$  s.  
 Déterminer la valeur de la marge de phase pour cette valeur de  $K$ . Conclure.

## SOLUTIONS

7.1 La fonction de transfert en boucle fermée a pour expression :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{100}{(1+10p)(10+p)+100}$$

Par définition, l'erreur statique a pour expression :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} [1 - H(p)] = 1 - \frac{100}{10+100} = 0,091 = 9,1 \%$$

Par ailleurs, l'erreur de vitesse est définie par :

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - H(p)}{p} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{0,091}{p} \rightarrow +\infty$$

**7.2** La fonction de transfert en boucle fermée a pour expression :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{10}{p(p+1)^2 + 10}$$

On vérifie sans peine que l'erreur de position est nulle étant donné la présence, dans la fonction de transfert en boucle ouverte, d'un pôle nul :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} [1 - H(p)] = 1 - \frac{10}{10} = 0$$

Par ailleurs, l'erreur de vitesse a pour expression :

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ \frac{1 - H(p)}{p} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{p} - \frac{10}{p^2(p+1)^2 + 10p} \right]$$

soit :

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ \frac{p^2(p+1)^2 + 10p - 10p}{p^3(p+1)^2 + 10p^2} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ \frac{(p+1)^2}{p(p+1)^2 + 10} \right]$$

d'où :

$$\varepsilon_v = 0,1$$

**7.3** La fonction de transfert en boucle fermée a pour expression :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{(p+3)^2 + K}$$

L'erreur de position a donc pour expression :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} [1 - H(p)] = 1 - \frac{K}{9 + K} = \frac{9}{9 + K}$$

Si on souhaite régler  $K$  pour obtenir une erreur de position de 5 %, on doit avoir :

$$\varepsilon_p = \frac{9}{9 + K} = 0,05 \Rightarrow K = \frac{9}{0,05} - 9 = 171$$

**7.4** La fonction de transfert en boucle fermée a pour expression :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{100}{(p+1)(p+10) + 100}$$

L'erreur de position a donc pour expression :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} [1 - H(p)] = 1 - \frac{100}{110} = 0,091 = 9,1 \%$$

Calculons à présent la marge de phase. Par définition, on a :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi + \arg G(j\omega_{c0})$$

avec :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{100}{\sqrt{\omega_{c0}^2 + 1} \sqrt{\omega_{c0}^2 + 100}} = 1$$

On a donc :

$$(\omega_{c0}^2 + 1) (\omega_{c0}^2 + 100) = 10^4$$

soit :

$$\omega_{c0}^4 + 101\omega_{c0}^2 - 9900 = 0$$

On a :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49801$$

d'où :

$$\omega_{c0}^2 = \frac{-101 \pm \sqrt{49801}}{2}$$

La seule solution possible est :

$$\omega_{c0}^2 = 61 \Rightarrow \omega_{c0} = 7,8 \text{ rad/s}$$

On a donc :

$$\Delta\varphi = \pi + \arg G(j\omega_{c0}) = \pi + \arg \frac{100}{(j\omega_{c0} + 1)(j\omega_{c0} + 10)}$$

soit :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan \omega_{c0} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{10} = 1,04 \text{ rad} = 59^\circ$$

Le dépassement en boucle fermée peut être prédit à partir de cette valeur de la marge de phase.

En effet :

$$\xi_{BF} \approx \frac{\Delta\varphi}{100} \approx 0,6$$

D'après l'abaque des réponses indicielles d'un système du second ordre (voir annexe), un tel facteur d'amortissement correspond à un dépassement d'environ 10 %.

Quant à la valeur de temps de montée, elle peut être prédite en utilisant la relation approchée :

$$\omega_{c0} t_m \approx 3 \Rightarrow t_m \approx \frac{3}{12,7} = 0,38 \text{ s}$$

**7.5** Utilisons la relation approchée suivante :

$$\omega_{c0} \approx \frac{3}{t_m} = 30 \text{ rad/s}$$

Il s'agit donc de régler le gain  $K$  pour obtenir cette pulsation de coupure à 0 dB.

On doit donc avoir :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\omega_{c0} \sqrt{\omega_{c0}^2 + 100}} = 1$$

d'où :

$$K = \omega_{c0} \sqrt{\omega_{c0}^2 + 100} = 949$$

La pulsation  $\omega_{c0}$  étant réglée sur la valeur voulue, la marge de phase est donc fixée :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi + \arg G(j\omega_{c0})$$

soit :

$$\Delta\varphi = \pi + \arg \frac{K}{j\omega_{c0} (j\omega_{c0} + 10)} = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{10}$$

d'où :

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{30}{10} = 0,32 \text{ rad} = 18^\circ$$

En utilisant la relation approchée désormais bien connue, on en déduit :

$$\xi_{BF} \approx \frac{\Delta\varphi}{100} \approx 0,18$$

D'après l'abaque des réponses indicielles d'un système du second ordre (voir annexe), un tel facteur d'amortissement correspond à un dépassement d'environ 55 %.

**7.6** Pour avoir un dépassement inférieur à 10 %, il faut que le système présente, en boucle fermée, un facteur d'amortissement supérieur à 0,6. Cela correspond à une marge de phase de  $60^\circ$ . La condition sur le dépassement s'avérant plus contraignante que celle imposée sur la marge de phase, on doit donc avoir :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi + \arg G(j\omega_{c0}) = \frac{\pi}{3}$$

soit :

$$\Delta\varphi = \pi + \arg \frac{K}{j\omega_{c0}(j\omega_{c0} + 5)^2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{\omega_{c0}}{5} = \frac{\pi}{3}$$

d'où :

$$\omega_{c0} = 5 \tan \frac{\pi}{12} = 1,34 \text{ rad/s}$$

On a donc :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\omega_{c0}(\omega_{c0}^2 + 25)} = 1$$

d'où :

$$K = \omega_{c0}(\omega_{c0}^2 + 25) = 36$$

Le temps de montée en boucle fermée peut par ailleurs être prédit à partir de la valeur de la pulsation de coupure à 0 dB de la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}} = 2,24 \text{ s}$$

**7.7** Pour obtenir une marge de phase supérieure à  $45^\circ$ , il faut avoir :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi + \arg G(j\omega_{c0}) > \frac{\pi}{4}$$

soit :

$$\Delta\varphi = \pi + \arg \frac{K}{(10j\omega_{c0} + 1)^3} > \frac{\pi}{4}$$

$$\Delta\varphi = \pi - 3 \arctan 10\omega_{c0} > \frac{\pi}{4}$$

d'où :

$$\omega_{c0} < \frac{1}{10} \tan \frac{3\pi}{12} = 0,1 \text{ rad/s}$$

Calculons la valeur de  $K$  correspondant à cette pulsation de coupure à 0 dB.

On a :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\left(\sqrt{1 + 100\omega_{c0}^2}\right)^3} = 1$$

d'où :

$$K = \left(\sqrt{1 + 100\omega_{c0}^2}\right)^3 = 2,8$$

La condition sur  $\omega_{c0}$  nous imposant une limite supérieure, il en est de même pour la condition sur  $K$ .

En conclusion :

$$\Delta\varphi > 45^\circ \Rightarrow K < 2,8$$

Par ailleurs, comme :

$$t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}}$$

on a :

$$t_m > \frac{3}{0,1} = 30 \text{ s}$$

Le temps de montée minimal (autrement dit la meilleure rapidité possible) est donc égal à 30 s.

Calculons à présent l'erreur statique. La fonction de transfert en boucle fermée a pour expression :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{(10p + 1)^3 + K}$$

Par définition, l'erreur statique a pour expression :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} [1 - H(p)] = 1 - \frac{K}{1 + K} = \frac{1}{1 + K}$$

On a donc :

$$K < 2,8 \Rightarrow \varepsilon_p > \frac{1}{1 + 2,8} = 0,26$$

L'erreur statique est donc obligatoirement supérieure à 26 % si on souhaite avoir une marge de phase supérieure à 45 °.

**7.8** L'erreur de position est nulle étant donné que la fonction de transfert en boucle ouverte possède un pôle nul.

Pour obtenir un temps de montée  $t_m = 0,2$  s en boucle fermée, on doit avoir :

$$\omega_{c0} \approx \frac{3}{t_m} = 15 \text{ rad/s}$$

soit :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\omega_{c0} (\omega_{c0}^2 + 100)} = 1$$

d'où :

$$K = \omega_{c0} (\omega_{c0}^2 + 100) = 4875$$

Dans ces conditions, la marge de phase vaut :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi + \arg \frac{K}{j\omega_{c0} (j\omega_{c0} + 10)^2}$$

soit :

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{\omega_{c0}}{10} = -0,39 \text{ rad} = -22^\circ$$

La marge de phase étant négative, le système est instable. Par conséquent, il est impossible de régler le gain  $K$  de manière à obtenir la rapidité voulue.



## Chapitre 8

# Correction des systèmes linéaires asservis

### 8.1 CAHIER DES CHARGES D'UN ASSERVISSEMENT

En règle générale, le cahier des charges d'une boucle de régulation impose, en boucle fermée, quatre performances :

- la précision, matérialisée, par exemple, par une valeur maximale de l'erreur de position :  $\varepsilon_p < seuil$  ; une erreur de traînage maximale peut aussi être requise ;
- la rapidité, matérialisée, en général, par une valeur maximale du temps de montée :  $t_m < seuil$  ;
- la marge de stabilité, matérialisée par une valeur minimale de la marge de phase :  $\Delta\varphi < seuil$  ;
- la limitation du dépassement :  $d \% < seuil$ , ce qui se traduit par une valeur minimale du coefficient d'amortissement en boucle fermée, donc, étant donné que  $\xi_{BF} \approx \frac{\Delta\varphi^\circ}{100}$ , par une valeur minimale de la marge de phase. Entre cette valeur et celle dictée précédemment, on prend bien sûr la plus élevée.

Considérons un système constitué d'une chaîne directe et d'une chaîne de retour. La plupart du temps, on ne choisit ni les lois de fonctionnement des systèmes  $A(p)$  et  $B(p)$ , ni, bien sûr, leurs fonctions de transfert qui, en général, sont des données imposées par la conception même du système asservi en cours d'élaboration. Parfois, certains paramètres sont réglables comme le gain statique par exemple, mais souvent, aucun d'entre eux ne l'est.

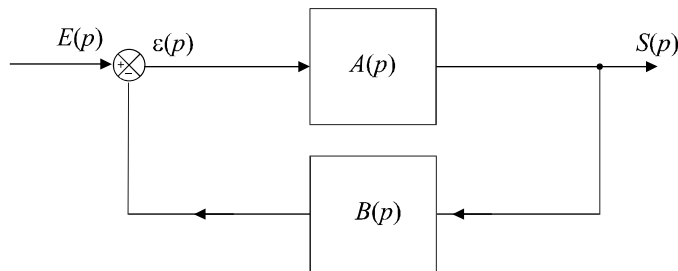


Figure 8.1 Schéma général d'une boucle de régulation.

Si l'on s'en tenait là, nous ne pourrions malheureusement que prédire et constater les performances (ou les contre-performances) de la boucle d'asservissement sans pouvoir agir sur celles-ci. Il y a peu de chance, alors, que le cahier des charges soit respecté.

## 8.2 PRINCIPE GÉNÉRAL DE LA CORRECTION D'UN SYSTÈME

L'idée consiste à introduire dans la chaîne directe, en amont du système  $A(p)$ , un dispositif supplémentaire de fonction de transfert  $C(p)$ , appelé correcteur et dont le rôle essentiel doit consister à modifier les performances du système initial (figure 8.2).

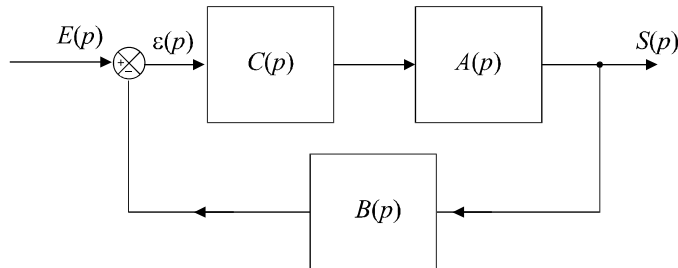


Figure 8.2 Schéma général d'une boucle de régulation corrigée.

Cela revient à dire que nous transformons les fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée de manière à imposer à l'ensemble de fonctionner selon le cahier des charges voulu.

Si  $G_i(p)$  et  $H_i(p)$  sont les fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée du système initial et  $G_c(p)$  et  $H_c(p)$  les fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée du système corrigé, on aura :

$$G_i(p) = A(p)B(p) \quad ; \quad H_i(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

et :

$$G_c(p) = A(p)B(p)C(p) \quad ; \quad H_c(p) = \frac{A(p)C(p)}{1 + A(p)B(p)C(p)}$$

Tout l'art de la correction des systèmes consiste à choisir la bonne fonction de transfert  $C(p)$  pour ce correcteur de manière à régler chaque performance sur sa valeur requise, sans perturber, bien sûr, le fonctionnement du système. Ces correcteurs sont en général constitués de dispositifs électroniques qui peuvent souvent être très simples. Néanmoins, lorsque le cahier des charges est très exigeant, il faut parfois faire appel à des correcteurs plus sophistiqués donc plus coûteux et, il faut l'avouer, qui peuvent s'avérer délicats à régler.

## 8.3 ACTIONS CORRECTIVES ÉLÉMENTAIRES

Il existe trois actions correctives élémentaires qui permettent, individuellement, de corriger telle ou telle performance. Elles sont relativement simples à réaliser mais, en général, dégradent d'autres performances. Elles sont utilisables lorsque le cahier des charges est peu exigeant. Dans le cas contraire, il faut envisager de combiner ces différentes actions au sein d'un correcteur plus complexe.

### 8.3.1 Correcteur proportionnel

Le correcteur est un simple amplificateur de gain réglable  $C(p) = K$  qui a pour mission de modifier le gain statique initial du système. Nous connaissons déjà, pour l'avoir étudiée au chapitre précédent, l'influence du gain statique sur les performances :

Si  $K < 1$ , autrement dit s'il s'agit d'un atténuateur, on améliore la stabilité du système et on diminue son dépassement en boucle fermée. En revanche, la rapidité et la précision sont dégradées.

Si  $K > 1$ , on améliore la rapidité et la précision du système en boucle fermée mais on diminue la stabilité (ce qui peut aller jusqu'à rendre le système instable) et on accroît son dépassement.

**Remarque :** On se référera au diagramme de Bode d'un système en boucle ouverte (figure 7.6 du chapitre précédent) pour visualiser l'influence d'une variation du gain statique sur les performances en boucle fermée.

### 8.3.2 Correcteur intégral

#### a) Définition

Le correcteur est un intégrateur de fonction de transfert :

$$C(p) = \frac{1}{p}$$

qui a pour mission d'ajouter un pôle nul à la fonction de transfert en boucle ouverte. Nous savons déjà qu'un système dont la fonction de transfert en boucle ouverte possède un pôle nul sera caractérisé par une erreur de position nulle.

**Remarque :** On dit parfois, bien que ceci n'ait aucun sens d'un point de vue physique, que le gain statique du système en boucle ouverte tend vers l'infini, ce qui corrobore la nullité de l'erreur de position en boucle fermée qui est inversement proportionnelle au gain statique en boucle ouverte.

Le correcteur à action intégrale est donc censé améliorer la précision du système asservi.

#### b) Influence sur les autres performances

Les modifications apportées à la fonction de transfert modifient sans aucun doute les autres performances du système. Il nous reste à savoir dans quel sens elles évoluent. La simulation, sur un diagramme de Bode, des transformations subies par les courbes de gain et de phase après adjonction de ce correcteur peuvent nous renseigner sur ces modifications.

Considérons un système quelconque de fonction de transfert en boucle ouverte  $G_i(p)$  (figure 8.3). Les graphes représentent respectivement :

$$G_{\text{idB}} = 20 \log G_i(\omega)$$

et :

$$\varphi_i(\omega) = \arg G_i(j\omega)$$

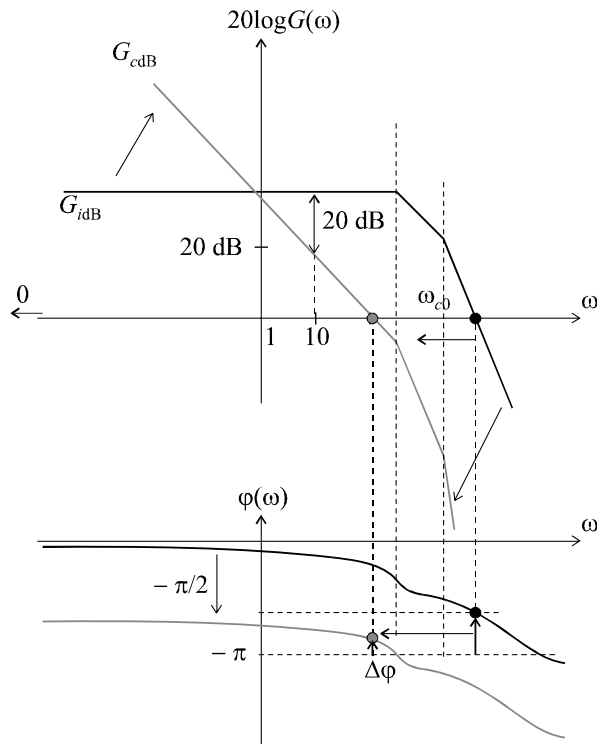
Les graphes correspondant à la fonction de transfert corrigée se déduisent facilement des graphes initiaux (en plus clair sur la figure 8.3) :

$$G_{\text{cdB}} = 20 \log G_c(\omega) = 20 \log \frac{G_i(\omega)}{\omega} = 20 \log G_i(\omega) - 20 \log \omega$$

et :

$$\varphi_c(\omega) = \arg G_c(j\omega) = \arg \frac{G_i(j\omega)}{j\omega} = \varphi_i(\omega) - \frac{\pi}{2}$$

On passe donc de la courbe de gain initiale  $G_{\text{idB}}$  à la courbe corrigée  $G_{\text{cdB}}$  en « retranchant » à chaque segment l'équivalent d'un segment de pente [1], autrement dit en décrémentant chaque pente initiale d'une unité. En remarquant par ailleurs, qu'à la pulsation  $\omega = 10$ , le gain a chuté de 20 dB, il nous est possible de tracer immédiatement le graphe correspondant à  $G_{\text{cdB}}$ . Le diagramme de phase, quant à lui, est translaté de  $\pi/2$  vers le bas.



**Figure 8.3** Influence d'un intégrateur sur les performances.

On remarque que la pulsation de coupure à 0 dB diminue.

Compte tenu que :

$$t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}},$$

on peut en déduire que le temps de montée augmente. L'intégrateur aura donc tendance à ralentir le système en boucle fermée.

De plus, malgré la diminution de  $\omega_{c0}$ , la marge de phase aura tendance à diminuer car la courbe de phase a changé et est susceptible de se retrouver très proche de  $-\pi$ . La stabilité et la limitation du dépassement s'en trouvent dégradées.

En conclusion, seule la précision du système est améliorée par l'introduction d'un correcteur à action intégrale. Toutes les autres performances sont diminuées.

### 8.3.3 Correcteur à action dérivée

Le correcteur est un dérivateur de fonction de transfert :

$$C(p) = p$$

qui a pour mission d'ajouter un zéro nul à la fonction de transfert en boucle ouverte. Intuitivement, nous pouvons imaginer que son action est l'inverse de celle de l'intégrateur. Vérifions cela sur un diagramme de Bode.

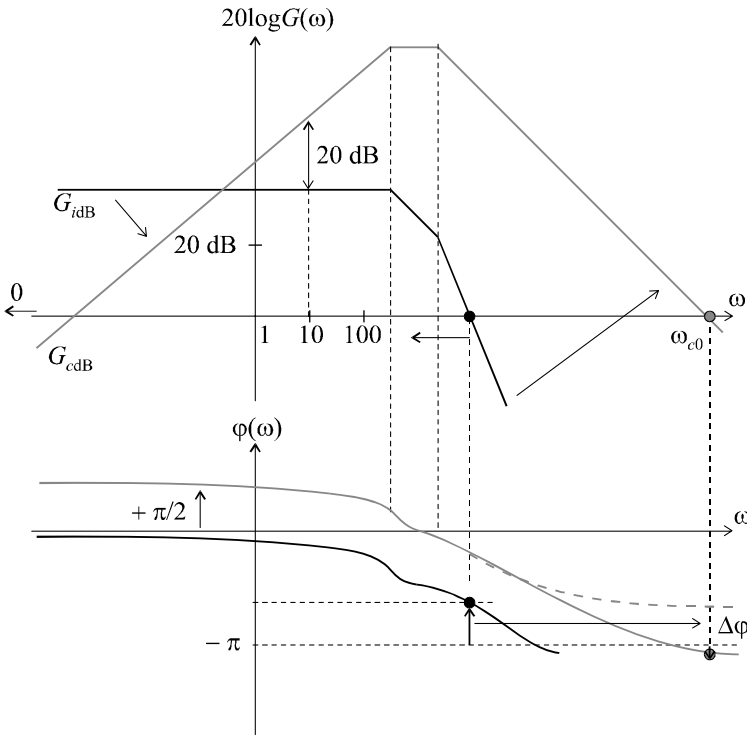


Figure 8.4 Influence d'un dérivateur sur les performances.

Considérons à nouveau un système quelconque de fonction de transfert en boucle ouverte  $G_i(p)$ . Les graphes représentent respectivement :

$$G_{idB} = 20 \log G_i(\omega)$$

et

$$\varphi_i(\omega) = \arg G_i(j\omega)$$

Les graphes correspondant à la fonction de transfert corrigée se déduisent facilement des graphes initiaux :

$$G_{c dB} = 20 \log G_c(\omega) = 20 \log \omega G_i(\omega) = 20 \log G_i(\omega) + 20 \log \omega$$

et

$$\varphi_c(\omega) = \arg G_c(j\omega) = \arg j\omega G_i(j\omega) = \varphi_i(\omega) + \frac{\pi}{2}$$

On passe donc de la courbe de gain initiale  $G_{idB}$  à la courbe corrigée  $G_{c dB}$  en « ajoutant » à chaque segment l'équivalent d'un segment de pente [1], autrement dit en incrémentant chaque pente initiale d'une unité. En remarquant par ailleurs, qu'à la pulsation  $\omega = 10$ , le gain a augmenté de 20 dB, il nous est possible de tracer immédiatement le graphe correspondant à  $G_{c dB}$ . Le diagramme de phase, quant à lui, est translaté de  $\pi/2$  vers le haut.

On remarque que la pulsation de coupure à 0 dB augmente.

Compte tenu que :

$$t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}}$$

on peut en déduire que le temps de montée diminue. Le dérivateur aura donc tendance à accélérer le système en boucle fermée.

L'augmentation de  $\omega_{c0}$  influe également sur la marge de phase mais cette influence dépend de l'ordre du système. En effet, la « remontée de phase de  $+\frac{\pi}{2}$  » peut avoir deux effets différents : si le système possède un ordre élevé, le déphasage peut tendre vers des valeurs négatives très importantes ; la remontée de phase peut alors être sans effet sur l'amélioration de la marge de phase, voire la dégrader et même rendre le système instable (courbe grise en trait plein). Si au contraire l'ordre du système est faible, la remontée de phase peut se traduire par une nouvelle courbe  $\varphi_c(\omega)$  qui tend vers une valeur située largement au dessus de  $-\pi$  (courbe grise pointillée).

Pour finir, la précision du système, liée au gain statique va être dégradée par l'action dérivée puisque le gain aux basses fréquences diminue fortement.

En conclusion, seule la rapidité du système est améliorée par l'introduction d'un correcteur à action dérivée. Toutes les autres performances sont diminuées ou susceptibles de l'être.

## 8.4 INCONVÉNIENT FONDAMENTAL DES ACTIONS CORRECTIVES ÉLÉMENTAIRES

Reprenons le diagramme de Bode étudié précédemment et essayons d'imaginer quel serait l'action d'un correcteur idéal.

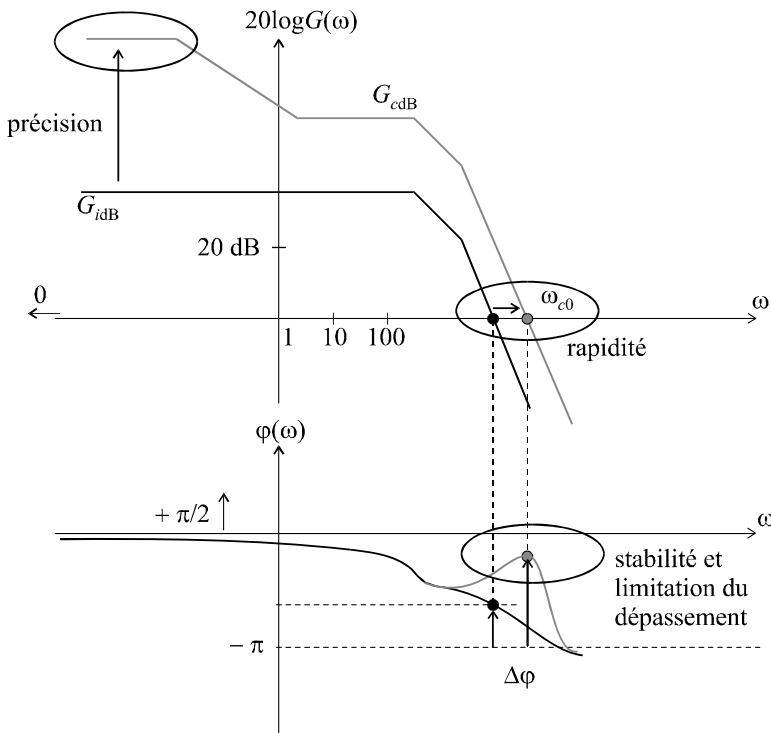


Figure 8.5 Actions correctives idéales.

Pour une meilleure précision, il faudrait pouvoir augmenter le gain statique uniquement au voisinage des basses fréquences. Pour une meilleure rapidité, il nous faudrait choisir une pulsation de coupure à 0 dB un peu plus grande et pour améliorer la marge de phase, l'idéal serait de pouvoir corriger la courbe de phase uniquement au voisinage de  $\omega_{c0}$  ; toutes ces modifications devant, bien sûr, être localisées uniquement

dans certaines zones de fréquence. Car telle est l'inconvénient majeur de chacune des actions correctives élémentaires que nous venons d'étudier : leur action porte sur l'ensemble du spectre de fréquences de 0 à l'infini et toute action corrective menée à un endroit précis pour corriger telle ou telle performance agit également à d'autres endroits en dégradant certaines autres. Les correcteurs idéaux, s'ils existent, devront être caractérisés par une action localisée en vue de corriger une des performances, sans influencer les autres, chose que ne peuvent pas réaliser des correcteurs simples qui modifient l'ensemble du diagramme de Bode.

## 8.5 ACTION PROPORTIONNELLE INTÉGRALE CORRECTEUR À RETARD DE PHASE

### a) Définition

Le correcteur à retard de phase est un correcteur qui, comme son nom ne l'indique pas, permet d'augmenter le gain uniquement aux basses fréquences. Il sera donc utilisé pour améliorer la précision d'un système asservi.

Sa fonction de transfert est :

$$C(p) = \frac{a(1 + Tp)}{1 + aTp} \text{ avec } a > 1$$

Pour mieux comprendre l'action de ce correcteur, traçons son diagramme de Bode. Il y a deux pulsations de coupure :  $1/T$  et  $1/aT$ ,

telles que :

$$1/aT < 1/T$$

On a :

$$C(\omega) = \frac{a\sqrt{1 + T^2\omega^2}}{\sqrt{1 + a^2T^2\omega^2}}$$

et :

$$\varphi(\omega) = \arctan T\omega - \arctan aT\omega$$

Lorsque  $\omega \rightarrow 0$ , on a :

$$C(\omega) \rightarrow a$$

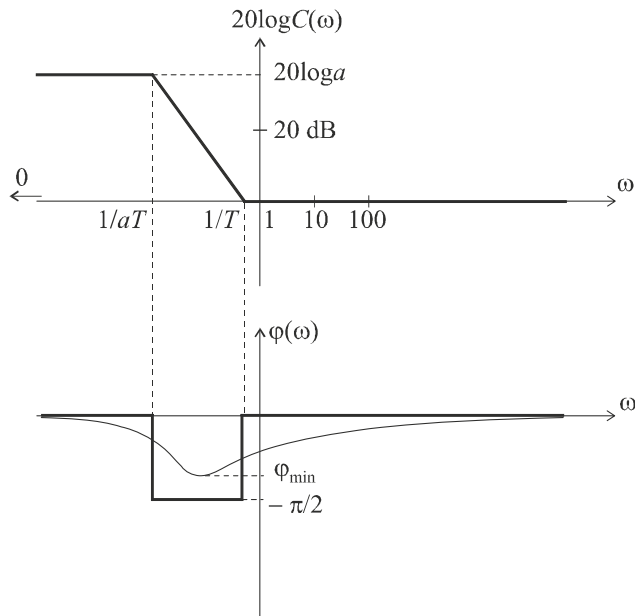
Cet équivalent de pente nulle est valable de 0 jusqu'à la première pulsation de coupure qui a pour expression :  $1/aT$ . La pente du diagramme de Bode asymptotique se décrémente alors d'une unité et ce nouvel équivalent est valable jusqu'à la seconde pulsation de coupure ( $1/T$ ) à partir de laquelle nous retrouvons une pente nulle (figure 8.5).

Lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$ , on a :

$$20 \log C(\omega) \rightarrow 0 \text{ dB}$$

L'examen du diagramme de Bode nous permet de prévoir l'action de ce correcteur. Lorsque celui-ci sera placé en cascade avec le système à corriger, dans la chaîne directe, les deux diagrammes de Bode s'additionneront. Le gain statique est donc bien augmenté de  $20 \log a$ , ce qui améliore la précision. En réglant le paramètre  $T$  sur une valeur suffisamment faible, cette correction n'a d'influence qu'aux basses fréquences ; le gain aux hautes fréquences n'est pratiquement pas affecté. Le déphasage négatif supplémentaire introduit par le correcteur se situe également aux basses fréquences. Il n'a donc pas d'influence sur la marge de stabilité, étant donné que les pulsations de coupure à 0 dB sont, en général, situées dans des plages de fréquences plus élevées.

En tout état de cause, pour régler le correcteur à retard de phase, on choisira la valeur de  $a$  qui permet d'obtenir le gain statique résultant voulu et on choisira ensuite  $T$  se sorte que  $1/T \ll \omega_{c0}$ .



**Figure 8.6** Diagramme de Bode d'un correcteur à retard de phase.

*b) Exemple*

Considérons un système de fonction de transfert  $G(p)$  placé dans une boucle à retour unitaire, avec :

$$G(p) = \frac{K}{\left(1 + \frac{p}{10}\right)^3}$$

Le paramètre  $K$ , gain statique du système en boucle ouverte est positif et réglable. On souhaite que ce système présente en boucle fermée une erreur de position  $\varepsilon_p = 5\%$ , tout en ayant une marge de phase  $\Delta\varphi = 45^\circ$ .

On commence par régler  $K$  pour satisfaire à la condition sur la marge de phase :

Comme :

$$G(j\omega) = \frac{K}{\left(1 + \frac{j\omega}{10}\right)^3}$$

on a :

$$\Delta\varphi = \pi - 3 \arctan \frac{\omega_{c0}}{10} = \frac{\pi}{4}$$

soit :

$$\omega_{c0} = 10 \text{ rad/s}$$

On a donc :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\left(\sqrt{1 + \frac{\omega_{c0}^2}{100}}\right)^3} = 1$$

d'où :

$$K = \left(\sqrt{2}\right)^3 = 2,8 \Rightarrow 20 \log K = 8,9 \text{ dB}$$



Calculons à présent l'erreur de position obtenue en boucle fermée dans ces conditions :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} [1 - H(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ 1 - \frac{K}{K + \left(1 + \frac{p}{10}\right)^3} \right]$$

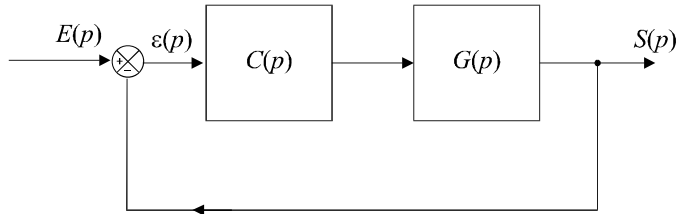
soit :

$$\varepsilon_p = \frac{1}{1 + K} = 0,26 = 26 \%$$

La précision constatée ne satisfait pas au cahier des charges. Pour obtenir une erreur de position de 5 %, il est nécessaire de disposer d'un gain statique  $K'$  tel que :

$$\varepsilon_p = \frac{1}{1 + K'} = 0,05 \Rightarrow K' = 19 \Rightarrow 20 \log K' = 25,6 \text{ dB}$$

Introduisons un correcteur à retard de phase dans la chaîne directe (figure 8.7).



**Figure 8.7** Introduction d'un correcteur à retard de phase dans la chaîne directe.

On a :

$$C(p) = \frac{a(1 + Tp)}{1 + aTp} \text{ avec } a > 1$$

La nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$G_c(p) = C(p)G(p) = \frac{a(1 + Tp)}{1 + aTp} \cdot \frac{2,8}{\left(1 + \frac{p}{10}\right)^3} \text{ avec } a > 1$$

Le nouveau gain statique est :  $K' = 2,8a$ .

Par conséquent, il est nécessaire de régler le paramètre  $a$  de sorte que :

$$a = \frac{19}{2,8} = 6,8 \Rightarrow 20 \log a = 16,7 \text{ dB}$$

Il suffit, pour finir, de choisir  $T$  de manière à ce que  $1/T$  soit très inférieur à la pulsation de coupure à 0 dB. Nous pouvons prendre, par exemple,  $T = 10$  s.

On a finalement :

$$C(p) = \frac{6,8(1 + 10p)}{1 + 68p}$$

La figure 8.8 présente les diagrammes de Bode comparés du système initial et du système corrigé. Rappelons que les diagrammes de Bode de  $G(p)$  et de  $C(p)$  s'additionnent pour former celui du système corrigé  $G_c(p)$ .

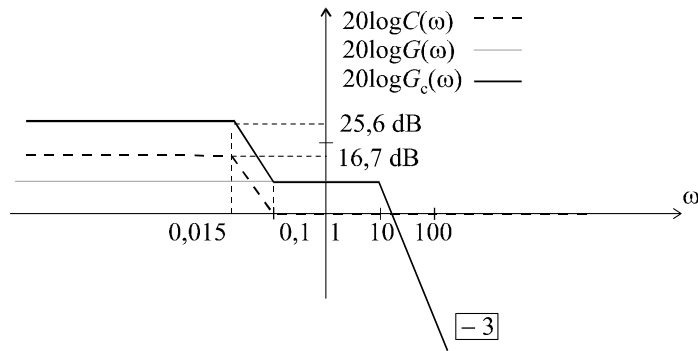


Figure 8.8 Diagramme de Bode corrigé aux basses fréquences.

## 8.6 ACTION PROPORTIONNELLE DÉRIVÉE CORRECTEUR À AVANCE DE PHASE

### a) Définition

Le correcteur à avance de phase est un correcteur qui, comme son nom l'indique, permet d'augmenter la marge de phase d'un système. Il s'agit de compenser un trop faible déphasage autour de la pulsation de coupure à 0 dB.

On prend :

$$C(p) = \frac{1 + aTp}{1 + Tp} \text{ avec } a > 1$$

Pour mieux comprendre l'action de ce correcteur, traçons son diagramme de Bode. Il y a deux pulsations de coupure :  $1/T$  et  $1/aT$ , avec :

$$1/aT < 1/T$$

On a :

$$C(\omega) = \frac{\sqrt{1 + a^2 T^2 \omega^2}}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}$$

et :

$$\varphi(\omega) = \arctan aT\omega - \arctan T\omega$$

Lorsque  $\omega \rightarrow 0$ , on a :

$$C(\omega) \rightarrow 1$$

Cet équivalent de pente nulle est valable de 0 jusqu'à la première pulsation de coupure qui a pour expression :  $1/aT$ . La pente du diagramme de Bode asymptotique s'incrémente alors d'une unité et ce nouvel équivalent est valable jusqu'à la seconde pulsation de coupure ( $1/T$ ) à partir de laquelle nous retrouvons une pente nulle (figure 8.9).

Lorsque  $\omega \rightarrow +\infty$ , on a :

$$20 \log C(\omega) \rightarrow 20 \log a$$

L'intérêt de ce correcteur est visible sur son diagramme de phase : à la pulsation  $\omega_{\max} = \frac{1}{T\sqrt{a}}$ , le déphasage présente un maximum que nous pouvons facilement calculer :

$$\varphi_{\max} = \arcsin \frac{a - 1}{a + 1}$$

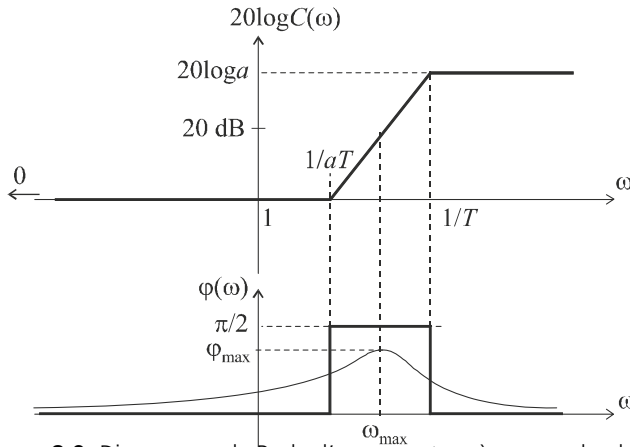


Figure 8.9 Diagramme de Bode d'un correcteur à avance de phase.

Le principe de l'action correctrice consiste à faire coïncider  $\omega_{\max}$  avec la pulsation de coupure à 0 dB  $\omega_{c0}$  du système à corriger et à régler  $\varphi_{\max}$ , que l'on appelle la remontée de phase, de manière à obtenir la marge de phase voulue.

b) Exemple

Considérons un système de fonction de transfert  $G(p)$  placé dans une boucle à retour unitaire, avec :

$$G(p) = \frac{100}{(p + 1)^2}$$

On souhaite corriger ce système de manière à ce que sa marge de phase soit égale à  $45^\circ$ . Calculons sa marge de phase avant correction.

On a :

$$G(\omega) = \frac{100}{1 + \omega_{c0}^2} = 1$$

d'où :

$$\omega_{c0} = \sqrt{99} = 9,95 \text{ rad/s}$$

Par conséquent :

$$\Delta\varphi = \pi - 2 \arctan \omega_{c0} = 0,2 \text{ rad} = 11^\circ$$

La marge de phase est insuffisante. Pour la corriger, nous devons procéder à une remontée de phase de  $34^\circ$  à la pulsation  $\omega_{c0}$ . On introduit donc un correcteur à avance de phase que l'on règle de manière à ce que :

$$\frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_{c0} = 9,95 \text{ rad/s} \text{ et } \varphi_{\max} = 34^\circ = \arcsin \frac{a - 1}{a + 1}$$

On a donc :

$$\arcsin \frac{a - 1}{a + 1} = 34^\circ \Rightarrow a = \frac{1 + \sin 34^\circ}{1 - \sin 34^\circ} = 3,54$$

ou encore :

$$20 \log a = 11 \text{ dB}$$

puis :

$$\frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_{c0} \Rightarrow T = \frac{1}{9,95\sqrt{3,54}} = 0,053 \text{ s}$$

soit :

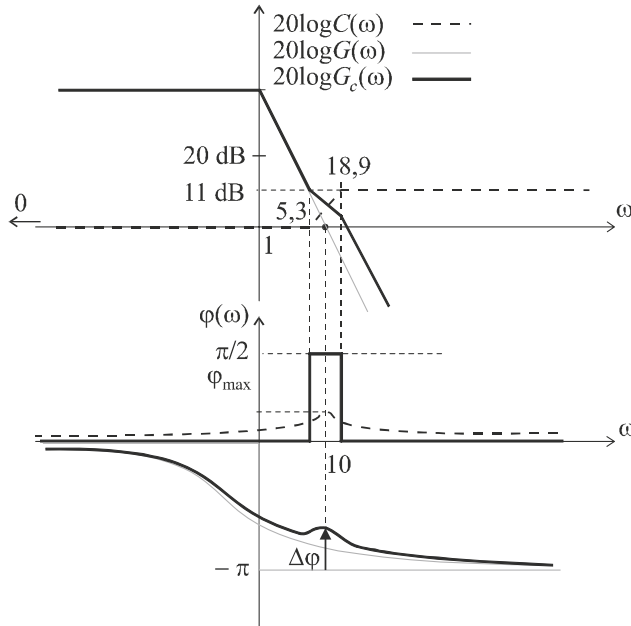
$$\frac{1}{T} = 18,9 \text{ rad/s} \text{ et } \frac{1}{aT} = 5,3 \text{ rad/s}$$

Finalement :

$$C(p) = \frac{1 + 0,19p}{1 + 0,053p}$$

La nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$G_c(p) = C(p)G(p) = \frac{1 + 0,19p}{1 + 0,053p} \cdot \frac{100}{(p + 1)^2}$$



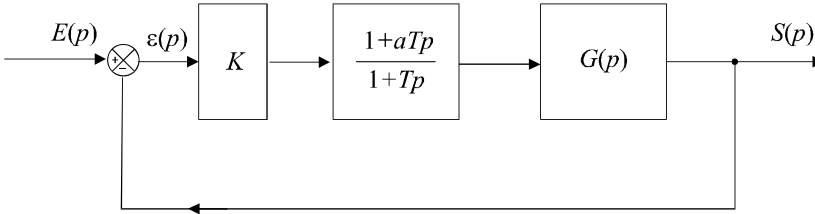
**Figure 8.10** Diagramme de Bode du système corrigé.

La figure 8.10 présente les diagrammes de Bode comparés du système initial et du système corrigé. Rappelons que les diagrammes de Bode de  $G(p)$  et de  $C(p)$  s'additionnent pour former celui du système corrigé  $G_c(p)$ . Dans le cas du correcteur à avance de phase, l'action correctrice est parfaitement visible sur le diagramme de phase.

**Remarque :** Le correcteur à avance de phase a une influence sur le diagramme de gain du système. Cette influence est visible sur la figure 8.10 autour de la pulsation de coupure à 0 dB : la pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé est légèrement plus grande que celle du système non corrigé. Par conséquent, la remontée de phase maximale que l'on a calculée ne se produit plus véritablement à  $\omega_{c0}$ . On a alors le choix de négliger cette augmentation ou encore de l'anticiper en majorant la remontée de phase calculée de quelques degrés, par exemple  $5^\circ$ .

### c) Stratégie de réglage d'un asservissement

En règle générale, le cahier des charges d'une boucle de régulation impose 4 performances : la précision, matérialisée par une valeur maximale de l'erreur de position :  $\varepsilon_p < \text{seuil}$ , la rapidité, matérialisée par une valeur maximale du temps de montée :  $t_m < \text{seuil}$ , la marge de stabilité, matérialisée par une valeur minimale de la marge de phase :  $\Delta\varphi < \text{seuil}$ , la limitation du dépassement :  $d\% < \text{seuil}$ , ce qui se traduit par une valeur minimale du coefficient d'amortissement en boucle fermée, donc, étant donné que  $\xi_{BF} \approx \frac{\Delta\varphi^\circ}{100}$ ,



**Figure 8.11** Correction complète d'une boucle de régulation.

par une valeur minimale de la marge de phase. Entre cette valeur et celle dictée précédemment, on prend bien sûr la plus élevée.

Une des méthodes les plus intéressantes pour régler le système de sorte qu'il satisfasse au cahier des charges est la suivante :

On commence par corriger la précision et la rapidité, soit en réglant le gain statique, soit en ajoutant un correcteur proportionnel. Si la précision parfaite est exigée, on introduit un intégrateur et on règle ensuite la rapidité.

Le réglage de la précision et de la rapidité a pour conséquence une détérioration de la marge de phase. On estime alors la valeur de la marge de phase et on introduit un correcteur à avance de phase qui remonte  $\Delta\varphi$  à la valeur voulue.

## EXERCICES

### 8.1 Étude de la stabilité d'un système après correction intégrale

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{K}{(p+1)(p+8)^2}$$

Déterminer les conditions de stabilité de ce système placé dans une boucle à retour unitaire.

Pour annuler l'erreur statique, on introduit un intégrateur dans la chaîne directe. Déterminer les nouvelles conditions de stabilité et conclure.

### 8.2 Correction de la rapidité d'un système

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{1}{(p+1)(p+4)}$$

On place ce système dans une boucle de régulation à retour unitaire en le précédant d'un correcteur proportionnel  $C(p) = K$ . Calculer la valeur de  $K$  qui assure au système une marge de phase égale à  $45^\circ$ . Calculer alors la valeur du temps de montée en boucle fermée.

Déterminer la valeur de  $K$  qui assure un temps de montée égale à 0,2 s. Calculer la nouvelle valeur de la marge de phase. Conclure.

### 8.3 Correction de la précision d'un système par un correcteur à retard de phase

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{K}{(p+3)^3} \text{ avec } K > 0$$

On place ce système dans une boucle à retour unitaire. Déterminer la valeur de  $K$  qui assure au système en boucle fermée un dépassement limité à 10 %. Calculer alors l'erreur de position en boucle fermée. Déterminer l'expression  $C(p)$  du correcteur à retard de phase qu'il faut introduire dans la chaîne directe pour maintenir cette limitation du dépassement tout en limitant l'erreur statique à  $\varepsilon_p = 20$  %.

### 8.4 Correction de la stabilité après réglage de la rapidité

On considère un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{K}{(p+1)^3}$  placé dans une boucle de régulation à retour unitaire. On souhaite avoir à la fois une marge de phase supérieure à  $45^\circ$  et un temps de montée plus petit que 0,5 s.

Calculer la valeur de  $K$  qui assure, en boucle fermée, un temps de montée de 2,15 s. Calculer, pour cette valeur de  $K$  la valeur de la marge de phase. En déduire l'expression de la fonction de transfert du correcteur à avance de phase qu'il faut introduire dans la chaîne directe.

### 8.5 Réglage d'un système en stabilité et en précision

On souhaite asservir un système dont la fonction de transfert est :

$$A(p) = \frac{8}{p^2 + 5p + 6}$$

On place ce système dans la chaîne directe d'une boucle de régulation, en cascade avec un correcteur  $C(p) = K$ . La boucle de retour est assurée par un système de fonction de transfert  $B(p) = 3$ .

Déterminer la condition nécessaire sur  $K$  pour que le système possède une marge de phase supérieure à  $45^\circ$ . Déterminer l'expression du nouveau correcteur  $C(p)$  qui permet d'avoir à la fois une marge de phase de  $45^\circ$  et une erreur de position inférieure à 0,2.

### 8.6 Correction d'un système conformément à un cahier des charges

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  que l'on souhaite réguler à l'aide d'une boucle à retour unitaire :

$$G(p) = \frac{K}{(10p+1)^2(p+1)}$$

On souhaite que la boucle de régulation fonctionne selon le cahier des charges suivant :

$\Delta\varphi \geq 45^\circ$  ;  $d \leq 10$  % ;  $\varepsilon_p < 0,08$  ;  $t_m < 8$  s.

Quelle est la condition sur  $K$  pour obtenir  $\varepsilon_p < 0,08$  ?

Quelle est la condition sur  $K$  pour obtenir  $t_m < 8$  s ?

On choisit à présent, pour  $K$ , la plus petite valeur permettant d'obtenir à la fois  $\varepsilon_p < 0,08$  et  $t_m < 8$  s. Calculer la valeur de la marge de phase obtenue dans ces conditions. Que vaut alors le dépassement ?

Tout en conservant cette valeur de  $K$ , on introduit, en amont de  $G(p)$ , dans la chaîne directe, un correcteur  $C(p)$  destiné à corriger le dépassement et la marge de phase, sans altérer ni la rapidité, ni la précision qui correspondent au cahier des charges.

Déterminer avec précision la fonction de transfert de ce correcteur.

### 8.7 Régulation d'un four en fonction d'un cahier des charges

Un four électrique destiné au traitement thermique d'objets est constitué d'une enceinte close chauffée par une résistance électrique alimentée par une tension  $v(t)$ . Dix objets peuvent prendre place simultanément dans le four. Le traitement thermique consiste à maintenir les objets pendant 1 heure à une température de  $1200\text{ }^{\circ}\text{C}$  (régulée de façon optimale car les objets sont détruits si la température dépasse  $1400\text{ }^{\circ}\text{C}$ ). Entre deux cuissons, un temps de 24 minutes est nécessaire pour procéder au refroidissement du four et à la manutention.

Le four est régi par l'équation différentielle :  $\frac{d\theta}{dt} + 2000\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0,02v(t)$ .

a) Calculer la fonction de transfert  $G(p)$  du four en boucle ouverte. Quel est le gain statique du four ? Que se passerait-il si on alimentait le four en continu et en boucle ouverte ?

b) En admettant malgré tout qu'on alimente le four en boucle ouverte en appliquant aux bornes de la résistance une tension de  $100\text{ V}$  continue, au bout de quelle durée atteindrait-on, dans le four, une température de  $1200\text{ }^{\circ}\text{C}$  ?

On décide de réguler la température dans le four en utilisant un capteur de température qui délivre une tension  $u(t)$ .

Le capteur est régi par l'équation différentielle :  $u(t) + 2\frac{du}{dt} = 5 \cdot 10^{-3}\theta(t)$ .

On introduit également un gain  $K$  dans la chaîne directe.

c) Faire le schéma de la boucle de régulation et calculer sa fonction de transfert en boucle fermée. Déterminer les conditions de stabilité de ce système.

d) On souhaite se placer dans des conditions de stabilité suffisantes en imposant une marge de phase  $\Delta\varphi = 45^{\circ}$ . Quelle est, dans ces conditions, la valeur du temps de montée en boucle fermée ?

e) On souhaite évidemment réguler la température du four à  $1200\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Déterminer l'expression du signal de consigne à introduire dans le système. Le système étant réglé pour obtenir une marge de phase  $\Delta\varphi = 45^{\circ}$ , quelle est la température maximale que l'on atteint dans le four ? Conclure.

f) En voulant limiter le dépassement à  $10\%$ , quel sera le temps de montée en température du four ? Combien peut-on traiter d'objets en 24 heures ?

g) On souhaite atteindre une cadence de traitement de 100 objets par 24 heures. Sur quelle valeur faut-il régler le gain  $K$  pour atteindre cet objectif ? Que vaut alors la marge de phase ? Quel correcteur faut-il ajouter à la chaîne directe pour limiter le dépassement à  $10\%$  tout en conservant cette cadence ?

## SOLUTIONS

8.1 La fonction de transfert en boucle fermée a pour expression :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{(p+1)(p+8)^2 + K}$$

$$\text{soit : } H(p) = \frac{K}{(p+1)(p^2+16p+64)+K} = \frac{K}{p^3+17p^2+80p+64+K}$$

Appliquons le critère de Routh pour déterminer les conditions de stabilité :

$$\begin{array}{cc} 1 & 80 \\ 17 & 64+K \\ \frac{1296-K}{17} & 0 \\ 64+K & 0 \end{array}$$

Le système est stable si  $K < 1296$ .

En introduisant un intégrateur dans la chaîne directe, on annule l'erreur de position et on a, à présent :

$$G(p) = \frac{K}{p(p+1)(p+8)^2}$$

$$\text{et : } H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{K}{p(p+1)(p+8)^2+K}$$

$$\text{soit : } H(p) = \frac{K}{p^4+17p^3+80p^2+64p+K}$$

Appliquons encore le critère de Routh pour déterminer les nouvelles conditions de stabilité :

$$\begin{array}{ccc} 1 & 80 & K \\ 17 & 64 & 0 \\ \frac{1296}{17} & K & 0 \\ 64-0,223K & 0 & 0 \\ K & & \end{array}$$

Le système est stable si  $K < 287$ .

L'introduction d'un intégrateur pour annuler l'erreur de position réduit considérablement l'intervalle de réglage du gain  $K$ , preuve que la correction intégrale dégrade sensiblement la stabilité d'un système.

**8.2** La fonction de transfert en boucle ouverte a pour expression :

$$KG(p) = \frac{K}{(p+1)(p+4)}$$

$$\text{soit : } KG(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega)(4+j\omega)}$$

Pour obtenir une marge de phase égale à  $45^\circ$ , on doit avoir :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan \omega_{c0} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{soit : } \arctan \omega_{c0} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Calculons la tangente des deux membres de l'expressions :

$$\tan \left[ \arctan \omega_{c0} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} \right] = \tan \frac{3\pi}{4} = -1$$



d'où :

$$\frac{\frac{5\omega_{c0}}{4}}{1 - \frac{\omega_{c0}^2}{4}} = -1 \Rightarrow \omega_{c0}^2 - 5\omega_{c0} - 4 = 0$$

Réolvons cette équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 16 = 41$$

La seule solution positive est :

$$\omega_{c0} = \frac{5 + \sqrt{41}}{2} = 5,7 \text{ rad/s}$$

Par définition :

$$KG(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2}} = 1$$

Par conséquent :

$$K = \sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2} = 40,3$$

Le gain  $K$  étant réglé sur cette valeur, on a bien une marge de phase de  $45^\circ$  et un temps de montée en boucle fermée que l'on peut estimer en utilisant la relation approchée suivante :

$$\omega_{c0} t_m \approx 3 \Rightarrow t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}} = \frac{3}{5,7} = 0,53 \text{ s}$$

Si on souhaite régler le temps de montée sur 0,2 s, on doit avoir :

$$\omega_{c0} t_m \approx 3 \Rightarrow \omega_{c0} \approx \frac{3}{0,2} = 15 \text{ rad/s}$$

Pour obtenir une telle pulsation de coupure à 0 dB, il faut changer la valeur de  $K$  :

Par définition :

$$KG(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2}} = 1$$

Par conséquent :

$$K = \sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2} = 233,4$$

La marge de phase a bien évidemment changé :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan \omega_{c0} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{4} = 0,326 \text{ rad} = 18,7^\circ$$

Ce résultat montre bien qu'en cherchant à augmenter la rapidité d'un système par une correction proportionnelle, on dégrade sa stabilité.

**8.3** D'après l'abaque des réponses indicielles d'un système du second ordre, un dépassement de 10 % correspond à un facteur d'amortissement  $\xi_{BF} = 0,6$ . La relation approchée que nous pouvons extrapoler à l'ordre 3 nous donne donc :

$$\Delta\varphi = 100\xi_{BF} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

Calculons alors la pulsation de coupure à 0 dB correspondante :

Comme :

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega + 3)^3}$$

on a :

$$\Delta\varphi = \pi - 3 \arctan \frac{\omega_{c0}}{3} = \frac{\pi}{3}$$

d'où :

$$\omega_{c0} = 3 \tan \frac{2\pi}{9} = 2,52 \text{ rad/s}$$

Par définition :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2}} = 1$$

Par conséquent :

$$K = \sqrt{1 + \omega_{c0}^2} \sqrt{16 + \omega_{c0}^2} = 12,8$$

Calculons l'erreur de position correspondante.

On a :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{(p+3)^3 + K}$$

donc :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} [1 - H(p)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ 1 - \frac{K}{(p+3)^3 + K} \right]$$

Dans notre cas :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ 1 - \frac{12,8}{(p+3)^3 + 12,8} \right] = 1 - \frac{12,8}{39,8} = 68 \%$$

Pour corriger l'erreur de position, on introduit un correcteur à retard de phase :

$$C(p) = \frac{a(1 + Tp)}{1 + aTp}$$

Le nouveau gain statique en boucle ouverte est désormais :  $G(0) = \frac{Ka}{27}$ .

L'erreur de position est donc égale à :  $\varepsilon_p = \frac{1}{1 + \frac{Ka}{27}}$ .

On a donc :

$$\varepsilon_p = \frac{1}{1 + \frac{Ka}{27}} = 0,2 \Rightarrow a = \frac{0,8 \times 27}{0,2 \times 12,8} = 8,44$$

On choisit  $T$  de sorte que  $\frac{1}{T} \ll \omega_{c0}$ , par exemple  $T = 10$  s

On a alors :

$$C(p) = \frac{8,44(1 + 10p)}{1 + 84,4p}$$

**8.4** On sait déjà, pour avoir étudié ce système dans un précédent chapitre, qu'il est stable pour  $K < 8$ . Calculons la valeur de  $K$  qui permet d'obtenir un temps de montée de 2,15 s :

On a :

$$\omega_{c0} \approx \frac{3}{t_m} = 1,4 \text{ rad/s}$$

Or :

$$G(\omega) = \frac{K}{(\sqrt{\omega^2 + 1})^3} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = -3 \arctan \omega$$

Par définition :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{(\sqrt{\omega_{c0}^2 + 1})^3} = 1 \Rightarrow K = 5$$

Dans ces conditions, la marge de phase vaut :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi - 3 \arctan \omega_{c0} = 17^\circ$$

Il faut introduire un correcteur  $C(p) = \frac{1 + aTp}{1 + Tp}$  dans la chaîne directe, en le réglant pour obtenir une remontée de phase de  $28^\circ$  à la pulsation  $\omega_{c0} = 1,4$  rad/s.

On a donc :

$$\varphi_{\max} = \arcsin \frac{a-1}{a+1} = 28^\circ \Rightarrow a = 2,8$$

et :

$$\omega_{\max} = \omega_{c0} = \frac{1}{T\sqrt{a}} \Rightarrow T = \frac{1}{\omega_{c0}\sqrt{a}} = 0,43 \text{ s}$$

d'où :

$$C(p) = \frac{1 + 1,2p}{1 + 0,43p}$$

**8.5** La fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$G(p) = KA(p)B(p) = \frac{24K}{p^2 + 5p + 6} = \frac{24K}{(p + 2)(p + 3)}$$

Pour obtenir une marge de phase égale à  $45^\circ$ , on doit avoir :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan \frac{\omega_{c0}}{2} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{3} = \frac{\pi}{4}$$

soit :

$$\arctan \frac{\omega_{c0}}{2} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{3} = \frac{3\pi}{4}$$

Calculons la tangente des deux membres de l'expression :

$$\tan \left[ \arctan \frac{\omega_{c0}}{2} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{3} \right] = \tan \frac{3\pi}{4} = -1$$

d'où :

$$\frac{\frac{5\omega_{c0}}{6}}{1 - \frac{\omega_{c0}^2}{6}} = -1 \Rightarrow \omega_{c0}^2 - 5\omega_{c0} - 6 = 0$$

Réolvons cette équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 24 = 49$$

La seule solution positive est :

$$\omega_{c0} = \frac{5 + \sqrt{9}}{2} = 6 \text{ rad/s}$$

Par définition :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{24K}{\sqrt{4 + \omega_{c0}^2} \sqrt{9 + \omega_{c0}^2}} = 1$$

Par conséquent :

$$K = \frac{\sqrt{4 + \omega_{c0}^2} \sqrt{9 + \omega_{c0}^2}}{24} = 1,77$$

Dans un second temps, on exige de surcroît que le système présente en boucle fermée une erreur de position inférieure à 0,2. Calculons l'erreur de position obtenue avec le réglage  $K = 1,77$ .

On a :

$$H(p) = \frac{KA(p)}{1 + KA(p)B(p)} = \frac{8K}{p^2 + 5p + 6 + 24K}$$

d'où :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} [1 - H(p)] = \left[ 1 - \frac{8K}{6 + 24K} \right] = 71 \%$$

Pour régler l'erreur de position sur 20 %, une première idée consiste à chercher à augmenter le gain  $K$ . On peut alors s'attendre à une chute de la marge de stabilité que l'on corrigera ensuite au moyen d'un correcteur à avance de phase.

Toutefois :

$$\varepsilon_p = \left[ 1 - \frac{8K}{6 + 24K} \right] = 20 \% \Rightarrow 0,48 + 11,2K = 0$$

Aucune valeur positive de  $K$  ne permet donc d'obtenir la précision voulue. Il est donc nécessaire d'introduire un correcteur intégral dans la chaîne directe, seul moyen de garantir une erreur de position inférieure à 20 %. La nouvelle boucle de régulation est présentée sur la figure 8.12.

Est-il possible de régler  $K$  de manière à obtenir à présent une marge de phase de  $45^\circ$  ? Telle est la question à laquelle il nous faut maintenant répondre.

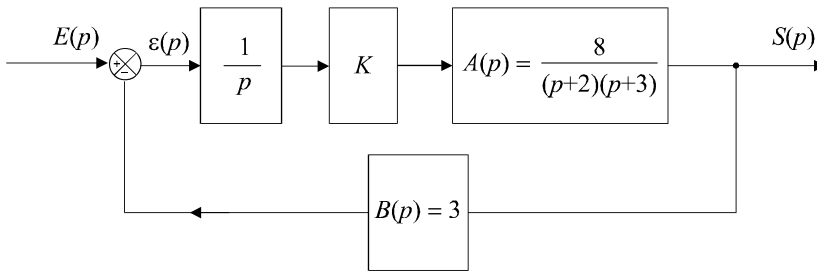


Figure 8.12 Boucle de régulation avec correction intégrale.

On a maintenant :

$$G(p) = \frac{24K}{p(p+2)(p+3)}$$

Pour obtenir une marge de phase égale à  $45^\circ$ , on doit avoir :

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{2} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{3} = \frac{\pi}{4}$$

soit :

$$\arctan \frac{\omega_{c0}}{2} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{3} = \frac{\pi}{4}$$

Calculons la tangente des deux membres de l'expression :

$$\tan \left[ \arctan \frac{\omega_{c0}}{2} + \arctan \frac{\omega_{c0}}{3} \right] = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

d'où :

$$\frac{\frac{5\omega_{c0}}{6}}{1 - \frac{\omega_{c0}^2}{6}} = 1 \Rightarrow \omega_{c0}^2 + 5\omega_{c0} - 6 = 0$$

La seule solution positive est évidente :

$$\omega_{c0} = 1 \text{ rad/s}$$

Par définition :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{24K}{\omega_{c0} \sqrt{4 + \omega_{c0}^2} \sqrt{9 + \omega_{c0}^2}} = 1$$

Par conséquent :

$$K = \frac{\omega_{c0} \sqrt{4 + \omega_{c0}^2} \sqrt{9 + \omega_{c0}^2}}{24} = 0,3$$

Pour conclure, le correcteur qui permet d'obtenir à la fois une marge de phase de  $45^\circ$  et une erreur de position inférieure à 20 % (elle est même nulle) est :

$$C(p) = \frac{0,3}{p}$$

**8.6** Calculons tout d'abord l'erreur de position  $\varepsilon_p$  en fonction de  $K$  :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{(10p+1)^2(p+1) + K}$$

Par définition :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} [1 - H(p)] = 1 - \frac{K}{1+K} = \frac{1}{1+K}$$

Pour avoir  $\varepsilon_p < 0,08$ , on doit avoir :

$$\frac{1}{1+K} < 0,08 \Rightarrow K > 11,5$$

Pour avoir  $t_m < 8$  s et en considérant la relation approchée désormais bien connue, on doit avoir :

$$\frac{3}{\omega_{c0}} < 8 \text{ s} \Rightarrow \omega_{c0} > 0,375 \text{ rad/s}$$

Le gain  $K$  correspondant à cette pulsation de coupure à 0 dB est tel que :

$$G(p) = \frac{K}{(100\omega_{c0}^2 + 1)\sqrt{\omega_{c0}^2 + 1}} = 1$$

soit :

$$K = (100\omega_{c0}^2 + 1)\sqrt{\omega_{c0}^2 + 1} = 16,1$$

Pour garantir une pulsation  $\omega_{c0}$  supérieure à 0,375 rad/s, le gain  $K$  doit être supérieure à cette valeur.

Par conséquent :

$$t_m < 8 \text{ s} \Rightarrow K > 16,1$$

La plus petite valeur permettant d'obtenir à la fois  $\varepsilon_p < 0,08$  et  $t_m < 8$  s. est donc la plus grande des deux valeurs trouvées :

$$\varepsilon_p < 0,08 \quad \text{et} \quad t_m < 8 \text{ s} \Rightarrow K > 16,1$$

La marge de phase obtenue pour cette valeur de  $K$  est :

$$\Delta\varphi = \pi - 2 \arctan 10\omega_{c0} - \arctan \omega_{c0} = 0,16 \text{ rad} = 9^\circ$$

La valeur du dépassement en boucle fermée se détermine aisément à partir de l'abaque des réponses indicielles du second ordre (extrapolé ici à l'ordre 3) :

$$\Delta\varphi = 9^\circ \Rightarrow \xi_{BF} = 0,09 \Rightarrow dep = 74 \%$$

La marge de phase et le dépassement ne sont pas conformes au cahier des charges. Il nous faut donc corriger ces performances en introduisant un correcteur à avance de phase  $C(p)$  qui aura pour mission de remonter la marge de phase à une valeur de  $60^\circ$ . En effet, la condition sur le dépassement est la plus contraignante. Un dépassement de 10 % correspond à un facteur d'amortissement en boucle fermée de 0,6, soit une marge de phase de  $60^\circ$ .

On a :

$$C(p) = \frac{1 + aTp}{1 + Tp}$$

Il nous faut régler ce correcteur de manière à obtenir une remontée de phase de  $51^\circ$  à la pulsation  $\omega_{c0} = 0,375$  rad/s.

On a donc :

$$\varphi_{\max} = \arcsin \frac{a-1}{a+1} = 51^\circ \Rightarrow a = 8$$

et :

$$\omega_{\max} = \omega_{c0} = \frac{1}{T\sqrt{a}} \Rightarrow T = \frac{1}{\omega_{c0}\sqrt{a}} = 0,94 \text{ s}$$

d'où :

$$C(p) = \frac{1 + 7,54p}{1 + 0,94p}$$

**8.7** a) La fonction de transfert en boucle ouverte s'obtient aisément à partir de l'équation différentielle de fonctionnement du four en lui appliquant la transformation de Laplace.

$$\frac{d\theta}{dt} + 2000 \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0,02 \cdot v(t) \Rightarrow p\Theta(p) + 2000p^2\Theta(p) = 0,02V(p)$$

d'où :

$$G(p) = \frac{\Theta(p)}{V(p)} = \frac{0,02}{p(1 + 2000p)}$$

Si on alimentait le four en boucle ouverte à l'aide d'une tension continue (signal d'entrée en échelon), on aurait :

$$\Theta(p) = \frac{0,02}{p(1 + 2000p)} \cdot \frac{V_0}{p} = \frac{0,02V_0}{p^2(1 + 2000p)}$$

Si on applique le théorème de la valeur finale, on montre que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\Theta(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{0,02V_0}{p(1 + 2000p)} \rightarrow \infty$$

Il est donc impossible de stabiliser la température du four en boucle ouverte.

b) Si on suppose malgré tout qu'on alimente le four en plaçant à son entrée un signal en échelon de 100 V, on aura :

$$\Theta(p) = \frac{2}{p^2(1 + 2000p)} \Rightarrow \theta(t) = 2t + 4000 e^{-\frac{t}{2000}} - 4000$$

On atteint alors 1200 °C au bout d'un temps  $t_1$  tel que :

$$1200 = 2t_1 + 4000 e^{-\frac{t_1}{2000}} - 4000$$

En résolvant numériquement cette équation, on obtient :

$$t_1 \approx 1778 \text{ s} \approx 30 \text{ mn}$$

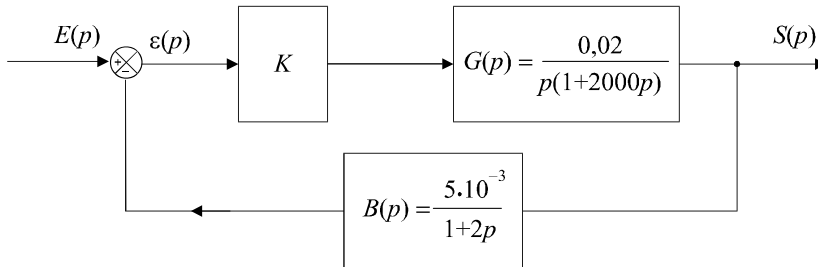
c) La fonction de transfert du capteur est obtenue à partir de son équation :

$$u(t) + 2 \frac{du}{dt} = 5 \cdot 10^{-3} \theta(t) \Rightarrow U(p) + 2pU(p) = 5 \cdot 10^{-3} \Theta(p)$$

d'où :

$$B(p) = \frac{U(p)}{\Theta(p)} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{1 + 2p}$$

La figure 8.13 présente l'ensemble de la boucle de régulation dans laquelle on a introduit également un gain  $K$ .



**Figure 8.13** Schéma fonctionnel de la boucle de régulation.

La fonction de transfert en boucle ouverte a pour expression :

$$H(p) = \frac{KG(p)}{1 + KG(p)B(p)} = \frac{\frac{0,02K}{p(1 + 2000p)}}{1 + \frac{0,02K}{p(1 + 2000p)} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3}}{1 + 2p}}$$

$$\text{soit : } H(p) = \frac{0,02K(1+2p)}{p(1+2p)(1+2000p)+10^{-4}K} = \frac{0,02K(1+2p)}{4000p^3+2002p^2+p+10^{-4}K}$$

Les conditions de stabilité en boucle fermée nous sont données par le critère de Routh :

$$\begin{array}{ccc} 4000 & 1 & 0 \\ 2002 & 10^{-4}K & 0 \\ \frac{2002-0,4K}{2002} & 0 & 0 \\ 10^{-4}K & 0 & 0 \end{array}$$

Le système est stable si et seulement si :

$$2002 - 0,4K > 0 \Rightarrow K < 5005$$

d) La fonction de transfert en boucle ouverte a pour expression :

$$KG(p)B(p) = \frac{10^{-4}K}{p(1+2000p)(1+2p)}$$

Si on impose une marge de phase de  $45^\circ$ , on a :

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan 2000\omega_{c0} - \arctan 2\omega_{c0} = \frac{\pi}{4}$$

En négligeant le dernier terme, on obtient :  $\omega_{c0} = \frac{1}{2000} = 5 \cdot 10^{-4}$  rad/s

$$\text{d'où : } t_m = \frac{3}{\omega_{c0}} = \frac{3}{5 \cdot 10^{-4}} = 6000 \text{ s} = 1 \text{ h } 40 \text{ mn}$$

e) Pour déterminer la valeur du signal de consigne, il convient de calculer la valeur du signal délivré par le capteur lorsque la température atteint  $1200^\circ\text{C}$  : en régime permanent, le capteur se comporte comme un gain de  $5 \cdot 10^{-3}$  V/ $^\circ\text{C}$ .

$$\text{Par conséquent : } \theta = 1200^\circ\text{C} \Rightarrow u = 6 \text{ V}$$

Comme la chaîne directe comporte un intégrateur, l'erreur statique sera nulle. Le système ne peut donc se stabiliser à  $1200^\circ\text{C}$  que si le signal d'entrée est un échelon de hauteur 6 V.

Si le système est réglé pour obtenir une marge de phase de  $45^\circ$ , la réponse du système, en boucle fermée, sera caractérisée par un facteur d'amortissement égal à 0,45. D'après les abaques des réponses indicielles, cela correspond à un dépassement de 20 %. La température maximale atteinte dans le four (temporairement) est donc égale à  $1440^\circ\text{C}$ .

Ce dépassement est bien évidemment trop important puisque les objets à cuire ne peuvent être soumis à des températures dépassant  $1400^\circ\text{C}$ .

f) Si on souhaite limiter le dépassement à 10 %, nous devons régler le système de sorte qu'il présente une marge de phase de  $60^\circ$ . Cette marge de phase correspond à une pulsation  $\omega_{c0}$  telle que :

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan 2000\omega_{c0} - \arctan 2\omega_{c0} = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{soit : } \arctan 2000\omega_{c0} \approx \frac{\pi}{6} \Rightarrow \omega_{c0} \approx \frac{\tan \pi/6}{2000} = 0,26 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$$

$$\text{Par conséquent : } t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}} \approx 3 \text{ h } 10 \text{ mn}$$

Dans ces conditions, chaque traitement durera 4 heures et 50 minutes (temps de montée en température ajouté à une heure de cuisson et à 24 minutes de manutention et refroidissement). On ne pourra donc en réaliser que 5 par 24 heures. Le nombre maximum d'objets que l'on pourra traiter par jour est donc limité à 50.

g) Pour atteindre une cadence de 100 objets par jour, il est nécessaire de réduire à 2 h 24 mn la durée d'une opération. La cuisson d'une heure et le temps de manutention étant incompressibles, la seule marge de manoeuvre se situe au niveau du réglage du temps de montée qui doit donc être égal à 1 heure.

$$\text{On a donc :} \quad t_m = 3\,600 \text{ s} \Rightarrow \omega_{c0} \approx \frac{3}{t_m} = 0,675 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$$

Il faut donc régler le gain  $K$  de manière à caler la pulsation de coupure à 0 dB sur cette valeur.

$$\text{Soit :} \quad KG(\omega_{c0})B(\omega_{c0}) = \frac{10^{-4}K}{\omega_{c0}\sqrt{1+4 \cdot 10^6\omega_{c0}^2}\sqrt{1+4\omega_{c0}^2}} = 1$$

$$\text{d'où :} \quad K = 10^4 \omega_{c0} \sqrt{1+4 \cdot 10^6\omega_{c0}^2} \sqrt{1+4\omega_{c0}^2} = 11,3$$

La marge de phase vaut alors :

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan 2\,000\omega_{c0} - \arctan 2\omega_{c0} = 36^\circ$$

Pour avoir un dépassement limité à 10 % tout en conservant la cadence imposée, il faut introduire un correcteur à avance de phase qui permette d'obtenir, à la pulsation  $\omega_{c0}$ , une remontée de phase de  $24^\circ$ .

$$\text{On a donc :} \quad C(p) = \frac{1+aTp}{1+Tp}$$

$$\text{avec :} \quad \varphi_{\max} = \arcsin \frac{a-1}{a+1} = 24^\circ \Rightarrow a = 2,37$$

$$\text{et :} \quad \omega_{\max} = \omega_{c0} = \frac{1}{T\sqrt{a}} \Rightarrow T = \frac{1}{\omega_{c0}\sqrt{a}} = 962 \text{ s}$$

$$\text{d'où :} \quad C(p) = \frac{1+2\,280p}{1+962p}$$



TROISIÈME PARTIE

---

**Automatique des systèmes  
continus non linéaires**



## Chapitre 9

# Analyse des asservissements continus non linéaires

## 9.1 INTRODUCTION

### 9.1.1 Généralités

Au cours des huit premiers chapitres, nous n'avons étudié que des systèmes dont la principale propriété était la linéarité, autrement dit des systèmes pour lesquels s'appliquent le principe de la conservation, au niveau de sa sortie de la combinaison linéaire d'entrée, chaque  $s_i(t)$  étant la sortie correspondant à  $e_i(t)$  :

$$e(t) = \lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t) + \dots + \lambda_n e_n(t)$$

$$s(t) = \lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t) + \dots + \lambda_n s_n(t)$$

De tels systèmes sont régis par des équations différentielles linéaires à coefficients constants et possèdent une fonction de transfert au sens où nous l'avons définie au chapitre 1.

Pour être tout à fait franc, les systèmes physiques réellement linéaires n'existent pas. Les équations différentielles linéaires, donc les fonctions de transfert, ne sont que des modèles qui correspondent plus ou moins bien à la réalité. Partant du principe que tout système qui n'est pas linéaire doit être considéré comme non linéaire, cela revient à dire que tous les systèmes physiques, en général, sont non linéaires.

Il nous faut donc apprécier, lors du choix d'un modèle, la pertinence de celui-ci au regard de la précision des résultats qu'il nous permet de mettre en évidence. Il est alors nécessaire de trouver un compromis entre la justesse (toute relative) du modèle et sa complexité. Il est en effet logique de penser que plus un modèle doit coller à la réalité, plus il sera complexe.

Pour rassurer le lecteur, nous pouvons malgré tout signaler qu'une majorité de systèmes physiques peuvent être appréhender comme des systèmes linéaires, tout du moins sous certaines conditions de fonctionnement. Ces conditions, en général, s'expriment sous la forme d'une limitation des amplitudes des signaux ou de la restriction à un certain intervalle de fréquences. L'ensemble de ces conditions permet de déterminer ce qu'on appelle le *domaine de linéarité d'un système*.

Toutefois, lorsque la précision de l'étude le nécessite ou lorsque les phénomènes engendrés par certains systèmes notoirement non linéaires ne peuvent être négligés, il est nécessaire d'appréhender l'étude de modèles de fonctionnement qui en tiennent compte. C'est ce que se propose de présenter ce chapitre ainsi que le chapitre suivant.

### 9.1.2 Différents types de non-linéarités

On distingue en général deux types de systèmes non linéaires :

- ceux pour lesquels ces non linéarités peuvent être considérées comme gênantes ou parasites ;
- ceux dans lesquels un organe volontairement non linéaire est volontairement introduit pour produire un effet particulier.

Ce dernier cas s'accomode fort mal, en général, d'une modélisation linéaire. Quant au premier, il peut s'en accomoder à condition que l'on puisse considérer le fonctionnement du système dans son domaine de linéarité ou que l'on évalue comme négligeable l'influence des non linéarités sur les prévisions tirées d'un modèle linéaire.

## 9.2 ÉTUDE DU DOMAINE DE LINÉARITÉ D'UN SYSTÈME

### 9.2.1 Le phénomène de saturation

Considérons un système physique très simple, par exemple un amplificateur de gain  $K$  (figure 9.1).

L'une des plus fréquentes limitations de son modèle linéaire correspond à l'incapacité d'écrire l'équation de fonctionnement  $s(t) = Ke(t)$ , notamment pour de fortes amplitudes des signaux.

En effet, tout amplificateur possède un intervalle  $[s_{\min}, s_{\max}]$  à l'intérieur duquel évolue obligatoirement le signal de sortie. Cette plage de variation du signal de sortie est appelée excursion du signal de sortie et est dû, la plupart du temps, à des limitations techniques. Dans le cas d'un amplificateur, les bornes de l'alimentation électrique utilisée constituent, en quelque sorte, des limites infranchissables pour le signal de sortie.

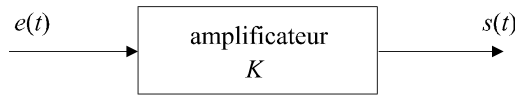


Figure 9.1 Modèle linéaire d'un amplificateur.

Si l'on tente d'amplifier un signal d'entrée  $e(t)$  possédant une amplitude telle que  $Ke(t) > s_{\max}$ , le signal de sortie saturera à la valeur  $s_{\max}$ .

On ne peut plus écrire :  $s(t) = Ke(t)$

La figure 9.2 illustre ce phénomène de saturation d'un signal sinusoïdal pour une entrée  $e(t)$  possédant une amplitude trop importante. Le signal de sortie n'est plus sinusoïdal.

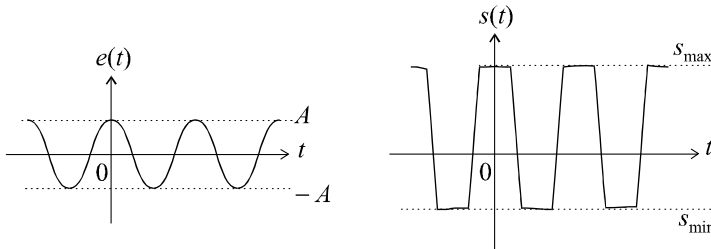


Figure 9.2 Saturation d'un signal sinusoïdal.

La figure 9.3 présente la caractéristique entrée - sortie d'un amplificateur réel avec sa plage de fonctionnement linéaire et ses deux plages de saturation.

**Remarque :** Le phénomène de saturation est souvent symétrique et l'on a :

$$s_{\min} = -s_{\max}$$

Il est fondamental de bien comprendre que le siège du phénomène de saturation se trouve au niveau de la sortie du système mais qu'il se traduit, en pratique, par une limitation de l'amplitude du signal d'entrée.

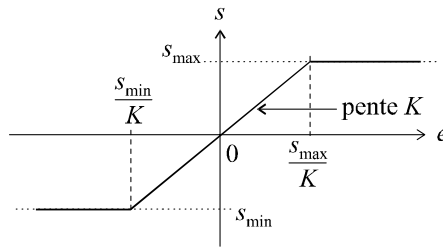


Figure 9.3 Caractéristique réelle d'un amplificateur avec saturation.

### 9.2.2 Détermination du domaine de linéarité d'un système asservi

Les amplificateurs ne sont pas les seuls organes présentant un phénomène de saturation. En réalité, tous les systèmes physiques, qu'ils soient électriques, électroniques, mécaniques, etc. sont caractérisés par ce phénomène. Ainsi, en mécanique, les butées qui bloquent le mouvement d'une pièce se traduisent par une saturation.

Dans une boucle d'asservissement composée de plusieurs éléments, chacun d'entre eux possède sa propre limitation en sortie. Dans l'exemple de la figure 9.4, les organes de fonctions de transferts  $A(p)$ ,  $B(p)$  et  $C(p)$  sont ainsi caractérisés par des valeurs maximales de leurs sorties respectives :  $A_{max}$ ,  $B_{max}$  et  $C_{max}$ .

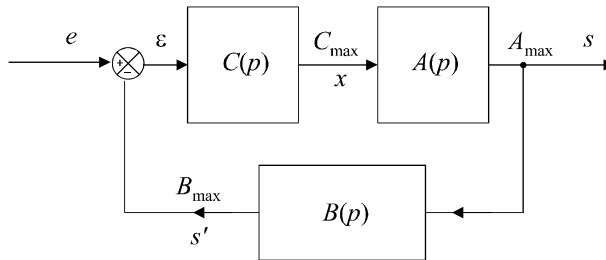


Figure 9.4 Saturations des sorties de chaque élément d'une boucle.

Chacune des valeurs maximales de sortie des différents éléments impose une valeur maximale de son entrée. Au final, toutes ces contraintes imposent une limitation du signal d'entrée.

En supposant que  $e$ ,  $\varepsilon$ ,  $x$ ,  $s$  et  $s'$  représentent les amplitudes de signaux qui sont tous sinusoïdaux, on peut ainsi, dans notre exemple, écrire les différentes contraintes liées aux saturations éventuelles que l'on cherche, bien évidemment, à éviter :

$$s < A_{max} \Rightarrow x < \frac{A_{max}}{A(\omega)} \Rightarrow \varepsilon < \frac{A_{max}}{A(\omega)C(\omega)}$$

Par ailleurs :

$$x < C_{max} \Rightarrow \varepsilon < \frac{C_{max}}{C(\omega)}$$

De plus :

$$s' < B_{max} \Rightarrow s < \frac{B_{max}}{B(\omega)}$$

d'où :

$$x < \frac{B_{max}}{A(\omega)B(\omega)} \Rightarrow \varepsilon < \frac{B_{max}}{A(\omega)B(\omega)C(\omega)}$$

On se rend ainsi compte que chaque saturation éventuelle impose une contrainte différente sur l'amplitude de l'écart  $\varepsilon$ .

Comme  $\varepsilon = e - s'$ , ces contraintes sur l'écart se répercutent sur le signal d'entrée. Attention, toutefois, la valeur maximale de l'écart correspond à :

$$\varepsilon_{\max} = e_{\max} - B_{\min}$$

On doit avoir simultanément :

$$e < \frac{A_{\max}}{A(\omega)C(\omega)} + B_{\min}$$

$$e < \frac{C_{\max}}{C(\omega)} + B_{\min}$$

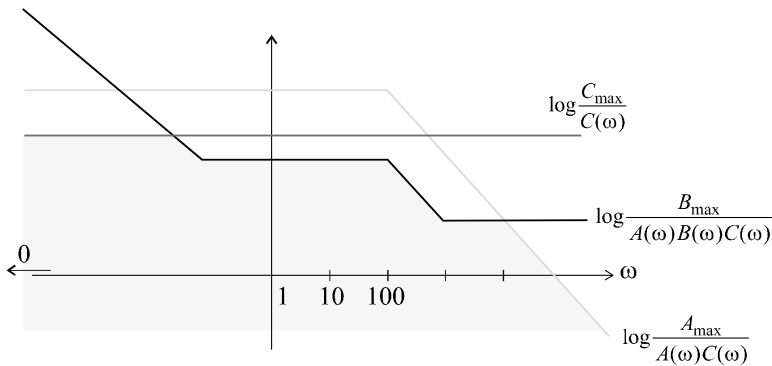
$$e < \frac{B_{\max}}{A(\omega)B(\omega)C(\omega)} + B_{\min}$$

Dans le cas, fréquent, où  $B_{\min} = 0$ , ces inéquations deviennent :

$$e < \frac{A_{\max}}{A(\omega)C(\omega)}$$

$$e < \frac{C_{\max}}{C(\omega)}$$

$$e < \frac{B_{\max}}{A(\omega)B(\omega)C(\omega)}$$



**Figure 9.5** Définition de la zone de linéarité d'un système.

Il est alors possible de tracer, sur un diagramme amplitude - fréquence, les différentes courbes ainsi mises en évidence. Pour garantir un fonctionnement linéaire à l'ensemble du système, l'amplitude de la sinusoïde d'entrée doit se trouver obligatoirement en dessous de la courbe la plus basse. Dans le cas d'un signal quelconque, on définit ainsi une zone de linéarité à l'intérieur de laquelle doit se situer le spectre du signal d'entrée (figure 9.5).

Pour les mêmes raisons de commodité que dans le cas des diagrammes de Bode, on choisit de porter en ordonnée, le logarithme de chaque expression et en abscisse, la pulsation  $\omega$  selon une échelle logarithmique.

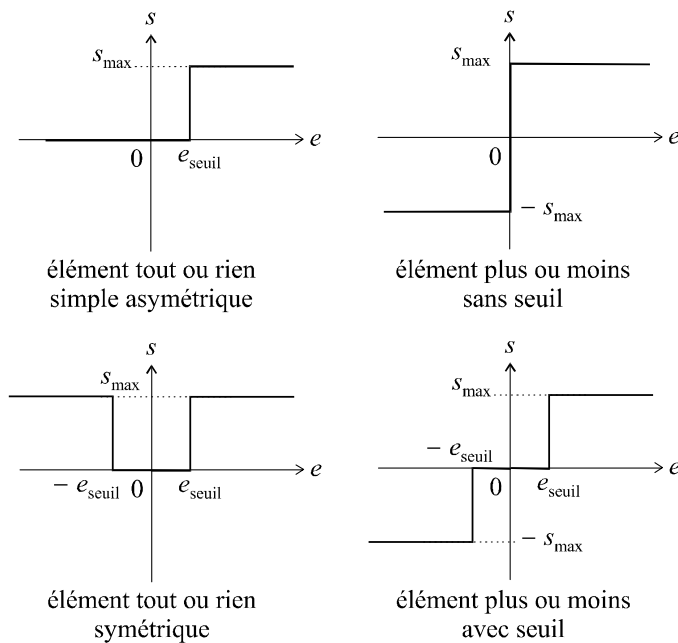
**Remarque :** D’une manière générale, les non linéarités peuvent apparaître en cas d’utilisation de signaux d’amplitude trop élevées. Elles peuvent aussi être mises en évidence à cause de signaux trop faibles. En effet, tous les systèmes génèrent des signaux parasites, plus ou moins aléatoires, dont la résultante est appelée le *bruit*. Si l’amplitude des signaux *utiles* est largement supérieure au niveau de bruit, ce phénomène est sans conséquence. Dans le cas contraire, le fonctionnement des systèmes est fortement perturbé voire complètement imprévisible. On adjoint donc souvent au diagramme de linéarité une contrainte supplémentaire qui consiste à exiger des signaux qu’ils possèdent une amplitude nettement plus importante que le niveau de bruit.

### 9.3 CARACTÉRISTIQUES DE CERTAINS ORGANES NON LINÉAIRES

Hormis le phénomène de saturation, certains systèmes ou éléments d’un système sont caractérisés par un fonctionnement non linéaire, de part leur conception, leurs limitations technologiques ou, plus simplement, leur principe même de fonctionnement.

#### 9.3.1 Systèmes tout ou rien

Les systèmes dits à fonctionnement tout ou rien sont caractérisés par une sortie ne pouvant prendre que deux (parfois trois) valeurs distinctes. La valeur de la sortie est en général déterminée par l’intervalle dans lequel se trouve la valeur d’entrée. En fonction de la forme de la caractéristique, ces systèmes peuvent être appelés plus ou moins, avec ou sans seuil (voir figure 9.6).



**Figure 9.6** Caractéristiques d’organes tout ou rien.

Les relais électriques, qui sont des organes de commande fréquemment utilisés, possèdent des caractéristiques de ce type.

### 9.3.2 Systèmes à hystérésis

L'hystérésis est le phénomène qui caractérise les systèmes qui possèdent deux caractéristiques distinctes en fonction du sens de variation du signal d'entrée : lorsque le signal croît, le point de fonctionnement du système se déplace sur une de ces courbes. Lorsqu'il décroît, il se déplace sur l'autre. Ces courbes sont repérées, sur la caractéristique, par l'adjonction du sens de variation (figure 9.7).

Dans les organes mécaniques, la présence de jeu dans certaines pièces, est susceptible de générer des fonctionnements avec hystérésis.

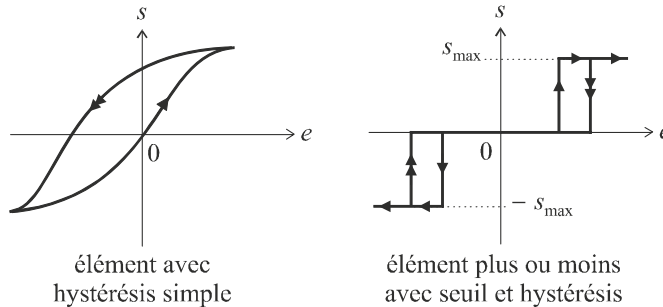


Figure 9.7 Caractéristiques d'organes avec hystérésis.

**Remarque :** Les organes présentant des non linéarités qui se traduisent par la présence, en sortie, de quelques valeurs discrètes (éléments tout ou rien ou plus ou moins) sont encore appelées non linéarités de type relais.

### 9.3.3 Caractéristiques complexes

Bon nombre de dispositifs possèdent des caractéristiques complexes qui présentent à la fois des phénomènes de seuil, de saturation ou autres singularités. Le meilleur exemple que l'on puisse mentionner est la vanne hydraulique dont le signal d'entrée est l'angle d'ouverture et le signal de sortie, le débit du fluide qu'elle est censée laisser passer.

Pour des angles petits (chacun en a déjà fait l'expérience), la vanne ne réagit pas : c'est le phénomène de seuil. À partir d'un certain angle, le fluide commence à passer, mais il n'y a pas obligatoirement proportionnalité entre l'angle et le débit : la caractéristique n'est pas une droite. Plus l'angle augmente et plus le débit augmente ; mais à partir d'une certaine valeur de l'angle, le débit devient maximal, même si on continue à tourner la vanne. L'élément sature.

Si on diminue à nouveau l'angle, le jeu mécanique est responsable d'un phénomène d'hystérésis : le débit ne recommence à décroître que lorsque l'on a « rattrapé » le jeu mécanique.

La figure 9.8 illustre le fonctionnement de cette vanne.

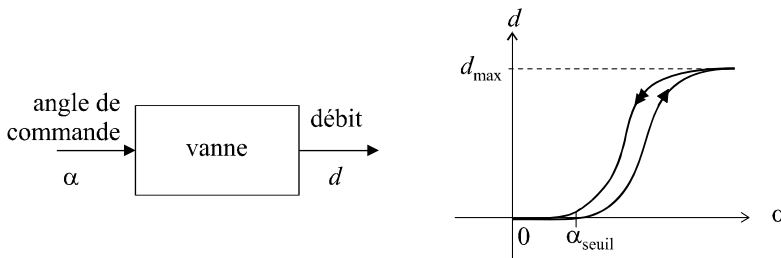


Figure 9.8 Caractéristique d'une vanne.



## 9.4 ASSERVISSEMENTS NON LINÉAIRES SÉPARABLES

Considérons une boucle d’asservissement comportant plusieurs éléments dont certains peuvent être pourvus d’un modèle de fonctionnement linéaire et dont les autres seront considérés comme non linéaires.

Le système est considéré comme séparable s’il est possible d’isoler, dans le modèle de fonctionnement global de la boucle, les éléments linéaires possédant une fonction de transfert, d’une part, et les éléments possédant une caractéristique  $s = f(e)$  non linéaire et indépendante de la fréquence, d’autre part.

Le modèle de boucle d’asservissement non linéaire usuellement adopté consiste à isoler la non linéarité dans la chaîne directe, immédiatement après le soustracteur, sous la forme d’une fonction  $x = N(\varepsilon)$  correspondant à la caractéristique non linéaire identifiée. L’amplitude du signal de sortie  $x$  ne dépend que de l’amplitude du signal d’entrée  $\varepsilon$ .

La figure 9.9 présente le modèle général de cette boucle.

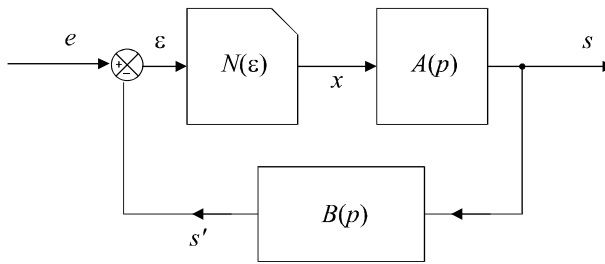


Figure 9.9 Schéma général d’une boucle d’asservissement non linéaire.

Ce système est régi par les équations suivantes :

$$x = N(\varepsilon)$$

$$S(p) = A(p)X(p)$$

$$S'(p) = B(p)S(p)$$

et :

$$\varepsilon(p) = E(p) - B(p)S(p)$$

Si un élément non linéaire est placé en un autre endroit de la boucle, il est nécessaire, pour que les méthodes d’étude que nous allons aborder ultérieurement soient applicables, de transformer le schéma de la boucle pour le ramener en amont de la chaîne direct.

Considérons par exemple, la boucle représentée sur la figure 9.10.

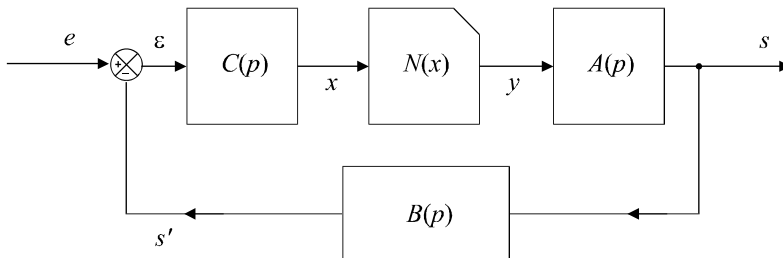


Figure 9.10 Schéma d’une boucle d’asservissement non linéaire à transformer.

La méthode consiste à transformer cette boucle en préservant d'une part l'intégrité de l'élément non linéaire qui sera placé immédiatement derrière le soustracteur et d'autre part la loi de fonctionnement du système, autrement dit l'expression de  $S(p)$ .

On commence la construction de ce nouveau schéma équivalent au premier en plaçant l'élément  $N(x)$  derrière le soustracteur tout en prévoyant un retour unitaire (figure 9.11).

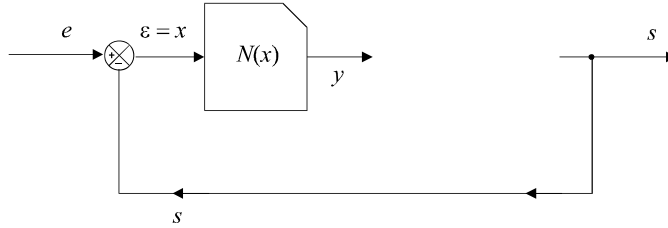


Figure 9.11 Première étape de la construction du schéma équivalent.

À partir de ce schéma incomplet, on peut déjà écrire :

$$X(p) = E(p) - S(p)$$

Ce qui n'est bien évidemment pas conforme au schéma initial dans lequel on avait :

$$X(p) = C(p)\varepsilon(p) = C(p)[E(p) - B(p)S(p)]$$

soit :

$$X(p) = C(p)E(p) - C(p)B(p)S(p)$$

Pour que le schéma de la figure 9.11 redevienne conforme à cette équation, il faut multiplier  $E(p)$  par  $C(p)$  et multiplier le signal  $S(p)$  par  $B(p)C(p)$  (figure 9.12).

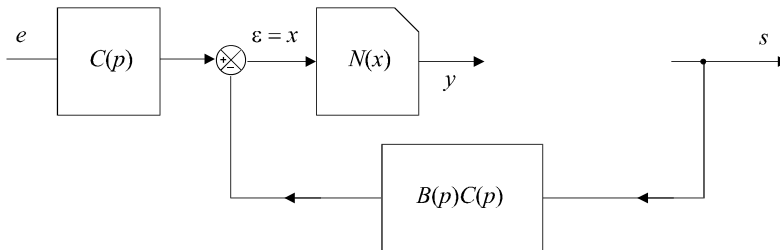


Figure 9.12 Deuxième étape de la construction du schéma équivalent.

On complète alors le schéma avec l'élément qui lie le signal  $y$  à la sortie, élément qui lui, reste inchangé. La figure 9.13 correspond maintenant au schéma équivalent recherché.

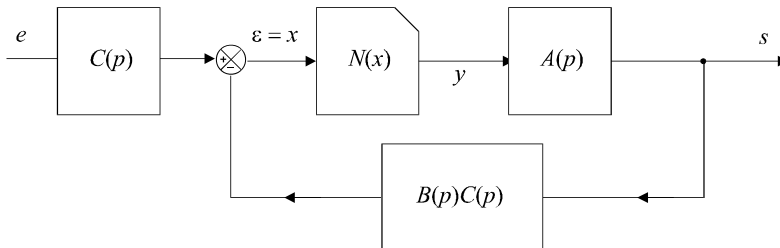


Figure 9.13 Dernière étape de la construction du schéma équivalent.

## 9.5 ÉTUDE D'UN SYSTÈME SÉPARABLE PAR LA MÉTHODE DU PREMIER HARMONIQUE

Une fois un système non linéaire séparé, il est possible d'appliquer la méthode dite du premier harmonique pour aboutir à des mises en équation, donc à des conditions d'études, similaires à celles déjà abordées dans le cas des systèmes linéaires.

Le système est considéré comme séparable s'il est possible d'isoler, dans le modèle de fonctionnement global de la boucle, les éléments linéaires possédant une fonction de transfert, d'une part, et les éléments possédant une caractéristique  $s = f(e)$  non linéaire et indépendante de la fréquence, d'autre part. Dans l'étude qui suit, nous considérerons donc des systèmes pouvant être placés sous la forme correspondant au schéma de la figure 9.14.

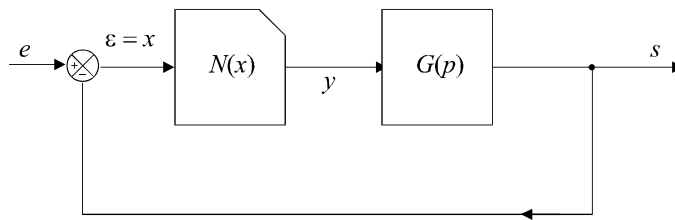


Figure 9.14 Système non linéaire séparable.

### 9.5.1 Principe

Il est très facile d'identifier l'une des principales différences entre le fonctionnement d'un système linéaire et celui d'un système non linéaire. À une entrée sinusoïdale, le premier est caractérisé par une réponse sinusoïdale de même pulsation mais d'amplitude différente et présentant en général, un déphasage par rapport à l'entrée, ce que matérialise la notion de gain complexe  $G(j\omega) = G(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$ . Pour une même entrée sinusoïdale, le système non linéaire fournira une réponse périodique de même période que la sinusoïde d'entrée, mais non sinusoïdale, à l'instar de ce qui est démontré pour le cas d'une saturation sur la figure 9.2.

D'une manière générale, si on injecte un signal sinusoïdal  $x(t) = x_0 \sin \omega t$  à l'entrée de l'élément non linéaire  $N(x)$ , le signal de sortie  $y(t)$  pourra donc se décomposer en série de Fourier. Nous supposons, pour simplifier la présentation, que cette décomposition se limite à :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n \sin (n\omega t + \varphi_n)$$

La méthode du premier harmonique consiste à approcher l'expression du signal de sortie  $y(t)$  en ne retenant que le terme d'ordre 1,

soit : 
$$y(t) \sim y_1 \sin (\omega t + \varphi_1)$$

### 9.5.2 Gain complexe équivalent

En adoptant l'approximation du premier harmonique, on peut définir le concept de gain complexe équivalent de l'élément non linéaire. Le rapport des amplitudes entre la sinusoïde d'entrée et l'approximation sinusoïdale en sortie étant égale à  $y_1/x_0$  et le déphasage entre elles valant  $\varphi_1$ , on peut écrire, tout en considérant que ces deux grandeurs, gain et déphasage, varient en fonction de  $\omega$  et de  $x_0$  :

$$N(x_0, \omega) = \frac{y_1}{x_0}(x_0, \omega) e^{j\varphi_1(x_0, \omega)}$$

Pour de nombreux éléments non linéaires, dont font partie les non-linéarités discontinues sans inertie, autrement dit les dispositifs de type relais, ce gain complexe équivalent ne dépend que de l'amplitude du signal d'entrée et non de sa fréquence.

On a, dans ce cas : 
$$N(x_0) = \frac{y_1}{x_0} e^{j\varphi_1(x_0)} = G_1(x_0) e^{j\varphi_1(x_0)}$$

Nous nous intéresserons uniquement, dans la suite de l'étude, à ce type de non-linéarités.

### 9.5.3 Notion de lieu critique

Le lieu critique d'un dispositif non linéaire est défini par le tracé, dans le plan complexe, du lieu en coordonnées polaires des points M d'affixes  $-\frac{1}{N(x_0)}$  lorsque  $x_0$  varie.

**Remarque :** Le choix de cette grandeur trouvera sa justification dans les pages qui suivent.

L'intervalle de variation doit être déterminé avec soin. En effet l'influence de la non-linéarité n'apparaît pas obligatoirement pour toutes les valeurs de  $x_0$ . Dans le cas de la saturation d'un amplificateur, par exemple, un fonctionnement linéaire peut être observé pour de faibles valeurs de  $x_0$ . Le lieu critique, dans ces conditions, ne se tracera que sur l'intervalle  $[\alpha, +\infty]$  où  $\alpha$  est la valeur seuil de  $x_0$  à partir de laquelle se produit le phénomène de saturation.

### 9.5.4 Exemple

Considérons un relais parfait à l'entrée duquel on injecte un signal sinusoïdal  $x(t) = x_0 \sin \omega t$  (figure 9.15). Le signal de sortie  $y(t)$  est un signal carré de même fréquence et d'amplitude  $s_{\max}$ .

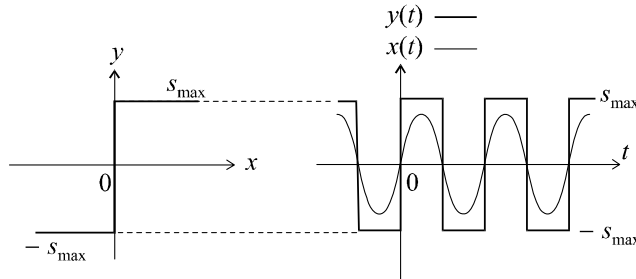


Figure 9.15 Fonctionnement du relais parfait.

La décomposition en série de Fourier de ce signal carré nous est facilement donnée par un calcul simple (voir chapitre 2) :

$$y(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4s_{\max}}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)\omega t$$

L'approximation du premier harmonique nous donne :

$$y(t) \approx \frac{4s_{\max}}{\pi} \sin \omega t$$

On a alors :

$$N(x_0) = \frac{4s_{\max}}{\pi x_0} \Rightarrow -\frac{1}{N(x_0)} = -\frac{\pi x_0}{4s_{\max}}$$

Il convient, avant de tracer le lieu critique, de déterminer avec précision l'intervalle de variation de  $x_0$ . En effet, ici, la non-linéarité a une influence dès que  $x_0 > 0$ . Le lieu critique se trace alors aisément en faisant varier  $x_0$  de 0 à  $+\infty$ . Ce lieu n'est autre que le demi-axe réel correspondant aux parties réelles négatives.

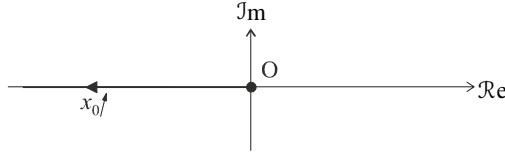


Figure 9.16 Lieu critique du relais parfait.

### 9.5.5 Justification de la méthode du premier harmonique

Les systèmes non linéaires séparables peuvent être mis, nous l'avons vu, sous la forme schématique présentée sur la figure 9.14. Dans la plupart des cas, la fonction de transfert linéaire  $G(p)$  se comporte comme un filtre passe-bas, donc comme un atténuateur aux hautes fréquences. Ainsi, l'erreur commise en assimilant le signal  $y(t)$  à son premier harmonique se trouve, de fait, considérablement atténuée ; en effet, la composante utile du signal, si on considère la globalité de la chaîne de régulation, reste, la plupart du temps, dans les basses fréquences.

### 9.5.6 Méthode de calcul approché du gain complexe équivalent

On peut s'affranchir du calcul de la décomposition en série de Fourier pour déterminer une approximation de l'amplitude du premier harmonique, dans le cas de certaines non-linéarités. La méthode de Cypkin, outre le fait qu'elle permet d'accéder rapidement à la fonction  $N(x_0)$ , permet également de concevoir des éléments non linéaires pour qu'ils présentent telle ou telle fonction  $N(x_0)$ . Elle sert donc à la fois à l'analyse des systèmes et à leur synthèse.

Selon Cypkin, le gain complexe équivalent d'un élément non linéaire possédant une caractéristique  $y = f(x)$  à symétrie impaire et univoque (cas le plus fréquent) peut être approché par la relation :

$$N(x_0) = \frac{2}{3x_0} \left[ f(x_0) + f\left(\frac{x_0}{2}\right) \right]$$

## EXERCICES

### 9.1 Séparation d'un système non-linéaire comportant une saturation interne

On considère le système représenté sur la figure 9.17.

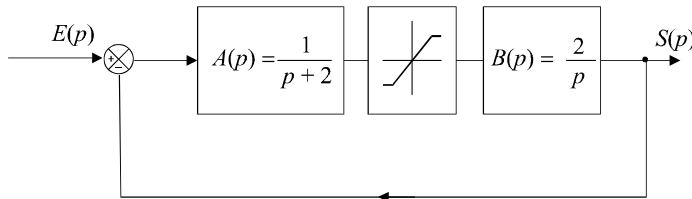
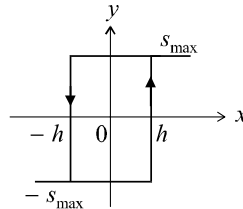


Figure 9.17 Système non linéaire séparable.

Construire un schéma équivalent où l'élément non linéaire est séparé des éléments linéaires et placé immédiatement après le soustracteur et où la boucle est à retour unitaire.

### 9.2 Gain équivalent et lieu critique d'un relais sans seuil et avec hystérésis

On considère un relais sans seuil et présentant un hystérésis (figure 9.18).

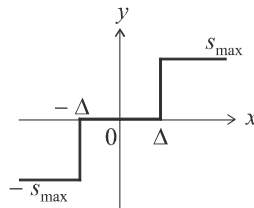


**Figure 9.18** Caractéristique d'un relais sans seuil avec hystérésis.

Déterminer le gain équivalent de ce dispositif et tracer son lieu critique.

### 9.3 Gain équivalent et lieu critique d'un relais avec seuil et sans hystérésis

On considère un relais sans hystérésis et présentant un seuil  $2\Delta$  (figure 9.19).

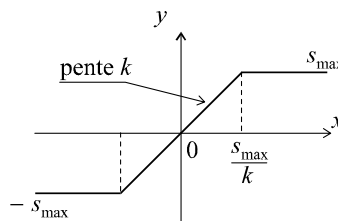


**Figure 9.19** Caractéristique d'un relais avec seuil et sans hystérésis.

Déterminer le gain équivalent de ce dispositif et tracer son lieu critique.

### 9.4 Gain équivalent et lieu critique d'un élément saturant

On considère un dispositif saturant de pente  $k$  dont la caractéristique est donnée sur la figure 9.20.

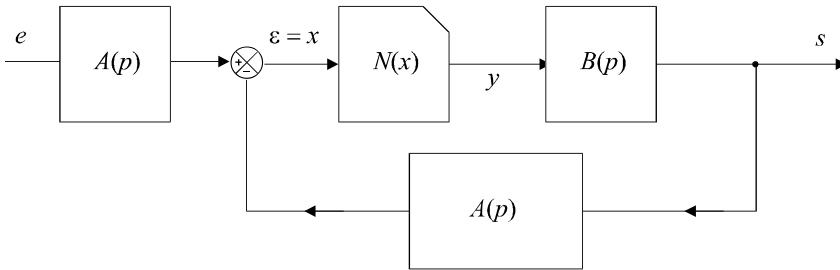


**Figure 9.20** Caractéristique d'une saturation.

Déterminer le gain équivalent de ce dispositif et tracer son lieu critique.

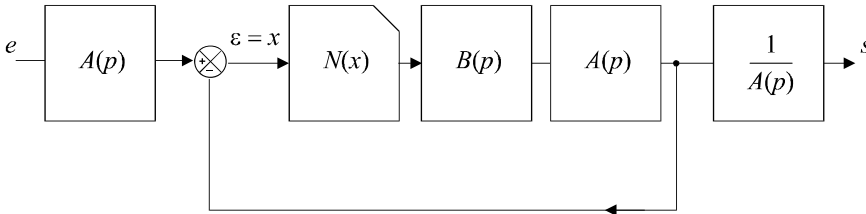
## SOLUTIONS

**9.1** Utilisons la méthode de transformation étudiée dans le cours. L'élément non linéaire est placé en amont de la chaîne directe. On obtient le schéma de la figure 9.21.



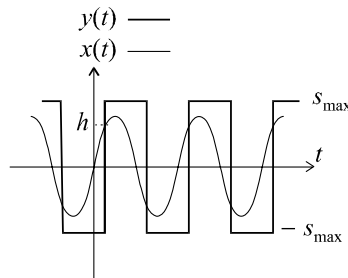
**Figure 9.21** Première étape de la construction du schéma équivalent.

Il reste à transformer ce schéma pour que le retour soit unitaire. Utilisons pour cela les méthodes étudiées au chapitre 5. Incluons  $A(p)$  dans la chaîne directe et corrigeons, en sortie, par un système de fonction de transfert  $1/A(p)$  afin de laisser le signal  $s$  inchangé (figure 9.22).



**Figure 9.22** Schéma équivalent séparé.

**9.2** Étudions tout d'abord la forme du signal de sortie de cet élément, soit  $y(t)$ , en fonction d'une sinusoïde d'entrée  $x(t) = x_0 \sin \omega t$ . La figure 9.23 présente le signal carré obtenu.



**Figure 9.23** Fonctionnement d'un relais sans seuil et avec hystérésis.

La décomposition en série de Fourier du signal carré  $y(t)$  ne pose pas de problème particulier. Si le signal carré n'était pas déphasé par rapport à  $x(t)$ , on pourrait utiliser le résultat établi au paragraphe 9.5.4, à savoir l'approximation du

premier harmonique de  $y(t)$  :

$$y(t) \approx \frac{4s_{\max}}{\pi} \sin \omega t$$

Le gain équivalent serait donc :

$$\frac{y_1}{x_0} = \frac{4s_{\max}}{\pi x_0}$$

Ici, toutefois, le premier harmonique de  $y(t)$  va se trouver déphasé d'un angle  $\varphi$  par rapport à la sinusoïde d'entrée. Ce déphasage se traduit par un retard  $\tau$  tel que :

$$\sin \omega \tau = \frac{h}{x_0} \text{ avec } \omega \tau = -\varphi$$

On a donc :

$$N(x_0) = \frac{y_1}{x_0} e^{j\varphi} = \frac{4s_{\max}}{\pi x_0} e^{-j\omega\tau}$$

d'où :

$$-\frac{1}{N(x_0)} = -\frac{\pi x_0}{4s_{\max}} e^{j\omega\tau} = -\frac{\pi x_0}{4s_{\max}} (\cos \omega\tau + j \sin \omega\tau)$$

soit :

$$-\frac{1}{N(x_0)} = -\frac{\pi x_0}{4s_{\max}} e^{j\omega\tau} = -\frac{\pi x_0}{4s_{\max}} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{x_0}\right)^2} - j \frac{\pi h}{4s_{\max}}$$

Le lieu critique se trace ici pour  $x_0$  variant de  $h$  à  $+\infty$ . En effet, le signal de sortie reste nul si l'amplitude de la sinusoïde d'entrée est inférieure à  $h$ . Nous remarquons que la partie imaginaire du lieu est constante et négative et que sa partie réelle varie de  $0$  à  $-\infty$  lorsque  $x_0$  varie de  $h$  à  $+\infty$ . Il s'agit donc d'une demi-droite d'équation  $Y = -\frac{\pi h}{4s_{\max}}$  correspondant aux parties réelles négatives (figure 9.24).

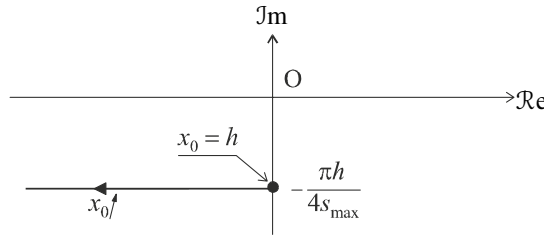


Figure 9.24 Lieu critique du relais avec hystérésis.

**9.3** Étudions tout d'abord la forme du signal de sortie de cet élément, soit  $y(t)$  en fonction d'une sinusoïde d'entrée  $x(t) = x_0 \sin \omega t$ . La figure 9.25 présente le signal obtenu, qui n'est pas un signal carré. En effet, il est nul pour  $-\Delta < x(t) < \Delta$ , vaut  $s_{\max}$  pour  $\Delta < x(t)$  et vaut  $-s_{\max}$  pour  $x(t) < -\Delta$ . Décomposons  $y(t)$  en série de Fourier. Soit  $\tau$  l'instant correspondant à la première commutation en sortie.

On a :

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{jn\omega t} \text{ avec } A_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-jn\omega t} dt$$

soit :

$$A_n = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{T/2-\tau} s(t) e^{-jn\omega t} dt - \frac{1}{T} \int_{T/2+\tau}^T s(t) e^{-jn\omega t} dt$$

$$A_n = \frac{s_{\max}}{-jn\omega T} \left[ e^{-jn\omega t} \right]_{\tau}^{T/2-\tau} + \frac{s_{\max}}{-jn\omega T} \left[ e^{-jn\omega t} \right]_{T/2+\tau}^T$$

$$A_n = \frac{j s_{\max}}{2\pi n} \left[ e^{-jn\omega(T/2-\tau)} - e^{-jn\omega\tau} \right] + \frac{j s_{\max}}{2\pi n} \left[ e^{-jn\omega T} - e^{-jn\omega(T/2+\tau)} \right]$$

En se limitant au premier harmonique, le calcul de  $A_1$  et de  $A_{-1}$  nous donne :

$$y(t) \approx A_1 e^{j\omega t} + A_{-1} e^{-j\omega t}$$



d'où l'on tire :

$$y_1 = \frac{4s_{\max}}{\pi} \cos \omega \tau$$

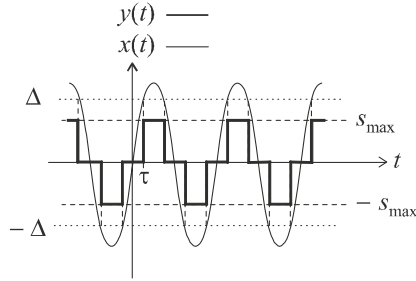


Figure 9.25 Fonctionnement d'un relais avec seuil et sans hystérésis.

Comme :

$$\sin \omega \tau = \frac{\Delta}{x_0}$$

on en déduit :

$$N(x_0) = \frac{4s_{\max}}{\pi x_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{x_0}\right)^2}$$

Par conséquent :

$$-\frac{1}{N(x_0)} = -\frac{\pi x_0}{4s_{\max}} \sqrt{\frac{x_0^2}{x_0^2 - \Delta^2}}$$

Cette fonction est réelle, strictement négative et lorsque  $x_0$  varie de  $\Delta$  à  $+\infty$ , elle croît de  $-\infty$  à un maximum  $-\frac{\pi \Delta}{2s_{\max}}$  pour  $x_0 = \Delta\sqrt{2}$ , puis décroît à nouveau vers  $-\infty$ . Sur le diagramme de la figure 9.26, nous avons représenté ce parcours du lieu critique en fonction de  $x_0$  croissant en le décalant légèrement de l'axe de manière à mieux visualiser le phénomène.

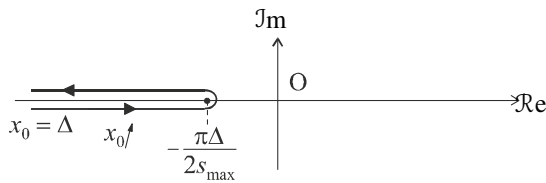


Figure 9.26 Lieu critique du relais avec seuil.

9.4 La caractéristique de l'élément saturant étant impaire et univoque, l'utilisation de l'approximation de Cypkin semble toute indiquée. Cette approximation n'est valable, bien évidemment que pour  $x_0 > \frac{s_{\max}}{k}$ .

En effet, pour  $x_0 < \frac{s_{\max}}{k}$ , on a :

$$N(x_0) = \frac{y_1}{x_0} = k$$

Pour  $\frac{s_{\max}}{k} < x_0 < \frac{2s_{\max}}{k}$ , on a :

$$N(x_0) = \frac{2}{3x_0} \left[ s_{\max} + \frac{kx_0}{2} \right] = \frac{2s_{\max}}{3x_0} + \frac{k}{3}$$

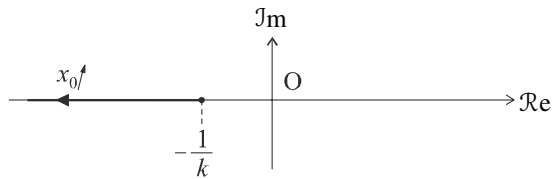
et pour  $x_0 > \frac{2s_{\max}}{k}$ , on a :

$$N(x_0) = \frac{2}{3x_0} [s_{\max} + s_{\max}] = \frac{4s_{\max}}{3x_0}$$

On en déduit donc :

$$\begin{cases} -\frac{1}{N(x_0)} = -\frac{1}{k} & \text{pour } x_0 < \frac{s_{\max}}{k} \\ -\frac{1}{N(x_0)} = -\frac{1}{\frac{2s_{\max}}{3x_0} + \frac{k}{3}} & \text{pour } \frac{s_{\max}}{k} < x_0 < \frac{2s_{\max}}{k} \\ -\frac{1}{N(x_0)} = -\frac{3x_0}{4s_{\max}} & \text{pour } x_0 > \frac{2s_{\max}}{k} \end{cases}$$

Le lieu critique est formé de trois segments de droite qui forment un graphe continu. Ainsi, lorsque  $x_0$  varie de 0 à  $+\infty$ , le lieu critique décrit une demi-droite portée par le demi-axe des parties réelles négatives, partant de  $-1/k$  vers  $-\infty$  (figure 9.27).



**Figure 9.27** Lieu critique d'une saturation.

## Chapitre 10

# Méthodes d'étude des asservissements continus non linéaires

### 10.1 STABILITÉ DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES

Il n'existe malheureusement pas de méthode standard pour étudier les systèmes non linéaires. Chaque dispositif possède pratiquement sa propre méthode d'étude. Sans avoir la prétention d'établir une liste exhaustive des techniques existantes, nous proposons au lecteur de découvrir ici les méthodes les plus fréquemment rencontrées. Il n'est pas question d'acquérir une grande technicité pour chacune d'entre elles, mais plutôt d'être sensibilisé à la grande variété des méthodes d'étude.

#### 10.1.1 Fonction de transfert généralisée

Considérons, sur la figure 10.1, le schéma général d'un asservissement non linéaire séparable. On définit la fonction de transfert généralisée de ce système en boucle fermée par :

$$H(p) = \frac{N(\varepsilon)G(p)}{1 + N(\varepsilon)G(p)}$$

Sa fonction de transfert en boucle ouverte étant  $N(\varepsilon)G(p)$ .

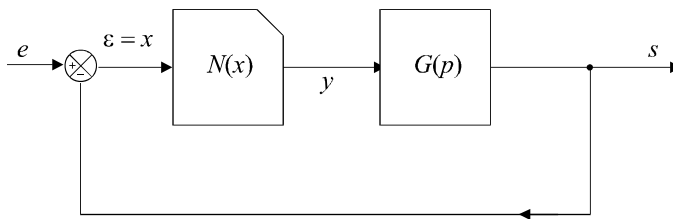


Figure 10.1 Système non linéaire séparable.

En généralisant le critère fondamental de stabilité, on peut affirmer que le système est stable en boucle fermée si et seulement si le dénominateur de  $H(p)$  ne possède aucune racine à partie réelle positive. L'étude graphique qui consistait à étudier la stabilité d'un système dans le plan de Nyquist à partir du critère du revers, dans le cas où la fonction de transfert en boucle ouverte ne possède que des pôles à partie réelle positive peut être également généralisée. Le critère du revers, en régime linéaire, permettait de diagnostiquer la stabilité en fonction de la position de  $G(p)$  par rapport au point critique  $-1$ . La forme du nouveau dénominateur nous suggère ici d'étudier cette stabilité par rapport à  $-1/N(\varepsilon)$ .

### 10.1.2 Principe de l'étude

Lorsque le système évolue en boucle fermée, l'écart  $\varepsilon$  évolue dans le temps. Le point critique nouvellement défini,  $-1/N(\varepsilon)$ , est donc susceptible de parcourir le lieu critique défini au chapitre précédent. En traçant sur le même plan complexe, le lieu critique  $-1/N(\varepsilon)$  et le diagramme de Nyquist de  $G(p)$ , on pourra conclure à la stabilité du système en boucle fermée si le lieu de Nyquist de  $G(p)$  ne coupe jamais le lieu critique et passe toujours, systématiquement à gauche de celui-ci lorsque l'on décrit le diagramme de Nyquist dans le sens des  $\omega$  croissants. La figure 10.2 illustre ce critère général de stabilité d'un système non linéaire.

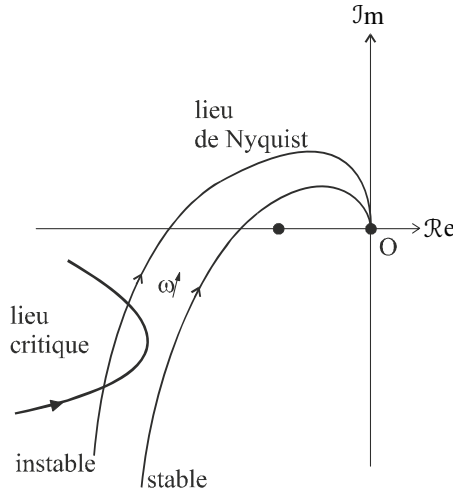


Figure 10.2 Critère de stabilité d'un système non linéaire.

### 10.1.3 Exemple

Considérons le système représenté sur la figure 10.3 avec :

$$G(p) = \frac{10^4}{p(p+10)(p+100)}$$

Le diagramme de Nyquist de ce système linéaire a été étudié dans l'exercice 3.6. L'élément non linéaire est une saturation simple de pente  $k$  déjà étudiée dans l'exercice 9.4.

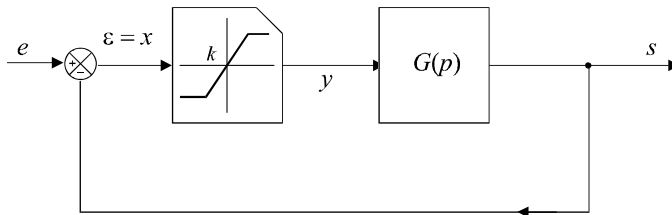


Figure 10.3 Système non linéaire comportant une saturation.

Il nous est facile de rassembler les différentes informations obtenues, courbe de Nyquist et lieu critique, pour mettre en évidence l'influence de la non linéarité sur la stabilité du système complet en boucle fermée (figure 10.4).

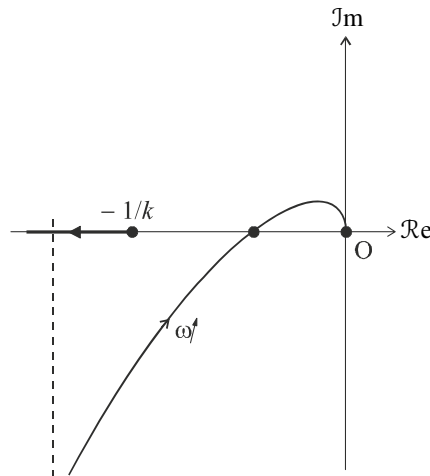


Figure 10.4 Diagramme de Nyquist et lieu critique du système.

Calculons l'abscisse du point de concours A du lieu de Nyquist de  $G(p)$  avec l'axe réel. On a :

$$\varphi(\omega_\pi) = -\pi = -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega_\pi}{10} - \arctan \frac{\omega_\pi}{100}$$

soit :

$$\omega_\pi = \sqrt{1\,000} \text{ rad/s} = 31,6 \text{ rad/s}$$

On en déduit donc :

$$G(\omega_\pi) = \frac{10^4}{\omega_\pi \sqrt{\omega_\pi^2 + 100} \sqrt{\omega_\pi^2 + 10^4}} = 0,091$$

L'abscisse du point A est donc égale à  $-0,091$ . Nous pouvons donc en déduire que le système est inconditionnellement stable si :

$$\frac{1}{k} > 0,091 \Rightarrow k < 11$$

Si ce n'est pas le cas, l'analyse du diagramme nous montre que le système est susceptible d'être instable si le point de fonctionnement, sur le lieu critique, est situé à droite du point A, autrement dit, compte tenu du sens de graduation du lieu critique, pour de faibles valeurs de  $\varepsilon$ . Il existe donc une valeur seuil  $\varepsilon_s$  en dessous de laquelle le système devient instable. Cette constatation n'est pas pour nous rassurer, compte tenu que l'objectif d'une boucle de régulation consiste à faire converger l'écart vers une valeur nulle, ou en tout cas, la plus petite possible.

On peut facilement imaginer le phénomène qui ne manquera pas d'apparaître si on ne s'assure pas que  $k < 11$  : lors de la mise en route du système, un écart  $\varepsilon$  important assurera la stabilité du système qui va donc converger vers 0. En franchissant la valeur  $\varepsilon_s$ , le système devient instable et l'écart aura donc tendance à augmenter à nouveau, donc à redevenir stable. On imagine sans peine que l'état du système va osciller entre stabilité et instabilité temporaires : c'est le phénomène de pompage.

Nous venons de mettre en évidence l'un des phénomènes les plus fréquents liés à la présence d'un élément non linéaire dans une chaîne de régulation : la présence d'oscillations spontanées qui, bien évidemment, sont en général inacceptables.

## 10.2 MÉTHODE D'ÉTUDE PAR LE LIEU DE CYPKIN

La méthode du lieu de Cypkin est une méthode d'étude plus fine que celle du premier harmonique qui permet donc d'obtenir des résultats plus précis, mais qui ne s'applique qu'aux non linéarités de type relais.

### 10.2.1 Principe

Considérons le schéma fonctionnel de la figure 10.5. En sortie d'un élément non linéaire de type relais, le signal  $y(t)$  est en général un signal carré. Si on suppose que la non linéarité est symétrique, on peut écrire :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

On a donc :

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n G(n\omega) \sin[n\omega t + \varphi_n + \varphi(n\omega)]$$

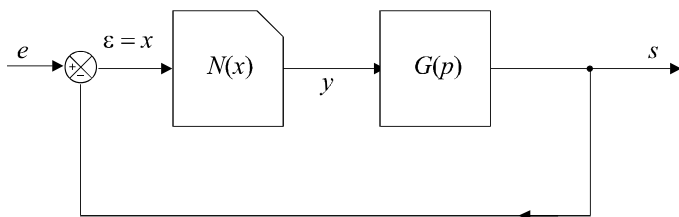


Figure 10.5 Système non linéaire.

La technique consiste à étudier le comportement du système lorsqu'il est le siège d'oscillations autonomes de pulsation  $\omega$  correspondant à une période  $T = 2\pi/\omega$ .

Dans un premier temps, on cherche à identifier les instants auxquels se produit la commutation de l'élément non linéaire. À partir de la connaissance de ces instants, on exprime les conditions de commutation en fonction de  $\varepsilon$  et de sa dérivée première  $d\varepsilon/dt$ . Il faut noter que ces deux grandeurs s'exprimeront en fonction de  $\omega$  puisque les signaux sont périodiques de période  $T = 2\pi/\omega$ .

On traduit ensuite géométriquement ces conditions dans le plan complexe. Pour ce faire, on définit une expression complexe  $\Gamma(\omega)$  telle que :

$$\Gamma(\omega) = \frac{1}{\omega} \frac{d\varepsilon}{dt} + j\varepsilon$$

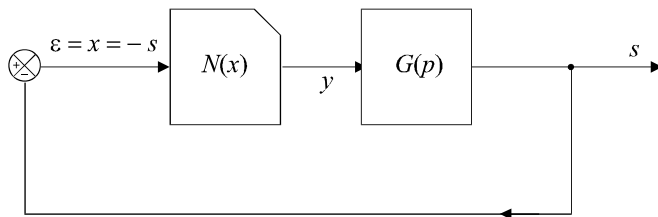


Figure 10.6 Système non linéaire en régime autonome.

Puisque l'on étudie le système en régime autonome (figure 10.6), on aura également :

$$\Gamma(\omega) = -\frac{1}{\omega} \frac{ds}{dt} - js$$

On trace alors, dans le plan complexe, le lieu des points d'affixe  $\Gamma(\omega)$  lorsque  $\omega$  varie de 0 à  $+\infty$ . La courbe obtenue est appelée lieu de Cypkin. On trace sur le même diagramme la droite d'équation  $\varepsilon = \varepsilon_s$  où  $\varepsilon_s$  est la valeur seuil correspondant à la première commutation observable.

Le système est le siège d'oscillations spontanées si et seulement si il existe au moins un point d'intersection entre le lieu de Cypkin et la droite d'équation  $\varepsilon = \varepsilon_s$ .

La présence d'oscillations ne signifie pas obligatoirement qu'il y a instabilité du système au sens de la divergence de son état, donc de sa destruction probable. Cypkin a montré que les oscillations spontanées restent stables (elles restent bornées) si l'intersection entre  $\Gamma(\omega)$  et la droite  $\varepsilon = \varepsilon_s$  se fait de bas en haut lorsque  $\Gamma(\omega)$  est parcourue dans le sens des  $\omega$  croissants. Dans le cas contraire, le système sera instable.

### 10.2.2 Exemple

On choisit d'étudier l'apparition d'oscillations spontanées dans le système autonome de la figure 10.6 dans lequel l'élément non linéaire est un relais à seuil nul présentant un hystérésis (figure 10.7) et dont l'élément linéaire possède une fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{10}{p(p+1)}$$

On suppose qu'à l'instant  $t = 0$ , on a :

$$\varepsilon(0) = h \text{ et } \frac{d\varepsilon}{dt}(0) > 0$$

Sur la caractéristique de la figure 10.7, le point de fonctionnement se situe donc sur le seuil de commutation :

$$y(t) : 0 \rightarrow y_{\max}$$

Tous les instants  $t_k$  de commutation peuvent être facilement identifiés : le système commute à chaque demi-période du signal d'entrée,

soit :

$$t_k = \frac{k\pi}{\omega}$$

Les conditions de commutation dépendent bien évidemment de la valeur de  $\varepsilon$ . Ainsi, le premier instant de commutation  $t_1 = \pi/\omega$  correspondra au franchissement par  $\varepsilon$  du seuil  $-h$ ,  $\varepsilon$  étant décroissant en fonction du temps.

On a donc :

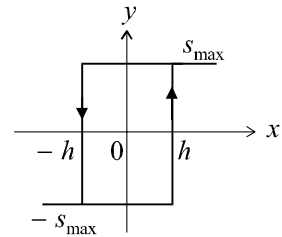
$$\varepsilon\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -h \text{ et } \frac{d\varepsilon}{dt}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) < 0$$

D'une manière générale :

$$\varepsilon\left(\frac{k\pi}{\omega}\right) = (-1)^k h \text{ et } (-1)^k \frac{d\varepsilon}{dt}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) > 0$$

Comme  $y(t)$  est un signal carré, on a :

$$y(t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4s_{\max}}{(2n+1)\pi} \sin(2n+1)\omega t$$



**Figure 10.7** Caractéristique d'un relais à seuil nul avec hystérésis.

**Remarque :** Le signe moins est volontairement introduit pour que  $\varepsilon(t)$  n'en ait pas, ce qui est conforme avec le fait qu'il soit croissant à l'instant  $t = 0$ .

Par ailleurs,  $\varepsilon(t) = -s(t)$

d'où : 
$$\varepsilon(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4s_{\max}}{(2n-1)\pi} G((2n-1)\omega) \sin [(2n-1)\omega t + \varphi((2n-1)\omega)]$$

et : 
$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4s_{\max}\omega}{\pi} G((2n-1)\omega) \cos [(2n-1)\omega t + \varphi((2n-1)\omega)]$$

Remplaçons  $G((2n-1)\omega)$  par  $\frac{10}{(2n-1)\omega\sqrt{(2n-1)^2\omega^2+1}}$ , et  $\varphi((2n-1)\omega)$  par  $-\frac{\pi}{2} - \arctan(2n-1)\omega$

puis calculons  $\varepsilon\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$  et  $\frac{1}{\omega} \frac{d\varepsilon}{dt}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$  :

$$y\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4s_{\max}}{(2n-1)\pi} \frac{10}{(2n-1)\omega\sqrt{(2n-1)^2\omega^2+1}} \cos [\arctan(2n-1)\omega]$$

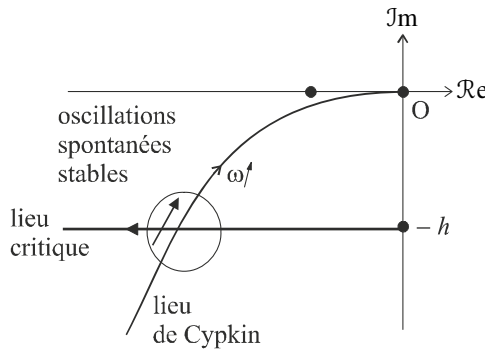
$$\frac{1}{\omega} \frac{d\varepsilon}{dt}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4s_{\max}}{\pi} \frac{10}{(2n-1)\omega\sqrt{(2n-1)^2\omega^2+1}} \sin [\arctan(2n-1)\omega]$$

Il s'agit à présent de tracer le lieu des points d'affixe :

$$\Gamma(\omega) = \frac{1}{\omega} \frac{d\varepsilon}{dt} + j\varepsilon$$

lorsque  $\omega$  varie de 0 à  $+\infty$ .

**Remarque :** Le lecteur comprendra aisément qu'il est extrêmement difficile de tracer un tel lieu à partir des expressions précédentes. Il existe différentes techniques permettant de l'obtenir. Parmi ces techniques, sur lesquelles nous ne nous attarderons pas, on peut retenir des méthodes de calcul numérique par ordinateur qui permettent d'obtenir directement le diagramme de la figure 10.8.



**Figure 10.8** Étude de la stabilité du système par le lieu de Cypkin.

L'examen du diagramme nous montre une intersection entre le lieu de Cypkin et le lieu critique. Le système est donc susceptible d'être le siège d'oscillations. Toutefois, elles resteront bornées compte tenu du fait que le lieu de Cypkin coupe le lieu critique de bas en haut.



## 10.3 MÉTHODE DU PLAN DE PHASE

La méthode du plan de phase est spécifiquement adaptée à l'étude des systèmes d'ordre deux comportant une non linéarité. Il s'agit d'une méthode d'analyse graphique et temporelle de l'évolution du système. La technique retenue s'apparente beaucoup à la représentation d'état que nous étudierons à partir du chapitre 14.

### 10.3.1 Principe

On considère un système linéaire d'ordre deux régi par une équation différentielle que l'on écrit sous la forme :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \text{ ou encore : } \ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

Si on pose  $y = \dot{x}$  et  $\dot{y} = f(x, y)$ , il est possible de considérer que le couple  $(x, y)$  représente, dans un plan, les coordonnées d'un point M qui caractérise l'état du système à un instant  $t$ . L'état du système est en effet entièrement connu grâce à ces deux grandeurs puisque la dérivée seconde est une fonction de  $x$  et de  $\dot{x}$ . Au cours du temps, le point M de coordonnées  $(x, y)$  évolue selon une courbe que l'on appelle la trajectoire de phase du système. La courbe sur laquelle évolue le système dépend bien évidemment des conditions initiales (donc des valeurs  $x(0)$  et  $\dot{x}(0)$ ) qui déterminent le point de départ  $M_0$  de la trajectoire. A un système est donc associé un ensemble de trajectoires possibles.

L'étude de la forme et des points singuliers des trajectoires de phase du système renseigne sur ses performances. Cette étude est menée en régime autonome, c'est-à-dire en l'absence de signal de consigne.

### 10.3.2 Tracé des trajectoires

#### a) Méthode des isoclines

Pour tracer les trajectoires de phase du système, on a recours à des courbes intermédiaires appelées isoclines. Ces courbes sont définies par :

$$\frac{dy}{dx} = C^{\text{te}}$$

Les isoclines sont donc des lieux qui possèdent la propriété de présenter, en tout point, une tangente à la trajectoire qui est constante. Autrement dit, toutes les trajectoires coupent une isocline selon le même angle.

L'intérêt de ces isoclines réside dans le fait qu'elles sont très simples à tracer et qu'elles fournissent suffisamment de renseignements graphiques pour tracer les trajectoires qui elles, peuvent être relativement délicates à mettre en évidence directement. La technique est la suivante :

En posant :  $\frac{dy}{dx} = \lambda$ , on détermine l'équation de l'isocline  $y(x)$ .

On trace alors dans le plan de phase plusieurs isoclines correspondant à quelques valeurs de  $\lambda$  (des entiers relatifs par exemple) et on trace, en plusieurs points de l'isocline, des petits segments matérialisant la valeur de  $\lambda$ . Ainsi, on matérialise les tangentes des trajectoires aux points où elles coupent l'isocline. À partir de ces éléments graphiques et avec un peu d'intuition, il est possible d'accéder au tracé des trajectoires.

#### b) Exemple

Considérons, pour l'exemple, le système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{1}{p(p+1)}$  placé dans une boucle à retour unitaire.

**Remarque :** Ce système est linéaire mais il s'agit juste ici d'un exemple destiné à bien comprendre la méthode de tracé.

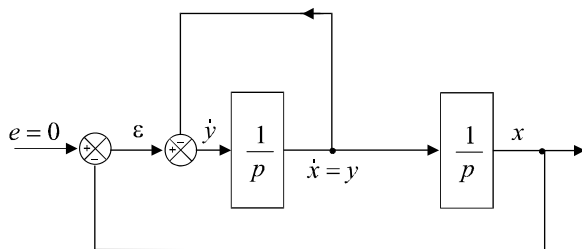


Figure 10.9 Schéma équivalent du système.

Ce système, tout comme la quasi-totalité des fonctions de transfert, peut être mis sous une forme que nous avons étudiée dans l'exercice 5.8, en n'utilisant que des intégrateurs. La figure 10.9 correspond à ce schéma équivalent. À partir de ce schéma, on peut écrire :

$$\dot{x} = y \text{ et } \dot{y} = \varepsilon - y$$

soit :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varepsilon - y}{y} = \frac{-x - y}{y}$$

Par conséquent :

$$\frac{dy}{dx} = \lambda \Rightarrow \frac{-x - y}{y} = \lambda \Rightarrow y = -\frac{x}{1 + \lambda}$$

Les isoclines de ce système sont donc des droites passant toutes par le point O (figure 10.10). On matérialise, sur chacune d'elles, la tangente à la trajectoire en plusieurs points qui n'est autre que  $\lambda$ . Par exemple, pour l'isocline  $\lambda = 1$ , on trace la droite d'équation  $y = -x/2$  et on la munit de petits segments de pente 1.

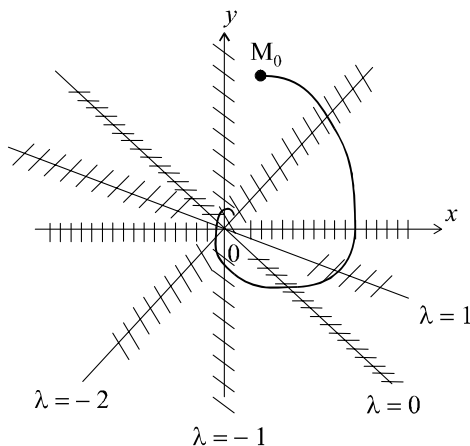


Figure 10.10 Tracé des isoclines.

Pour tracer les trajectoires de phase du système, on choisit un point  $M_0$  quelconque correspondant aux conditions initiales du système et on trace la courbe qui passe au mieux par les différents segments matérialisés sur les isoclines. Le sens du parcours se détermine facilement : lorsque  $y$  est positif, c'est-à-dire lorsque l'on se trouve dans le demi-plan supérieur, les variations de  $x$  le sont également (puisque  $y = dx/dt$ ) et réciproquement.

Le système autonome évoluant au cours du temps, la forme de la trajectoire permet de prédire son parcours, son état final, etc. On voit ainsi, dans notre exemple, que le système évolue vers un point fixe qui n'est autre que le point O, ce qui signifie que le système va tendre vers un état d'équilibre stable où on aura  $\dot{x} = x = 0$ .

### 10.3.3 Analyse des trajectoires et diagnostic du système

Pour étudier le comportement autonome d'un système, il convient surtout de rechercher la présence de points singuliers. Ces singularités sont au nombre de quatre :

Les foyers sont définis comme les points d'arrivée des trajectoires. Si ce point possède des coordonnées finies, le foyer est dit stable. Une trajectoire qui termine sa course sur un foyer stable correspond à un système stable (compte tenu des conditions initiales qui ont été choisies). Si une trajectoire tend vers l'infini, le système est instable (ou les conditions initiales qui ont été choisies comme point de départ de la trajectoire sont des conditions d'instabilité).

Les nœuds sont des foyers où convergent plusieurs (ou toutes) trajectoires. La présence d'un nœud permet de mettre en évidence la convergence inconditionnelle d'un système vers un même état quelles que soient ses conditions initiales.

Les sommets sont des points autour desquels les trajectoires forment des courbes fermées ou finissent par former des courbes fermées. La présence de sommets est synonyme d'oscillations stables.

Les cols sont des points sur lesquels l'état du système ne peut converger. La présence d'un col se traduit par un ensemble de trajectoires qui semblent « éviter » une certaine zone du plan.

La figure 10.11 présente sur un même plan l'ensemble de ces singularités.

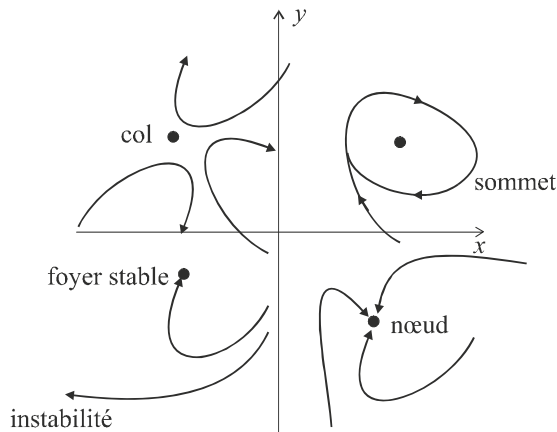


Figure 10.11 Singularités d'un plan de phase.

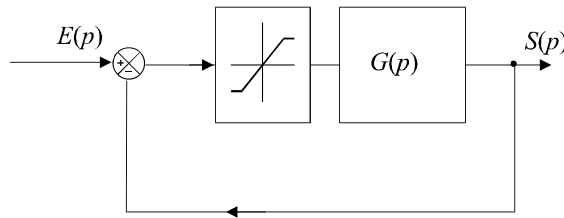
On conclut sur le comportement général en tentant de faire une étude exhaustive des conditions d'évolution des trajectoires, autrement dit en choisissant plusieurs points  $M_0$  dans chaque partie du plan. On constate alors, de visu, la manière dont le système se comporte.

## EXERCICES

### 10.1 Étude la stabilité d'un système d'ordre 3 possédant un élément saturant

On considère le système représenté sur la figure 10.12 avec :

$$G(p) = \frac{K}{p(1 + T_1p)(1 + T_2p)}$$



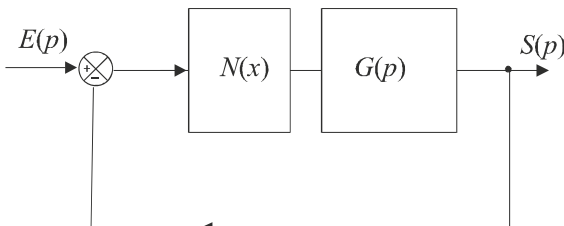
**Figure 10.12** Système non linéaire du troisième ordre.

L'élément non linéaire est une saturation de pente  $k$  saturant à  $s_{\max}$  et  $-s_{\max}$ . Déterminer les conditions de stabilité de ce système.

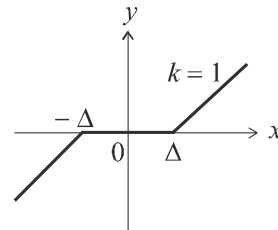
### 10.2 Étude du comportement d'un système du second ordre par la méthode du plan de phase

On considère le système non linéaire présenté sur la figure 10.13 avec :

$$G(p) = \frac{1}{p(p + 1)}$$



**Figure 10.13** Système non linéaire du deuxième ordre.

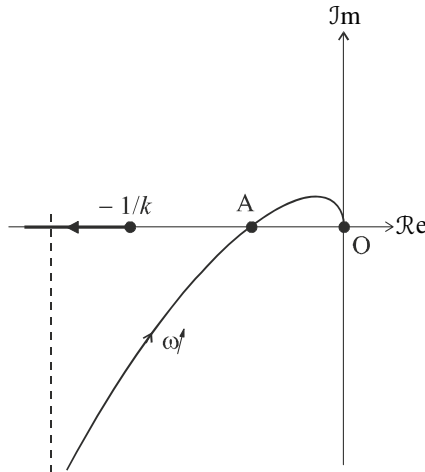


**Figure 10.14** Caractéristique d'un relais avec seuil sans hystérésis.

L'élément non linéaire est une pente  $k = 1$  avec un seuil  $\Delta = 0,2$  (figure 10.14). Déterminer les conditions d'évolution de ce système, supposé autonome, à partir de la méthode du plan de phase.

## SOLUTIONS

**10.1** Nous connaissons l'allure du diagramme de Nyquist d'un tel système et avons déjà étudié le lieu critique d'une saturation. Portons ces deux graphes sur la même figure et étudions les conditions de non intersection de ces deux lieux (figure 10.15).



**Figure 10.15** Étude de la stabilité d'un système d'ordre 3.

Le point d'intersection du lieu de Nyquist et de l'axe des réels peut être facilement déterminé.

On a :

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+jT_1\omega)(1+jT_2\omega)}$$

d'où :

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan T_1\omega - \arctan T_2\omega$$

Le point A est tel que :

$$\varphi(\omega_\pi) = -\frac{\pi}{2} - \arctan T_1\omega_\pi - \arctan T_2\omega_\pi = -\pi$$

d'où :

$$\arctan T_1\omega_\pi + \arctan T_2\omega_\pi = \frac{\pi}{2}$$

soit :

$$\omega_\pi = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

On en déduit donc :

$$G(\omega_\pi) = \frac{K}{\omega_\pi \sqrt{1+T_1^2\omega_\pi^2} \sqrt{1+T_2^2\omega_\pi^2}}$$

c'est-à-dire :

$$G(\omega_\pi) = \frac{K}{\frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \sqrt{1+\frac{T_1}{T_2}} \sqrt{1+\frac{T_2}{T_1}}} = \frac{KT_1 T_2}{T_1 + T_2}$$

Le point A a donc pour abscisse :

$$-\frac{KT_1 T_2}{T_1 + T_2}$$

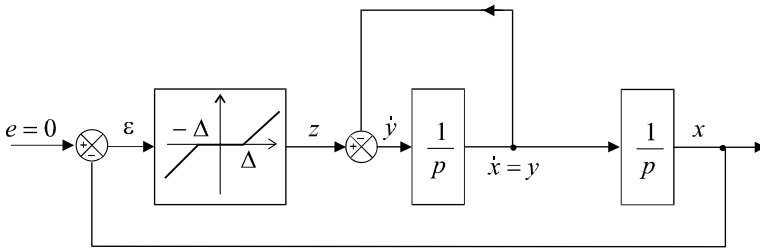
Pour que le système soit stable, il faut et il suffit que le point A soit situé à droite du départ du lieu critique.

Soit :

$$-\frac{KT_1 T_2}{T_1 + T_2} > -\frac{1}{k}$$

d'où la condition de stabilité : 
$$K < \frac{T_1 + T_2}{kT_1T_2}$$

**10.2** Inspirons-nous de l'exemple traité dans le cours. Décomposons le système linéaire pour faire apparaître ses variables de phase et insérons l'élément non linéaire (figure 10.16).



**Figure 10.16** Schéma équivalent du système.

Les équations mises en évidence pour le système linéaire au paragraphe 10.3.2 restent valables à conditions de changer ε en z.

On a : 
$$\dot{x} = y \text{ et } \dot{y} = z - y$$

soit : 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{z - y}{y}$$

Par conséquent : 
$$\frac{dy}{dx} = \lambda \Rightarrow \frac{z - y}{y} = \lambda$$

Pour tracer les isoclines, il est nécessaire de discuter de leur forme en fonction de la valeur de x. En effet, cette valeur influe directement sur l'écart ε, puisque ε = -x.

Si  $x < -\Delta$ , on a : 
$$z = -x - \Delta \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x - \Delta - y}{y}$$

Les isoclines sont donc définies par : 
$$y = -\frac{x + \Delta}{1 + \lambda}$$

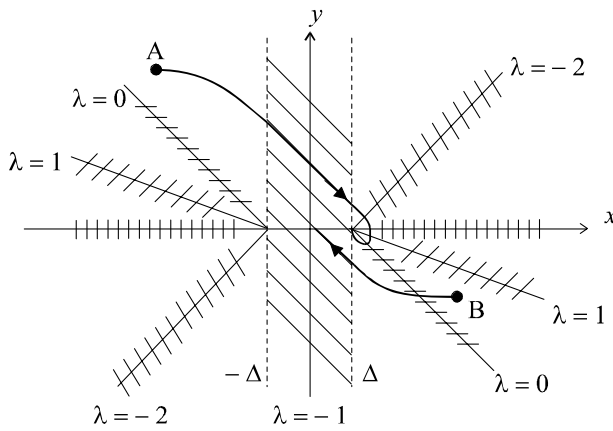
Si  $x > \Delta$ , on a : 
$$z = -x + \Delta \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x + \Delta - y}{y}$$

Les isoclines sont donc définies par : 
$$y = -\frac{x - \Delta}{1 + \lambda}$$

Si  $-\Delta < x < \Delta$ , on a : 
$$z = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1$$

Les isoclines sont donc définies par : 
$$y = -\frac{x - \Delta}{1 + \lambda}$$

Rassemblons les différents cas sur la figure 10.17. Tout se passe comme si les isoclines du système linéaire avaient été écartées d'une distance correspondant à la zone de seuil. Dans cette zone, les trajectoires ont systématiquement une pente égale à -1. Pour analyser le fonctionnement du système autonome, il suffit de choisir quelques points de départ correspondant à des conditions initiales différentes.



**Figure 10.17** Plan de phase du système.

On s’aperçoit rapidement que quel que soit le point de départ de la trajectoire, il n’y a aucune oscillation. La courbe se dirige toujours vers un foyer stable. Si les conditions initiales sont localisées en A, autrement dit si  $x(0)$  est suffisamment grand en valeur absolue, ce foyer se trouve aux points en  $x = \Delta$  ou  $x = -\Delta$ . Si au contraire  $x(0)$  est plus faible, le foyer se trouve dans la zone de seuil. Une étude plus fine permettrait sans aucun doute de déterminer les valeurs des foyers avec précision.





QUATRIÈME PARTIE

---

**Automatique des systèmes  
échantillonnés**



## Chapitre 11

# Modélisation des signaux et des systèmes échantillonnés

### 11.1 INTRODUCTION

Jusqu'à présent, nous n'avons étudié que des systèmes continus (linéaires ou non linéaires), dont la principale fonction consistait à traiter continûment, en temps réel, des signaux eux-mêmes continus, c'est-à-dire des signaux représentés par des fonctions continues du temps. On parle alors de signaux et de systèmes à temps continu.

Dans la réalité industrielle, la complexité des systèmes, ainsi que celle des traitements à réaliser, nécessite souvent le recours à des outils numériques de traitement : ordinateurs, calculateurs, systèmes numériques en tout genre.

De tels outils ne peuvent en aucun cas s'accommoder de signaux continus ; ceux-ci doivent être transformés en suites de nombres pour pouvoir être traités (figure 11.1). De même, ces systèmes délivrent, à leur sortie, des suites de valeurs numériques, autrement dit, des signaux numériques.

*Remarque :* On parle aussi de systèmes et de signaux à temps discret par opposition à la notion de temps continu.

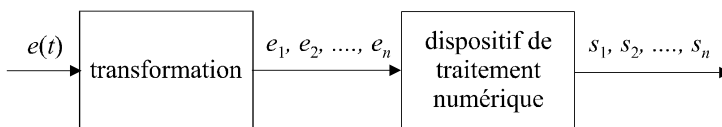


Figure 11.1 Traitement numérique d'un signal.

Pour transformer un signal continu en une suite de nombres compatible avec un système de traitement numérique, on a recours à deux opérations successives : l'échantillonnage qui consiste à prélever, à intervalles de temps réguliers, des valeurs discrètes du signal, puis, la conversion analogique numérique qui transforme ces échantillons en nombres, généralement codés sous forme binaire (figure 11.2).

L'échantillonnage réalise donc une discrétisation dans le temps, tandis que la conversion analogique numérique réalise une discrétisation en amplitude. En effet, si on considère qu'un convertisseur analogique numérique dispose de  $n$  bits en sortie pour coder la valeur numérique du signal, celui-ci ne pourra prendre que  $2^n$  valeurs. Cette double discrétisation est bien évidemment susceptible d'engendrer des erreurs étant donné que l'on ne connaîtra le signal qu'à des instants donnés et que, de surcroît, les valeurs numériques correspondantes seront arrondies en fonction du nombre de valeurs disponibles en sortie.

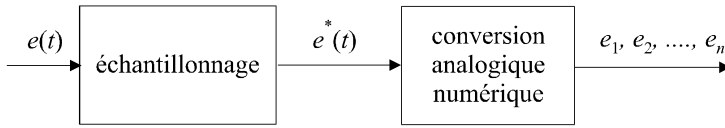


Figure 11.2 Échantillonnage et conversion analogique numérique d'un signal.

Par convention, on notera  $e^*(t)$  le signal échantillonné avant sa conversion analogique numérique.

**Remarque :** On a souvent tendance, par abus de langage, à appeler échantillonnage l'ensemble de la chaîne de transformation du signal, conversion comprise. Cet abus de langage est sans conséquence, étant donné que les modèles que nous allons étudier concernent la description globale de la transformation du signal continu jusqu'à la suite de nombres correspondante.

## 11.2 PRINCIPES FONDAMENTAUX DE L'ÉCHANTILLONNAGE DES SIGNAUX

### 11.2.1 Définition

L'échantillonnage d'un signal temporel  $s(t)$  consiste à transformer celui-ci en une suite discrète  $s(nT_e)$  de valeurs prises à des instants  $nT_e$ .  $T_e$  est appelée période d'échantillonnage. Les instants  $nT_e$  sont appelés les instants d'échantillonnages. Pratiquement, échantillonner un signal revient à le multiplier par une fonction d'échantillonnage  $p(t)$ , nulle partout, sauf au voisinage des instants  $nT_e$ . Cette fonction, qui porte souvent le nom de peigne, est représentée sur la figure 11.3. Le résultat d'une opération d'échantillonnage, visible sur la figure 11.4, est :

$$s^*(t) = p(t)s(t)$$

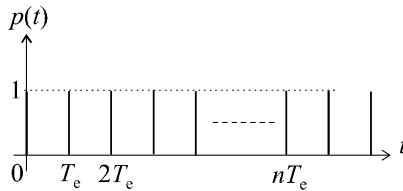


Figure 11.3 Fonction d'échantillonnage.

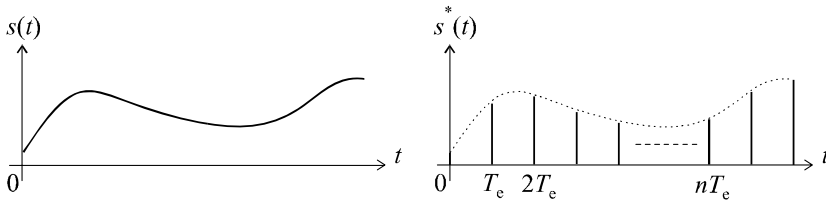


Figure 11.4 Échantillonnage d'un signal quelconque.

L'échantillonnage produit donc, à partir d'un signal  $s(t)$ , la suite :

$$s(0), s(T_e), s(2T_e), \dots, s(nT_e)$$

que l'on note, en général :

$$s^*(t) = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

ou encore :

$$s(k) = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

**Remarque :** En toute logique, cette suite ne correspond pas encore à des valeurs numériques. Ce signal échantillonné est un signal analogique à temps discret. Toutefois, on notera de la même manière la suite numérique obtenue après conversion analogique numérique.

### 11.2.2 Spectre d'un signal échantillonné

Supposons qu'un signal  $s(t)$  à échantillonner soit à énergie finie et possède, par conséquent, une transformée de Fourier :

$$S(f) = \int_0^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \text{ avec } \omega = 2\pi f$$

Calculons alors la transformée de Fourier  $S^*(f)$  du signal échantillonné  $s^*(t)$ . Le signal  $p(t)$  étant périodique, il possède une décomposition en série de Fourier que nous pouvons écrire, sans la calculer :

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{jn\Omega_e t} \text{ avec } \Omega_e = 2\pi/T_e$$

On a alors :

$$s^*(t) = s(t)p(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{jn\Omega_e t}$$

d'où :

$$S^*(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ s(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{jn\Omega_e t} \right] e^{-j\omega t} dt$$

$$S^*(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ A_n \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{jn\Omega_e t} e^{-j\omega t} dt \right]$$

$$S^*(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ A_n \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j(\omega - n\Omega_e)t} dt \right]$$

soit :

$$S^*(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [A_n S(f - nf_e)] \text{ avec } f_e = \Omega_e/2\pi = 1/T_e$$

La transformée de Fourier du signal échantillonné apparaît donc comme une superposition des transformées de Fourier de  $s(t)$  aux points  $f - nf_e$ ,  $f_e$  étant la fréquence d'échantillonnage choisie. Pour  $n = 0$ , on retrouve le spectre  $|S(f)|$  du signal initial. Pour  $n$  non nul, on retrouve ce même spectre, mais décalé, par rapport à  $|S(f)|$  de  $nf_e$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ . On dit aussi que  $S(f)$  est périodique de fréquence  $f_e$ . La figure 11.5 présente les spectres comparés de  $s(t)$  et de  $s^*(t)$ .

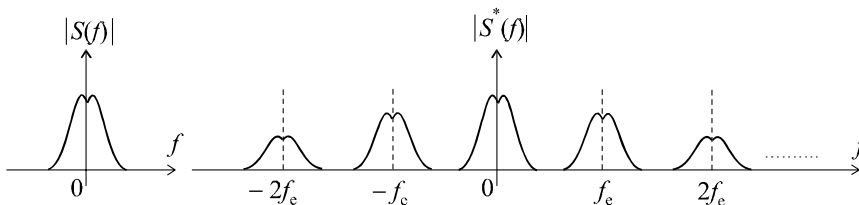


Figure 11.5 Spectre d'un signal échantillonné.

### 11.2.3 Théorème de Shannon

À partir du spectre du signal échantillonné représenté sur la figure 11.5, il est possible de mettre en évidence l'un des résultats les plus fondamentaux de l'étude des signaux échantillonnés. Un des objectifs essentiels de l'échantillonnage consiste à ne pas perdre d'information lors de la discrétisation dans le temps, ce qui peut se traduire par le fait qu'il doit être possible, à partir du spectre du signal échantillonné, de reconstituer simplement celui du signal original. Un simple coup d'œil au spectre  $|S^*(f)|$  nous montre que cela est possible s'il n'existe aucun recouvrement entre les différents segments de spectre.

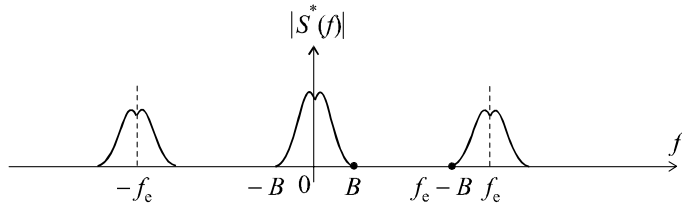


Figure 11.6 Spectre d'un signal échantillonné.

Si  $B$  est la largeur spectrale du signal  $s(t)$ , autrement dit sa limite fréquentielle supérieure, le premier segment décalé, dans le spectre de  $s^*(t)$ , qui se trouve centré sur la fréquence  $f_e$ , s'étend de  $f_e - B$  à  $f_e + B$ . La condition de non recouvrement est donc, de toute évidence :

$$B < f_e - B$$

soit :

$$f_e > 2B$$

Cette inégalité constitue le théorème de Shannon qui peut également s'énoncer de la manière suivante :

Pour préserver, lors de son échantillonnage, l'information contenue dans un signal, la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  doit être supérieure au double de la largeur spectrale du signal.

## 11.3 EXEMPLES DE SIGNAUX ÉCHANTILLONNÉS SIMPLES

### 11.3.1 Impulsion unité

On définit l'impulsion unité échantillonnée par le signal :

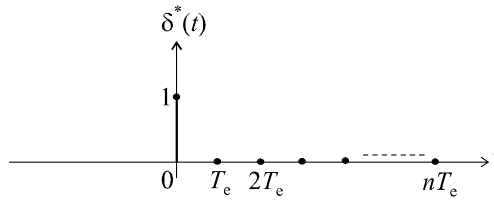
$$\delta^*(t) = \{1, 0, 0, \dots, 0\}$$

autrement dit :

$$\begin{cases} \delta^*(nT_e) = 1 \text{ pour } n = 0 \\ \delta^*(nT_e) = 0 \text{ pour } n \neq 0 \end{cases}$$

**Remarque :** Nous considérerons comme nuls pour  $t$  négatif, tous les signaux que nous étudierons.

La figure 11.7 propose une représentation schématique de cette impulsion unité.



**Figure 11.7** Impulsion unité.

### 11.3.2 Échelon unité

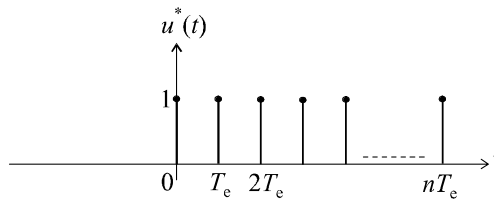
On définit l'échelon unité échantillonné par le signal :

$$u^*(t) = \{1, 1, 1, \dots, 1\}$$

autrement dit :

$$\begin{cases} u(k) = 1 \quad \forall k \geq 0 \\ u(k) = 0 \quad \forall k < 0 \end{cases}$$

La figure 11.8 propose une représentation schématique de cet échelon unité.



**Figure 11.8** Échelon unité.

Cet échelon unité n'est rien d'autre que la somme d'impulsions unités décalées dans le temps :

$$u^*(t) = \delta^*(t) + \delta^*(t - T_e) + \delta^*(t - 2T_e) + \dots$$

soit :

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^n \delta^*(t - kT_e)$$

On pose parfois :

$$\delta^*(t - kT_e) = \delta_k$$

ce qui nous conduit à la notation :

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^n \delta_k$$

## 11.4 TRANSFORMÉE EN Z DES SIGNAUX ÉCHANTILLONNÉS

### 11.4.1 Définition

Soit  $s(t)$  un signal continu quelconque que l'on échantillonne à une fréquence  $f_e$  (soit une période  $T_e$ ), en respectant, bien évidemment, le théorème de Shannon.

On a : 
$$s^*(t) = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

avec : 
$$s_i = s(iT_e)$$

ou encore : 
$$s(k) = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

Cette suite n'est rien d'autre que la somme d'impulsions unités décalées dans le temps et multipliées, chacune, par le coefficient  $s_k$  :

$$s^*(t) = s_0\delta^*(t) + s_1\delta^*(t - T_e) + s_2\delta^*(t - 2T_e) + \dots$$

soit : 
$$s^*(t) = \sum_{k=0}^n s_k\delta^*(t - kT_e)$$

d'où : 
$$s^*(t) = \sum_{k=0}^n s_k\delta_k$$

Toute la modélisation des signaux que nous avons utilisée, dès les premières pages de cet ouvrage, faisait appel à la transformation de Laplace. Nous pouvons toujours calculer la transformée de Laplace de  $s^*(t)$  :

$$S^*(p) = \sum_{k=0}^n s_k\Delta_k^*(p)$$

Dans cette expression,  $\Delta_k^*(p)$  représente la transformée de Laplace d'une impulsion unité à l'instant  $kT_e$ , représentée sur la figure 11.9.

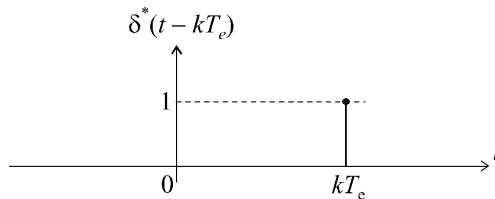


Figure 11.9 Impulsion unité à l'instant  $k$ .

Par définition : 
$$\Delta_k^*(p) = \int_0^{+\infty} \delta_k^*(t) e^{-pt} dt$$

En appliquant le théorème du retard et en nommant  $\Delta_0^*(p)$  la transformée de Laplace de l'impulsion unité en 0, on a :

$$\Delta_k^*(p) = \Delta_0^*(p) e^{-pkT_e}$$



avec :

$$\Delta_0^*(p) = \int_0^{+\infty} \delta_0^*(t) e^{-pt} dt$$

Nous ne pouvons calculer cette intégrale directement. Aussi admettons nous le résultat :

$$\Delta_0^*(p) = 1$$

Il vient alors :

$$\Delta_k^*(p) = e^{-pkT_e}$$

d'où :

$$S^*(p) = \sum_{k=0}^n s_k e^{-pkT_e}$$

**Remarque :** Certains auteurs proposent une sommation de moins l'infini à plus l'infini. Dans le cas des signaux causaux que nous étudions (signal nul pour  $t$  négatif), nous nous contenterons de cette expression.

En posant  $z = e^{pT_e}$ , on définit la transformée en  $z$  du signal  $s(t)$  par :

$$S(z) = \sum_{k=0}^n s_k z^{-k}$$

La transformation en  $z$  peut être notée :

$$s(t) \rightarrow Z(s)$$

La transformée en  $z$  d'un signal n'existe, bien évidemment, que si la somme qui la définit converge. On peut montrer que ce domaine de convergence est de la forme  $|z| > r$  avec  $r \in \mathbb{R}$ . Dorénavant, nous ne nous intéresserons qu'à des signaux pour lesquels on peut effectivement définir une transformée en  $z$ .

## 11.4.2 Intérêt de la transformée en $z$

Nous allons retrouver avec la transformée en  $z$ , le même intérêt que celui que nous avons trouvé à la transformée de Laplace pour les signaux à temps continu. Lorsque nous saurons modéliser le fonctionnement d'un système numérique par une fonction de transfert en  $z$ , nous disposerons d'un outil complet permettant de décrire, donc d'étudier leur fonctionnement.

Tout comme l'on écrivait :

$$S(p) = G(p)E(p),$$

on écrira alors :

$$S(z) = G(z)E(z)$$

Ce formalisme, qui peut paraître quelque peu ésotérique au départ n'est rien d'autre que la méthode de modélisation, donc de description, des signaux et systèmes échantillonnés.

## 11.4.3 Propriétés de la transformée en $z$

### a) Linéarité

Soit  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  deux signaux quelconques possédant chacun une transformée en  $z$ ,  $S_1(z)$  et  $S_2(z)$ . La transformée en  $z$  d'une combinaison linéaire  $\lambda s_1(t) + \mu s_2(t)$  de ces deux fonctions est égale à  $\lambda S_1(z) + \mu S_2(z)$ .

b) *Théorème du retard*

Soit  $s(t)$  un signal quelconque possédant une transformée en  $z$ ,  $S(z)$  et soit  $x(t) = s(t - aT_e)$  correspondant au même signal retardé d'un temps  $aT_e$ . La transformée en  $z$  de  $s(t - aT_e)$  est égale à :

$$X(z) = z^{-a}S(z)$$

c) *Théorème de la valeur finale*

Soit  $s(t)$  un signal quelconque possédant une transformée en  $z$ ,  $S(z)$ . Soit  $(s_k)$  la suite échantillonnée correspondant au signal  $s(t)$ . Le théorème de la valeur finale permet de connaître la valeur vers laquelle tend la suite  $(s_k)$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$ , autrement dit lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1}) S(z)]$$

d) *Multiplication par le temps*

Soit  $s(t)$  un signal quelconque possédant une transformée en  $z$ ,  $S(z)$ . Soit  $x(t)$  le signal défini par  $x(t) = t \cdot s(t)$ .

Alors :

$$X(z) = -zT_e \frac{dS(z)}{dz}$$

e) *Changement d'échelle*

Soit  $s(t)$  un signal quelconque possédant une transformée en  $z$ ,  $S(z)$ . Soit  $(s_k)$  la suite échantillonnée correspondant au signal  $s(t)$ . Soit  $(x_k)$  la suite d'échantillons définie par :

$$x_k = a^k s_k \text{ avec } a \neq 0$$

Le signal  $x(t)$  correspondant à la suite  $(x_k)$  possède une transformée en  $z$  telle que :

$$X(z) = S\left(\frac{z}{a}\right)$$

## 11.4.4 Transformée en $z$ de signaux usuels

a) *Impulsion unité*

L'impulsion unité étant définie par :

$$\delta_k = 1 \text{ pour } k = 0$$

$$\delta_k = 0 \text{ pour } k \neq 0$$

On a :

$$\Delta(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k z^{-k} = z^0 = 1$$

b) *Échelon unité*

L'échelon unité étant défini par :

$$u_k = 1 \text{ pour } k \geq 0$$

On a :

$$U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

## c) Rampe unité

La rampe unité en temps continu est définie par :

$$v(t) = t \text{ pour } t \geq 0$$

En remarquant que  $v(t) = t \cdot u(t)$  et en utilisant la propriété étudiée précédemment, on obtient :

$$V(z) = -zT_e \frac{dU(z)}{dz} = -zT_e \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-1} \right)$$

soit :

$$V(z) = -zT_e \frac{(z-1) - z}{(z-1)^2}$$

d'où :

$$V(z) = \frac{zT_e}{(z-1)^2}$$

## d) Exponentielle décroissante

Soit  $s(t)$  le signal défini par  $s(t) = e^{-at}$  pour  $t \geq 0$ . La transformée en z de ce signal a pour expression :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-akT_e} z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{aT_e})^{-k} z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{e^{aT_e} z} \right)^k$$

$$S(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{e^{aT_e} z}} = \frac{e^{aT_e} z}{e^{aT_e} z - 1} = \frac{z}{z - e^{-aT_e}}$$

## 11.4.5 Calculs de transformées en z à l'aide de Mathematica

Les commandes ZTransform et InverseZTransform de Mathematica correspondent respectivement au calcul de la transformée en z et de sa transformée inverse. Les syntaxes sont les suivantes :

$$\text{ZTransform}[f(k), k, z]$$

$$\text{InverseZTransform}[f(z), z, k]$$

**Exemple**

Soit  $f(k) = ak$ , un signal en rampe.

La commande  $\text{ZTransform}[a \times k, k, z]$  fournit le résultat :  $\frac{az}{(z-1)^2}$ .

À l'inverse, la commande  $\text{InverseZTransform}[az/(z-1)^2, z, k]$  donne :  $ak$ .

## 11.5 FONCTION DE TRANSFERT EN Z

## 11.5.1 Relations entre échantillons de sortie et échantillons d'entrée

On considère un système de traitement numérique à l'entrée duquel on injecte un signal échantillonné représenté par une suite de nombres  $e_k$ . Soit  $s_k$  la suite obtenue à la sortie du système (figure 11.10).

Il convient d'insister ici, sur le fait que ces séries de nombres correspondent à une description temporelle des signaux :  $e_k = e(kT_e)$ . Il paraît donc naturel, *a priori*, pour décrire le fonctionnement du système, d'exprimer l'échantillon de sortie  $s_k$  à un instant quelconque  $kT_e$  en fonction, par exemple, des échantillons d'entrée.

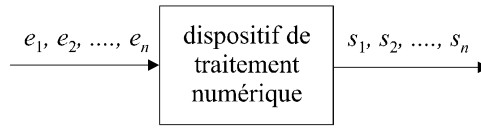


Figure 11.10 Schéma général d'un système de traitement numérique d'un signal.

a) Dispositifs de type MA en temps réel

Les dispositifs de traitement numérique les plus simples sont décrits par une relation du type :

$$s_k = \sum_{i=0}^p a_i e_{k-i}$$

Cela signifie que l'échantillon de sortie  $s_k$ , c'est-à-dire à l'instant  $kT_e$ , est connu à partir des  $p+1$  échantillons d'entrée aux instants d'échantillonnage précédents (instant présent  $kT_e$  inclus).

Cette relation ne peut bien évidemment être écrite qu'à partir de l'échantillon  $s_p$  étant donné qu'elle nécessite la connaissance des  $p$  premiers échantillons d'entrée pour pouvoir calculer un échantillon de sortie. En analysant l'expression de  $s_k$ , on remarque que l'algorithme de calcul correspond au calcul d'une moyenne de plusieurs échantillons d'entrée passés affectés d'une suite de coefficients  $a_i$ . C'est pourquoi ces dispositifs sont appelés systèmes de type MA, pour *Moving Average*, c'est-à-dire, moyenne mobile. Comme seuls les échantillons d'entrée passés sont nécessaires pour calculer la sortie, ils sont également dits en temps réel car l'échantillon de sortie à un instant quelconque peut être immédiatement évalué.

b) Dispositifs de type MA en temps différé

Il s'agit toujours de calculer l'échantillon de sortie à l'instant  $kT_e$  à partir du calcul d'une moyenne d'échantillons d'entrée, mais cette fois-ci, la connaissance d'échantillons d'entrée postérieurs à l'instant  $kT_e$  est nécessaire.

On a alors :

$$s_k = \sum_{i=-m}^p a_i e_{k-i}$$

Cela signifie que la sortie  $s_k$ , c'est-à-dire à l'instant  $kT_e$ , est calculée à partir des  $p$  échantillons d'entrée passés (instant présent  $kT_e$  inclus) et des  $m$  échantillons d'entrée à venir.

Cette relation ne peut toujours être écrite qu'à partir de l'échantillon  $s_p$  et un échantillon de sortie  $s_k$  n'est connu qu'à partir de l'instant  $(k + m) T_e$ .

c) Dispositifs de type ARMA

Dans les dispositifs de type ARMA (Auto Regressive and Moving Average), l'échantillon de sortie à l'instant  $k$  est connu à partir d'échantillons d'entrée précédents et des  $q$  échantillons de sortie précédents. On parle alors de relation de récurrence permettant de déterminer l'échantillon de sortie.

On a alors :

$$s_k = \sum_{i=-m}^p a_i e_{k-i} + \sum_{j=1}^q b_j s_{k-j}$$

Dans le cas où la sortie  $s_k$  peut être calculée uniquement à partir de  $q$  échantillons de sortie précédents et du seul échantillon  $e_k$ , on a affaire à un modèle récurrent pur (type AR) :

$$s_k = a_0 e_k + \sum_{j=1}^q b_j s_{k-j}$$

## 11.5.2 Définition de la fonction de transfert en z

Considérons un système régi par une équation de type ARMA. Soit  $E(z)$  la transformée en z du signal d'entrée et  $S(z)$  celle du signal de sortie.

Rappelons que :

$$S(z) = \sum_{k=0}^n s_k z^{-k}$$

et :

$$E(z) = \sum_{k=0}^n e_k z^{-k}$$

Il est possible d'appliquer la transformation en z à l'expression :

$$s_k = \sum_{i=-m}^p a_i e_{k-i} + \sum_{j=1}^q b_j s_{k-j}$$

Cela revient à multiplier  $s_k$  par  $z^{-k}$  et à sommer pour  $k$  variant de 0 à  $n$  :

$$S(z) = \sum_{k=0}^n s_k z^{-k} = \sum_{k=0}^n \left( \sum_{i=-m}^p a_i e_{k-i} + \sum_{j=1}^q b_j s_{k-j} \right) z^{-k}$$

$$S(z) = \sum_{k=0}^n \left( z^{-k} \sum_{i=-m}^p a_i e_{k-i} + z^{-k} \sum_{j=1}^q b_j s_{k-j} \right)$$

$$S(z) = \sum_{k=0}^n \left( \sum_{i=-m}^p a_i e_{k-i} z^k + \sum_{j=1}^q b_j s_{k-j} z^{-k} \right)$$

Les sommes étant indépendantes, elles peuvent être permutées :

$$S(z) = \sum_{i=-m}^p a_i \left( \sum_{k=0}^n e_{k-i} z^k \right) + \sum_{j=1}^q b_j \left( \sum_{k=0}^n s_{k-j} z^{-k} \right)$$

Regardons d'un peu plus près le terme  $\sum_{k=0}^n e_{k-i} z^k$ .

Il s'agit de la transformée en z du signal d'entrée retardé de  $i$  échantillons.

Par conséquent :

$$\sum_{k=0}^n e_{k-i} z^k = z^{-i} \sum_{k=0}^n e_k z^k = z^{-i} E(z)$$

De même :

$$\sum_{k=0}^n s_{k-j} z^k = z^{-j} \sum_{k=0}^n s_k z^k = z^{-j} S(z)$$

On en déduit donc :

$$S(z) = \sum_{i=-m}^p a_i z^{-i} E(z) + \sum_{j=1}^q b_j z^{-j} S(z)$$

soit :

$$S(z) \left[ 1 - \sum_{j=1}^q b_j z^{-j} \right] = E(z) \sum_{i=-m}^p a_i z^{-i}$$

En posant :

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\sum_{i=-m}^p a_i z^{-i}}{1 - \sum_{j=1}^q b_j z^{-j}},$$

on définit la fonction de transfert en  $z$ ,  $G(z)$  du système.

**Remarque :** Pour obtenir rapidement la fonction de transfert en  $z$  à partir d'une équation MA ou ARMA, il suffit de remplacer chaque  $e_{k-i}$  et chaque  $s_{k-j}$  respectivement par  $z^{-i}E(z)$  et  $z^{-j}S(z)$ .

L'équation  $s_k = \sum_{i=-m}^p a_i e_{k-i} + \sum_{j=1}^q b_j s_{k-j}$  donne donc immédiatement :

$$S(z) = \sum_{i=-m}^p a_i z^{-i} E(z) + \sum_{j=1}^q b_j z^{-j} S(z)$$

### 11.5.3 Exemples de fonctions de transfert en $z$

a) *Système MA en temps réel d'ordre  $p$*

On considère un système régi par l'équation :

$$s_k = \sum_{i=0}^p a_i e_{k-i}$$

Appliquons la transformation en  $z$  à chacun des membres :

$$S(z) = \sum_{i=0}^p a_i z^{-i} E(z)$$

On en déduit immédiatement :

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \sum_{i=0}^p a_i z^{-i} = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}$$

b) *Système AR en temps réel d'ordre  $q$*

On considère un système régi par l'équation :

$$s_k = a_0 e_k + \sum_{j=1}^q b_j s_{k-j}$$

Appliquons la transformation en  $z$  à chacun des membres :

$$S(z) = a_0 E(z) + \sum_{j=1}^q b_j z^{-j} S(z)$$

On en déduit immédiatement :

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{a_0}{1 - \sum_{j=1}^q b_j z^{-j}} = \frac{a_0}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \dots - b_q z^{-q}}$$

## 11.6 TRANSFORMÉE DE FOURIER À TEMPS DISCRET

### 11.6.1 Définition

Soit  $s(t)$  un signal continu quelconque que l'on échantillonne à une fréquence  $f_e$  (soit une période  $T_e$ ), en respectant, bien évidemment, le théorème de Shannon. Soit  $S(z)$  sa transformée en  $z$ .

Rappelons que :

$$S^*(p) = \sum_{k=0}^n s_k e^{-pkT_e}$$

et que la transformée en  $z$  a été obtenue en posant  $z = e^{pT_e}$  :

$$S(z) = \sum_{k=0}^n s_k z^{-k}$$

Exactement comme nous pouvons calculer la transformée de Fourier d'un signal à temps continu en posant  $p = j\omega$  (à condition qu'il soit à énergie finie, rappelons-le), nous pouvons tout autant poser  $e^{pT_e} = e^{j\omega T_e}$  à condition, bien sûr, que la somme, ainsi transformée, converge vers une valeur finie, ce que nous supposons. On obtient alors :

$$S^*(j\omega) = \sum_{k=0}^n s_k e^{-j\omega k T_e}$$

ou encore :

$$\sigma(f) = \sum_{k=0}^n s_k e^{-j2\pi k f / f_e}$$

La fonction  $\sigma(f)$  est appelée transformée de Fourier à temps discret du signal  $s_k$ . Son module représente, bien sûr, le spectre du signal échantillonné.

### 11.6.2 Exemple

Soit  $s(t)$  le signal défini par  $s(t) = e^{-t}$  pour  $t \geq 0$ . La transformée en  $z$  de ce signal, échantillonné à la fréquence  $f_e$  a pour expression :

$$S(z) = \frac{z}{z - e^{-T_e}}$$

Posons :

$$z = e^{j\omega T_e}$$

On obtient :

$$\sigma(f) = \frac{e^{j\omega T_e}}{e^{j\omega T_e} - e^{-T_e}}$$

Calculons à présent le spectre du signal :

$$\begin{aligned}
 |\sigma(f)| &= \left| \frac{e^{j\omega T_e}}{e^{j\omega T_e} - e^{-T_e}} \right| = \frac{1}{|(\cos \omega T_e - \cos T_e) + j(\sin \omega T_e + \sin T_e)|} \\
 |\sigma(f)| &= \frac{1}{\sqrt{(\cos \omega T_e - \cos T_e)^2 + (\sin \omega T_e + \sin T_e)^2}} \\
 |\sigma(f)| &= \frac{1}{\sqrt{2 - 2 \cos \omega T_e \cos T_e + 2 \sin \omega T_e \sin T_e}} \\
 |\sigma(f)| &= \frac{1}{\sqrt{2 - 2 \cos(\omega + 1) T_e}} = \frac{1}{\sqrt{2 \left( 2 \sin^2 \frac{(\omega + 1) T_e}{2} \right)}} \\
 |\sigma(f)| &= \frac{1}{2 \left| \sin \frac{(\omega + 1) T_e}{2} \right|} = \frac{1}{2 \left| \sin \frac{(2\pi f + 1)}{2f_e} \right|}
 \end{aligned}$$

Nous pouvons tracer ce spectre, en prenant soin de se souvenir que le signal a obligatoirement été échantillonné en respectant le théorème de Shannon, autrement dit en considérant que le signal original possède une largeur spectrale  $B < f_e/2$ . On tracera donc ce spectre pour  $0 \leq f \leq f_e/2$ .

Comme :

$$\frac{1}{2f_e} \leq \frac{(2\pi f + 1)}{2f_e} \leq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2f_e},$$

on a :

$$|\sigma(f)| = \frac{1}{2 \sin \frac{(2\pi f + 1)}{2f_e}}$$

Si  $f_e$  est suffisamment grande, il s'agit d'un spectre qui décroît de  $\sigma_{\max} = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2f_e}} \approx f_e$  jusqu'à environ 1/2 (voir figure 11.11).

En réalité, le spectre possède un minimum pour  $\frac{(2\pi f + 1)}{2f_e} = \frac{\pi}{2}$ , autrement dit pour une fréquence déjà très élevée et voisine de  $f_e/2$ .

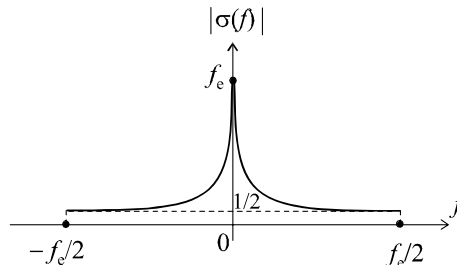


Figure 11.11 Spectre du signal.



## 11.7 COMPORTEMENT FRÉQUENTIEL DES SYSTÈMES ÉCHANTILLONNÉS

### 11.7.1 Principes généraux

Considérons un système de fonction de transfert en  $z$  égale à  $G(z)$  sollicité par un signal d'entrée possédant une transformée en  $z$ ,  $E(z)$  et délivrant un signal de sortie de transformée en  $z$ ,  $S(z)$  (figure 11.12).

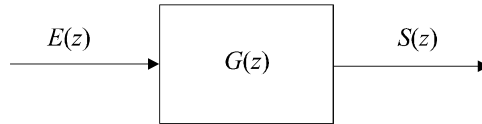


Figure 11.12 Schéma général d'un système échantillonné.

Le système est régi par l'équation :  $S(z) = G(z)E(z)$

En posant  $z = e^{j\omega T_e}$ , on obtient :  $S(e^{j\omega T_e}) = G(e^{j\omega T_e})E(e^{j\omega T_e})$

Les termes  $E(e^{j\omega T_e})$  et  $S(e^{j\omega T_e})$  représentent respectivement les transformées de Fourier à temps discret des signaux d'entrée et de sortie. Par conséquent,  $G(e^{j\omega T_e})$  représente le comportement fréquentiel du système : il s'agit de sa fonction de transfert en fréquence.

Comme pour les systèmes continus, ce comportement peut être représenté graphiquement, par exemple sous forme de diagramme de gain.

La fonction  $G(\omega) = |G(e^{j\omega T_e})|$  correspond, notamment, au gain réel du système en fonction de la pulsation  $\omega$ . On prendra soin, toutefois, de toujours limiter le tracé à l'intervalle  $[0, f_e/2]$ , afin de respecter le théorème de Shannon : l'expression trouvée n'a en effet aucun sens au delà de  $f_e/2$ .

### 11.7.2 Exemple

On considère un système échantillonné régi par la relation de récurrence :

$$s_k = \frac{1}{2} (e_k + s_{k-1})$$

En appliquant la transformée en  $z$  à cette équation, on obtient :

$$S(z) = \frac{1}{2} [E(z) + z^{-1}S(z)]$$

d'où :

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{0,5}{1 - 0,5z^{-1}}$$

soit :

$$G(\omega) = \left| \frac{0,5}{1 - 0,5 e^{-j\omega T_e}} \right| = \frac{0,5}{|1 - 0,5 (\cos \omega T_e - j \sin \omega T_e)|}$$

$$G(\omega) = \frac{0,5}{\sqrt{(1 - 0,5 \cos \omega T_e)^2 + 0,25 \sin^2 \omega T_e}}$$

Finalement :

$$G(\omega) = \frac{0,5}{\sqrt{1,25 - \cos \omega T_e}}$$

ou encore :

$$G(f) = \frac{0,5}{\sqrt{1,25 - \cos 2\pi fT_e}} = \frac{0,5}{\sqrt{1,25 - \cos 2\pi \frac{f}{f_e}}}$$

Il convient de tracer cette fonction pour  $f$  variant de 0 à  $f_e/2$ . Sur cet intervalle,  $\cos 2\pi fT_e$  décroît de 1 à  $-1$ .  $G(f)$  est donc une fonction strictement décroissante.

On a :

$$G_{\max} = G(0) = \frac{0,5}{\sqrt{0,25}} = 1$$

et :

$$G_{\min} = G\left(\frac{f_e}{2}\right) = \frac{0,5}{\sqrt{1,25 - \cos \pi}} = \frac{0,5}{\sqrt{2,25}} = \frac{1}{3}$$

La figure 11.13 représente le diagramme de gain fréquentiel du système.

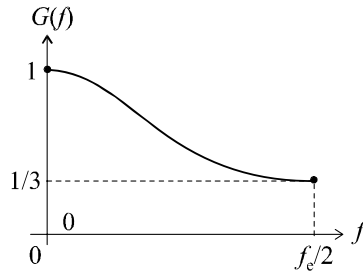


Figure 11.13 Diagramme de gain du système.

**Remarque :** A contrario des systèmes à temps continu, l’usage, pour les systèmes échantillonnés, consiste à tracer la courbe de gain directement en coordonnées cartésiennes linéaires. On peut certes exprimer le gain en décibels, mais on préférera utiliser une échelle linéaire pour l’axe des abscisses.

## 11.8 RELATIONS ENTRE LES MODÈLES À TEMPS CONTINU ET À TEMPS DISCRET

### 11.8.1 Problématique

Considérons (figure 11.14) un système à temps continu modélisé par sa fonction de transfert  $G(p)$ . Nous possédons une bonne connaissance de ce type de modèles et il est tout à fait légitime de s’interroger sur l’existence d’un système échantillonné possédant les mêmes caractéristiques, c’est-à-dire le même comportement temporel et le même comportement fréquentiel.

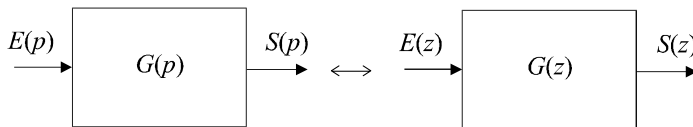


Figure 11.14 Recherche d’une équivalence temps continu – temps discret.

Le système échantillonné  $G(z)$  sera réputé équivalent au système  $G(p)$  si, soumis à un signal d’entrée  $E(z)$  correspondant à l’échantillonnage du signal continu  $e(t)$  représenté par  $E(p)$ , il délivre à sa sortie un signal  $S(z)$  correspondant à l’échantillonnage du signal  $s(t)$  qui aurait été délivré par le système  $G(p)$ .

## 11.8.2 Équivalence à la dérivation

### a) Définition

Une fonction de transfert en temps continu est issue d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Cette équation est formée de dérivées successives des signaux d'entrée et de sortie. Un des moyens les plus simples d'effectuer le lien entre une représentation en temps continu et en temps discret est de considérer que la variation  $dx/dt$  en temps continu correspond à la variation du signal entre deux instants d'échantillonnage :

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{T_e}$$

Cette équivalence est d'autant plus vraie que la fréquence d'échantillonnage est grande.

Or la transformée en  $z$  de l'expression de droite est :

$$Z\left(\frac{x_k - x_{k-1}}{T_e}\right) = \frac{1}{T_e} X(z) (1 - z^{-1})$$

De même, le terme  $dx/dt$  a pour transformée de Laplace :  $pX(p)$ .

Par conséquent, l'équivalence naturelle entre une fonction de transfert continue en  $p$  et sa fonction de transfert échantillonnée en  $z$  est :

$$p \leftrightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

### b) Comparaison fréquentielle des deux modèles

L'une des questions fondamentales, lors de la proposition d'une équivalence de fonctionnement entre un modèle à temps continu et un modèle à temps discret, réside dans la justesse du modèle d'un point de vue fréquentiel. Il est relativement aisé de constater, après transformation, que les fonctions de transfert en fréquence ne sont pas égales :

$$G(p) \xrightarrow{p=j\omega} G(j\omega)$$

$$G(z) \xrightarrow{z=e^{j\omega T_e}} G(j\omega)$$

La transformation  $p \leftrightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$  va donc se traduire par  $p \leftrightarrow \frac{1 - e^{-j\omega T_e}}{T_e}$ .

Il est clair que  $\frac{1 - e^{-j\omega T_e}}{T_e} \neq j\omega$  mais, pour des valeurs faibles de la fréquence  $\omega/2\pi$ , on peut écrire :

$$\frac{1 - e^{-j\omega T_e}}{T_e} \approx \frac{1 - (1 - j\omega T_e)}{T_e} = j\omega$$

Nous en concluons que le modèle échantillonné censé être équivalent au modèle à temps continu en utilisant l'équivalence à la dérivation est relativement correct pour les basses fréquences.

### c) Exemple

Soit un système à temps continu du premier ordre de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{K}{1 + Tp}$$

Effectuons la transformation proposée :

$$G(z) = \frac{K}{1 + T\left(\frac{1 - z^{-1}}{T_e}\right)} = \frac{K}{1 + \frac{T}{T_e} - \frac{T}{T_e}z^{-1}}$$

**Remarque :** La connaissance précise de la fréquence d'échantillonnage est nécessaire pour disposer de cette équivalence.

Comparons à présent les courbes de réponse fréquentielle de ces deux systèmes. À titre exceptionnel, nous tracerons le gain fréquentiel du système à temps continu  $G(p)$ , non pas sur un diagramme de Bode, mais sur un diagramme à coordonnées cartésiennes linéaires afin de pouvoir comparer directement les deux courbes.

Pour le modèle à temps continu, on a :

$$G(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$$

Traçons cette courbe en pointillés sur la figure 11.15. Rappelons qu'une inflexion se produit à la fréquence  $f = 1/2\pi T$  et notons, par ailleurs, que :

$$G(0) = K$$

$$G\left(\frac{f_e}{2}\right) = \frac{K}{\sqrt{1 + 4\pi^2 T^2 f_e^2}}$$

Pour le modèle à temps discret, on a :

$$G(\omega) = \frac{K}{\left|1 + \frac{T}{T_e} - \frac{T}{T_e} e^{-j\omega T_e}\right|} = \frac{K}{\sqrt{\left(1 + \frac{T}{T_e}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_e}\right)^2 - \frac{2T}{T_e} \left(1 + \frac{T}{T_e}\right) \cos \omega T_e}}$$

Notons que :

$$G\left(\frac{f_e}{2}\right) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 + \frac{2T}{T_e}\right)^2}} = \frac{K}{1 + \frac{2T}{T_e}} = \frac{K}{1 + 2Tf_e}$$

(cette valeur est nettement supérieure à celle fournie par le modèle à temps continu)

et que :

$$G(0) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 + \frac{T}{T_e}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_e}\right)^2 - \frac{2T}{T_e} \left(1 + \frac{T}{T_e}\right)}} = K$$

(cette valeur est identique à celle fournie par le modèle à temps continu).

Traçons (en trait plein) la courbe représentative du gain du système à temps discret sur la même figure. La conclusion est évidente : les deux courbes coïncident aux basses fréquences mais l'équivalence proposée devient de moins en moins précise au fur et à mesure où l'on se rapproche de  $f_e/2$ .

**Remarque :** Rappelons que la courbe de réponse d'un système à temps discret n'a de sens que sur l'intervalle  $\left[0, \frac{f_e}{2}\right]$ .

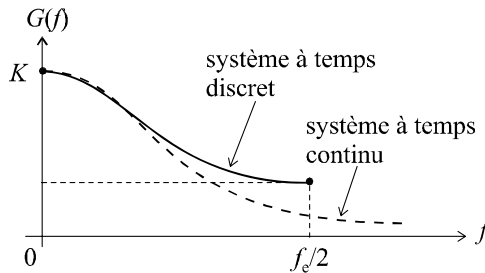


Figure 11.15 Comparaison des deux modèles.

### 11.8.3 Équivalence à l'intégration

#### a) Définition

L'équivalence à l'intégration, appelée également transformation bilinéaire propose une correspondance plus précise que l'équivalence à la dérivation. Nous mentionnons ici cette équivalence sans la justifier :

$$p \leftrightarrow \frac{2(1-z^{-1})}{T_e(1+z^{-1})}$$

#### b) Exemple

Reprenons notre système à temps continu du premier ordre de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{K}{1+Tp}$$

Effectuons la transformation proposée :

$$G(z) = \frac{K}{1+T\left(\frac{2(1-z^{-1})}{T_e(1+z^{-1})}\right)} = \frac{K(1+z^{-1})}{(1+z^{-1}) + \frac{2T}{T_e}(1-z^{-1})}$$

soit :

$$G(z) = \frac{K(1+z^{-1})}{(1+z^{-1}) + \frac{2T}{T_e}(1-z^{-1})} = \frac{K(1+z^{-1})}{1 + \frac{2T}{T_e} + \left(1 - \frac{2T}{T_e}\right)z^{-1}}$$

**Remarque :** La connaissance précise de la fréquence d'échantillonnage est toujours nécessaire pour disposer de cette équivalence.

### 11.8.4 Équivalence à la réponse impulsionnelle. Équivalence modale

Il existe plusieurs méthodes permettant de déterminer des équivalents encore plus précis, en temps discret, d'une fonction de transfert en temps continu. Une d'entre elles consiste à injecter (virtuellement, bien sûr) un signal  $e(t)$  correspondant à une impulsion de Dirac dans le système à temps continu puis à calculer le signal de sortie  $s(t)$ . Cette opération est facilement réalisée à partir de l'équation de fonctionnement du système à temps continu :

$$S(p) = G(p)E(p) = G(p)$$

On échantillonne alors  $s(t)$ , qui n'est rien d'autre que l'original de la fonction de transfert, autrement dit on calcule la suite d'échantillon  $s_k$  qui lui correspond. Sachant que la suite  $e_k$  est connue, on peut calculer les transformées en  $z$  des deux signaux :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k z^{-k} \text{ et } E(z) = 1$$

On en déduit alors :

$$G(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k z^{-k}$$

**Remarque :** La plupart du temps, cette technique génère des calculs longs et fastidieux qui sont susceptibles de faire appel à des outils mathématiques sophistiqués : intégrale de Mellin-Fourier, théorème des résidus, etc.

L'intérêt de ce type de calculs étant assez limité, nous nous contenterons, pour obtenir l'équivalent exact en  $z$  d'une fonction de transfert en  $p$ , d'utiliser la table d'équivalence fournie en annexe D.

**Attention :** Ce type de transformation, s'il permet d'obtenir une représentation temporelle qui « colle » parfaitement à la réalité temporelle, ne fournit cependant pas un équivalent exact entre le modèle à temps continu et le modèle à temps discret, notamment en ce qui concerne la réponse fréquentielle.

On peut également, dans le même esprit de conformité entre les réponses impulsionnelles en temps continu et en temps discret, proposer une approche modale de l'équivalence entre fonction de transfert en temps continu et en temps discret. Cette équivalence est basée sur la concordance des pôles entre les deux fonctions. On utilise alors la transformation :

$$p - p_i \leftrightarrow z - e^{p_i T_e}$$

Toutefois, ce type d'équivalence possède l'inconvénient de ne traiter que des pôles des fonctions. Il est souvent nécessaire d'ajuster leurs numérateurs en fonction de critères particuliers. Moins contraignant mais tout de même important : le problème de la concordance fréquentielle des deux modèles. Les expressions fournies en annexe D correspondent à des fonctions de transfert que l'on a systématiquement adaptées pour que leurs gains statiques concordent.

Ainsi :

$$G(p) = \frac{1}{p - p_i} \leftrightarrow G(z) = \left( -\frac{1}{p_i} \right) \frac{1 - e^{p_i T_e}}{z - e^{p_i T_e}}$$

de sorte que :

$$G(0) = \frac{1}{0 - p_i} \leftrightarrow G(1) = -\left( \frac{1}{p_i} \right) \frac{1 - e^{p_i T_e}}{1 - e^{p_i T_e}}$$

Pour les systèmes simples, l'équivalence à la réponse impulsionnelle et l'équivalence modale fournissent en général, des résultats comparables.

Il est également possible de retrouver ces résultats en utilisant la propriété suivante : si  $g(t)$  est l'original de la fonction de transfert  $G(p)$ , autrement dit sa réponse impulsionnelle, alors on peut calculer la fonction de transfert  $G(z)$  à partir de la transformée de Laplace  $G(p)/p$  de la primitive de  $g(t)$ .

On a :

$$G(z) = \frac{z - 1}{z} \times Z \left[ \frac{G(p)}{p} \right] = \frac{z - 1}{z} \times Z \left[ \int g(t) dt \right]$$

**Attention :** Dans l'expression ci-dessus,  $G(p)/p$  représente la transformée de Laplace d'un signal et non une fonction de transfert. La technique est donc la suivante : à partir de la fonction de transfert  $G(p)$ , on cherche, dans la table de transformées de Laplace (annexe A), le signal temporel correspondant à  $G(p)/p$ . On cherche ensuite dans la table des transformées en  $z$  des signaux (annexe D), la transformée en  $z$  de ce signal temporel. En multipliant le résultat obtenu par  $(z - 1)/z$ , on obtient la fonction de transfert  $G(z)$ . Ne pas confondre transformée en  $z$  d'un signal et fonction de transfert en  $z$ .

### 11.8.5 Équivalence d'une association de plusieurs systèmes

On ne peut déterminer l'équivalent  $G(z)$  d'un système de fonction de transfert en temps continu  $G(p)$  que si ses signaux d'entrée et de sortie sont échantillonnés (figure 11.16).

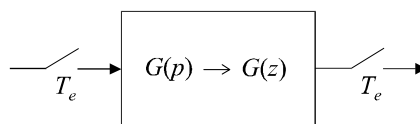
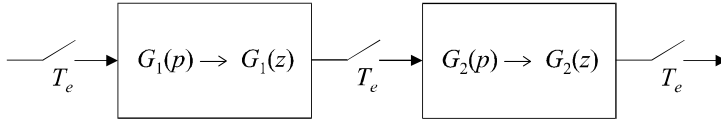


Figure 11.16 Principe de l'équivalence Laplace – Z.

Par conséquent, il est impossible, lorsque deux systèmes sont associés en cascade (figure 11.17) de calculer l'équivalent de la fonction de transfert globale  $G_0(p) = G_1(p)G_2(p)$  par la multiplication pure et simple de  $G_1(z)G_2(z)$ . En effet, en cherchant l'équivalent  $G_0(z)$  de  $G_0(p)$ , on suppose implicitement que seuls les signaux d'entrée et de sortie de  $G_0$  sont échantillonnés. Et lorsque l'on écrit  $G_1(z)G_2(z)$ , on suppose que le signal sortant de  $G_1$  et entrant dans  $G_2$  est lui aussi échantillonné, sinon, on ne pourrait trouver ces deux équivalents.



**Figure 11.17** Principe de l'équivalence Laplace – Z pour une association en cascade.

En conclusion, on ne peut pas déterminer l'équivalent en  $z$  d'une association de plusieurs systèmes en multipliant les deux fonctions de transfert en temps continu, puis en cherchant l'équivalent de la fonction globale ; il faut impérativement calculer d'abord les fonctions de transfert en  $z$  de chaque système, puis multiplier ces fonctions de transfert en  $z$  pour obtenir la fonction de transfert échantillonnée de l'ensemble.

## EXERCICES

### 11.1 Calcul de la transformée en $z$ d'un train d'impulsion

On considère un signal échantillonné  $s^*(t)$  défini par :

$$s_k = 1 \text{ pour } 0 \leq k \leq k_0,$$

$$s_k = 0 \text{ pour } k < 0 \text{ et pour } k > k_0.$$

Soit  $T_e$  la période d'échantillonnage.

Calculer la transformée en  $z$  de ce signal.

### 11.2 Calcul de la transformée en $z$ d'une sinusoïde échantillonnée

On considère un signal échantillonné  $s^*(t)$  résultant de l'échantillonnage, à une période  $T_e$ , du signal défini par :

$$s(t) = \sin \omega t \text{ pour } t > 0,$$

$$s(t) = 0 \text{ pour } t < 0.$$

Calculer la transformée en  $z$  de ce signal.

### 11.3 Fonction de transfert et relation de récurrence

On considère un système échantillonné régi par la relation de récurrence suivante :

$$s_k = 0,5e_{k-1} - 0,6s_{k-1}$$

Calculer la fonction de transfert en  $z$  de ce système et déterminer la valeur finale de l'échantillon de sortie, soit  $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k$  lorsque le signal d'entrée est un échelon unité.

---

### 11.4 Calcul d'une série d'échantillons de sortie

On considère un système échantillonné de fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0,25z^{-1} + 0,25z^{-2}}$$

Établir la relation de récurrence entre les suites d'échantillons d'entrée et de sortie et calculer les 9 premiers échantillons de sortie lorsque le signal d'entrée est un échelon unité. Représenter graphiquement le signal de sortie et calculer sa valeur finale.

---

### 11.5 Représentation graphique d'un signal défini par sa transformée en $z$

On considère un signal échantillonné défini par :

$$S(z) = \frac{0,3z^{-1}}{(1 - 1,7z^{-1} + z^{-2})}$$

Déterminer les premiers éléments de la suite d'échantillons ( $s_k$ ) correspondant à ce signal et en proposer une représentation graphique.

---

### 11.6 Comportement en fréquence d'un système MA

On considère un système échantillonné régi par la relation suivante :

$$s_k = 0,3e_{k-1} + 0,4e_k$$

Calculer la fonction de transfert en  $z$  de ce système et déterminer sa courbe de réponse fréquentielle. On notera  $f_e$  la fréquence d'échantillonnage utilisée.

---

### 11.7 Étude d'un réjecteur de fréquence

On considère un système échantillonné régi par la relation suivante :

$$s_k = e_{k-1} + e_{k+1}$$

Calculer la fonction de transfert en  $z$  de ce système et déterminer sa courbe de réponse fréquentielle. On notera  $f_e$  la fréquence d'échantillonnage utilisée.

---

### 11.8 Calcul d'une transformée de Fourier à temps discret

Soit  $s(t)$  un signal défini par  $s(t) = A$  pour  $0 \leq t \leq \tau$  et nul partout ailleurs, échantillonné à une fréquence  $f_e$ . Calculer la transformée de Fourier à temps discret du signal échantillonné. Calculer son spectre et le tracer pour  $\tau = 19T_e$ .



---

### 11.9 Spectre du signal de sortie d'un système échantillonné

On considère un système échantillonné régi par la fonction de transfert en  $z$  suivante :

$$G(z) = \frac{3(z-1)}{z-0,2}$$

Calculer la transformée de Fourier à temps discret du signal de sortie du système lorsque le signal d'entrée est un échelon unité. Tracer le spectre de ce signal.

---

### 11.10 Discrétisation par équivalence à la dérivation

Un système à temps continu possède une fonction de transfert  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{10}{p(p+10)}$$

En utilisant l'équivalent à la dérivation, déterminer la fonction de transfert en  $z$  d'un système échantillonné possédant le même comportement temporel.

---

### 11.11 Discrétisation par équivalence à l'intégration

Un système à temps continu possède une fonction de transfert  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{2}{(p+1)^3}$$

En utilisant l'équivalent à l'intégration, déterminer la fonction de transfert en  $z$  d'un système échantillonné possédant le même comportement temporel.

---

### 11.12 Comparaison des différentes équivalences temps continu - temps discret

Un système à temps continu possède une fonction de transfert  $G(p)$  définie par :

$$G(p) = \frac{3}{(p+1)}$$

Calculer successivement les équivalents en  $z$ , à la dérivation et à l'intégration de ce système. Rechercher, dans la table fournie en annexe, l'équivalent de ce système. On choisira une fréquence d'échantillonnage  $T_e = 0,5$  s.

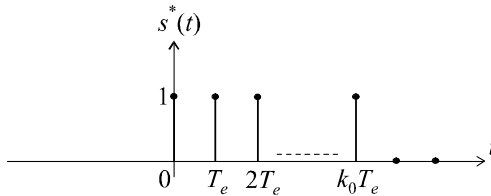
Calculer et tracer sur un même diagramme, pour chacun des trois équivalents, les premiers éléments de la suite d'échantillons de sortie lorsque le signal d'entrée est un échelon unité. Calculer dans les trois cas la valeur finale de l'échantillon de sortie.

Calculer et tracer les trois courbes de réponse fréquentielles et conclure.

## SOLUTIONS

**11.1** Le signal  $s^*(t)$ , que nous pouvons représenter graphiquement (figure 11.18) peut être écrit sous la forme d'une différence de deux signaux :

$$s^*(t) = s_1^*(t) - s_2^*(t)$$



**Figure 11.18** Train d'impulsions.

Le signal  $s_1^*(t)$  est un échelon unitaire et le signal  $s_2^*(t)$  est un échelon unitaire retardé de  $k_0 + 1$  échantillons (soit d'un temps  $(k_0 + 1) T_e$ ).

Par conséquent :

$$S(z) = S_1(z) - S_2(z)$$

avec :

$$S_1(z) = \frac{z}{z - 1}$$

et :

$$S_2(z) = \frac{z}{z - 1} \cdot z^{-(k_0+1)}$$

d'où :

$$S(z) = \frac{z - z^{-k_0}}{z - 1}$$

**11.2** Décomposons le signal sinusoïdal en une somme d'exponentielles :

$$s(t) = \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

La transformation en  $z$  étant linéaire, on a :

$$S(z) = \frac{1}{2j} \left[ Z \left( e^{j\omega t} \right) - Z \left( e^{-j\omega t} \right) \right]$$

soit :

$$S(z) = \frac{1}{2j} \left[ \frac{z}{z - e^{j\omega T_e}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega T_e}} \right]$$

$$S(z) = \frac{1}{2j} \frac{z(z - e^{-j\omega T_e} - z + e^{j\omega T_e})}{(z - e^{j\omega T_e})(z - e^{-j\omega T_e})} = \frac{1}{2j} \frac{z(e^{j\omega T_e} - e^{-j\omega T_e})}{[z^2 - z(e^{j\omega T_e} + e^{-j\omega T_e}) + 1]}$$

d'où :

$$S(z) = \frac{z \sin \omega T_e}{z^2 - 2z \cos \omega T_e + 1}$$

► Résolution avec Mathematica

La commande : `Ztransform[Sin[Omega * T * k],k,z]` permet d'obtenir immédiatement le résultat.

**11.3** La fonction de transfert en  $z$  se détermine immédiatement à partir de l'équation de récurrence :

$$s_k = 0,5e_{k-1} - 0,6s_{k-1} \Leftrightarrow S(z) = 0,5z^{-1}E(z) - 0,6z^{-1}S(z)$$

d'où :

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{0,5z^{-1}}{1 + 0,6z^{-1}} = \frac{0,5}{z + 0,6}$$

Lorsqu'on injecte un échelon unité à l'entrée de ce système, on a :

$$S(z) = G(z)E(z) = \frac{0,5}{z + 0,6} \cdot \frac{z}{z - 1}$$

La valeur finale du signal de sortie est donc :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) S(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{z - 1}{z} \cdot \frac{0,5}{z + 0,6} \cdot \frac{z}{z - 1} \right)$$

soit :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{0,5}{z + 0,6} \right) = 0,3125$$

► Résolution avec Mathematica

La commande `InverseZTransform[0,5 * z / ((z + 0,6) (z - 1)), z, k]` fournit immédiatement la transformée inverse de  $S(z)$ , autrement dit l'expression des  $s_k$  :

$$s_k = 0,3125 (1 - (-0,6)^k)$$

La limite de  $s_k$  lorsque  $k \rightarrow \infty$  s'obtient aisément :

$$\text{Limit} \left[ 0,3125 (1 - (-0,6)^k), k \rightarrow \text{Infinity} \right], \text{ qui renvoie la valeur } 0,3125.$$

**11.4** La fonction de transfert en  $z$  nous conduit immédiatement à l'équation de récurrence :

$$G(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0,25z^{-1} + 0,25z^{-2}} \Leftrightarrow S(z) [1 - 0,25z^{-1} + 0,25z^{-2}] = E(z) [1 - z^{-1}]$$

d'où :

$$s_k - 0,25s_{k-1} + 0,25s_{k-2} = e_k - e_{k-1}$$

Nous retiendrons :

$$s_k = e_k - e_{k-1} + 0,25s_{k-1} - 0,25s_{k-2}$$

Calculons les échantillons de sortie (tableau 11.1) et représentons les graphiquement (figure 11.19).

**Tableau 11.1** CALCUL DE LA SUITE D'ÉCHANTILLONS.

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$t$	0	$T_e$	$2T_e$	$3T_e$	$4T_e$	$5T_e$	$6T_e$	$7T_e$	$8T_e$
$e_k$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$s_k$	1	0,250	-0,188	-0,109	0,020	0,032	0,003	-0,007	-0,003

Calculons pour finir la valeur finale du signal :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) S(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) G(z)E(z)$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{z - 1}{z} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0,25z^{-1} + 0,25z^{-2}} \cdot \frac{z}{z - 1} \right)$$

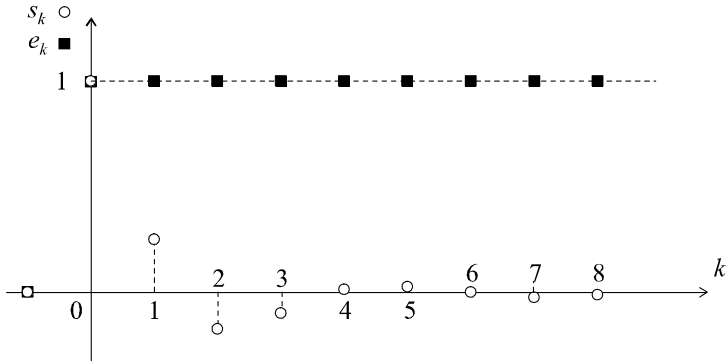


Figure 11.19 Représentation temporelle de la sortie du système.

La valeur finale du signal de sortie est donc :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = 0$$

Cette valeur est bien évidemment conforme aux observations, relevées sur le graphe de la figure 11.19.

► Résolution avec Mathematica

$$\text{Limit} \left[ \text{InverseZTransform} \left[ \frac{1}{1 - 0,25z^{-1} + 0,25z^{-2}} \right], z, k \right], k \rightarrow \text{Infinity} ]$$

11.5 Nous pouvons considérer qu'un signal quelconque de transformée en  $z$  connue est la sortie d'un système de fonction de transfert  $G(z) = S(z)$  lorsque ce système est sollicité, à son entrée, par une impulsion unité. En effet, on a dans ce cas :

$$E(z) = 1 \Rightarrow S(z) = G(z)E(z) = G(z)$$

Il suffit donc, dans ces conditions, de rechercher l'équation de récurrence correspondant à cette fonction de transfert et de calculer la suite d'échantillons de sortie du système lorsque le signal d'entrée est une impulsion unité.

On a :

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{0,3z^{-1}}{1 - 1,7z^{-1} + z^{-2}}$$

d'où :

$$S(z) \left[ 1 - 1,7z^{-1} + z^{-2} \right] = E(z) \left[ 0,3z^{-1} \right]$$

soit :

$$s_k - 1,7s_{k-1} + s_{k-2} = 0,3e_{k-1}$$

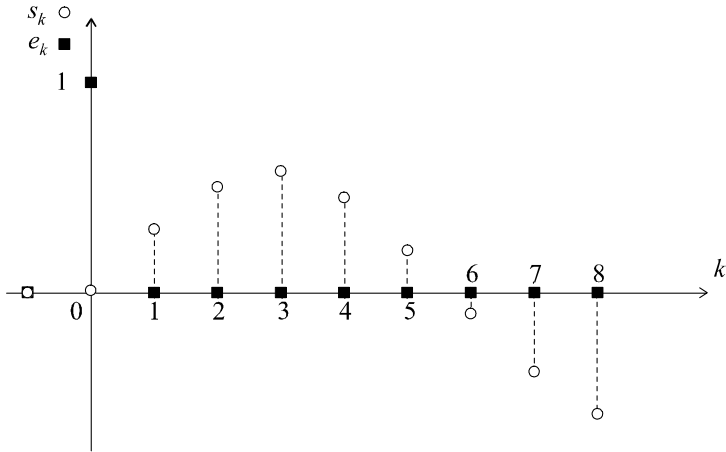
Finalement :

$$s_k = 0,3e_{k-1} + 1,7s_{k-1} - s_{k-2}$$

Simulons le fonctionnement du système en appliquant cette relation à une impulsion unité.

**Tableau 11.2** SIMULATION DE LA SUITE D'ÉCHANTILLONS.

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$t$	0	$T_e$	$2T_e$	$3T_e$	$4T_e$	$5T_e$	$6T_e$	$7T_e$	$8T_e$
$e_k$	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$s_k$	0	0,300	0,510	0,567	0,454	0,205	-0,106	-0,385	-0,548



**Figure 11.20** Représentation temporelle de la sortie du système.

Le graphe de la figure 11.19 peut être affiché par Mathematica à l'aide de la commande :

$$\text{DiscretePlot} \left[ 0,3125 \left( 1 - (-0,6)^k \right), \{k, 1, 8\} \right]$$

**11.6** L'équation de récurrence nous donne immédiatement la fonction de transfert :

$$s_k = 0,3e_{k-1} + 0,4e_k \Rightarrow S(z) = 0,3E(z)z^{-1} + 0,4E(z)$$

soit :

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = 0,3z^{-1} + 0,4$$

Posons :

$$z = e^{j\omega T_e}$$

On obtient :

$$G(j\omega) = 0,3 e^{-j\omega T_e} + 0,4$$

soit :

$$G(j\omega) = 0,3 (\cos \omega T_e - j \sin \omega T_e) + 0,4$$

alors :

$$G(\omega) = \sqrt{[0,3 \cos \omega T_e + 0,4]^2 + 0,09 \sin^2 \omega T_e}$$

$$G(\omega) = \sqrt{0,25 + 0,24 \cos \omega T_e}$$

L'étude sommaire de cette fonction, sur l'intervalle de fréquences  $\left[ 0, \frac{f_e}{2} \right]$ , donc sur l'intervalle de pulsations

$\left[ 0, \frac{2\pi f_e}{2} \right] = \left[ 0, \frac{\pi}{T_e} \right]$ , nous conduit aux observations suivantes :

$$G(0) = \sqrt{0,25 + 0,24} = 0,7$$

Par ailleurs :

$$G\left(\frac{\pi}{T_e}\right) = \sqrt{0,25 - 0,24} = 0,1$$

De plus, la fonction est strictement décroissante sur son domaine de variations. Quelques points peuvent bien évidemment être calculés de manière précise pour affiner le tracé (figure 11.21).

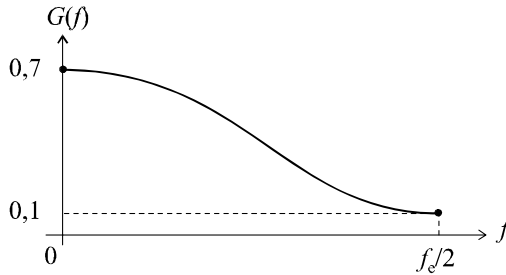


Figure 11.21 Courbe de réponse fréquentielle du système.

11.7 L'équation de récurrence nous donne immédiatement la fonction de transfert :

$$s_k = e_{k-1} + e_{k+1} \Rightarrow S(z) = E(z)z^{-1} + E(z)z$$

soit :

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = z^{-1} + z$$

Posons :

$$z = e^{j\omega T_e}$$

On obtient :

$$G(j\omega) = e^{-j\omega T_e} + e^{j\omega T_e} = 2 \cos \omega T_e \Rightarrow G(\omega) = 2 |\cos \omega T_e|$$

L'étude sommaire de cette fonction, sur l'intervalle de fréquences  $\left[0, \frac{f_c}{2}\right]$ , donc sur l'intervalle de pulsations

$\left[0, \frac{2\pi f_c}{2}\right] = \left[0, \frac{\pi}{T_e}\right]$ , nous conduit aux observations suivantes :

$$G(0) = 2 \text{ et } G\left(\frac{\pi}{T_e}\right) = 2$$

De plus :

$$G\left(\frac{\pi}{2T_e}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Il s'agit donc bien d'un dispositif réjecteur, étant donné que le gain, pour la fréquence particulière  $f_c/4$ , est nul. Cette étude sommaire nous conduit à la courbe de réponse représentée sur la figure 11.22.

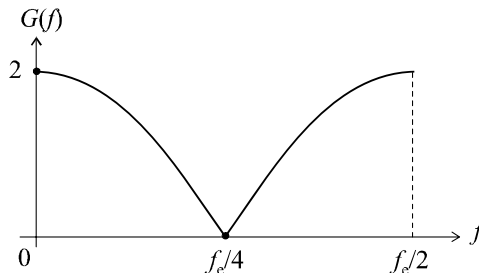


Figure 11.22 Courbe de réponse fréquentielle du système.

11.8 La figure 11.23 représente, d'une part le signal continu et d'autre part, le signal échantillonné à la fréquence  $f_e$ .

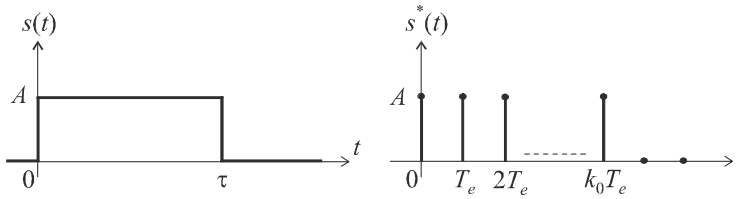


Figure 11.23 Signal original et signal échantillonné.

Par définition, la transformée de Fourier en temps discret est obtenue à partir de la transformée en  $z$  du signal. Or, nous connaissons cette transformée (exercice 11.1) :

$$S(z) = \frac{z - z^{-k_0}}{z - 1}$$

Ici, on a :

$$k_0 \approx \frac{\tau}{T_e} \Rightarrow S(z) = \frac{z - z^{-\frac{\tau}{T_e}}}{z - 1}$$

d'où :

$$\sigma(f) = \frac{e^{j\omega T_e} - e^{-j\omega\tau}}{e^{j\omega T_e} - 1}$$

Le spectre du signal est obtenu en calculant le module de cette expression :

$$|\sigma(f)| = \frac{|e^{j\omega T_e} - e^{-j\omega\tau}|}{|e^{j\omega T_e} - 1|} = \frac{|\cos \omega T_e - \cos \omega\tau + j(\sin \omega T_e + \sin \omega\tau)|}{|\cos \omega T_e - 1 + j \sin \omega T_e|}$$

$$|\sigma(f)| = \frac{\sqrt{(\cos \omega T_e - \cos \omega\tau)^2 + (\sin \omega T_e + \sin \omega\tau)^2}}{\sqrt{(\cos \omega T_e - 1)^2 + (\sin \omega T_e)^2}}$$

soit :

$$|\sigma(f)| = \frac{\sqrt{2 - 2 \cos \omega T_e \cos \omega\tau + 2 \sin \omega T_e \sin \omega\tau}}{\sqrt{2 - 2 \cos \omega T_e}}$$

d'où :

$$|\sigma(f)| = \frac{\sqrt{2 - 2 \cos (T_e + \tau) \omega}}{\sqrt{2 - 2 \cos \omega T_e}} = \frac{\sqrt{4 \sin^2 \frac{(T_e + \tau) \omega}{2}}}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\omega T_e}{2}}} = \left| \frac{\sin \frac{(T_e + \tau) \omega}{2}}{\sin \frac{\omega T_e}{2}} \right|$$

Ce spectre est à tracer sur l'intervalle de fréquences  $\left[0, \frac{f_e}{2}\right]$ , donc sur l'intervalle de pulsations  $\left[0, \frac{2\pi f_e}{2}\right] = \left[0, \frac{\pi}{T_e}\right]$ . On remarquera, notamment, que le spectre s'annule pour les fréquences telles que :

$$\sin \frac{(T_e + \tau) \omega}{2} = 0 \Rightarrow \frac{(T_e + \tau) \omega}{2} = k\pi \Rightarrow \omega = \frac{2k\pi}{T_e + \tau} \Rightarrow f = \frac{k}{T_e + \tau}$$

Avec  $\tau = 19T_e$ , on a :

$$|\sigma(f)| = \left| \frac{\sin 10\omega}{\sin \frac{\omega T_e}{2}} \right|$$

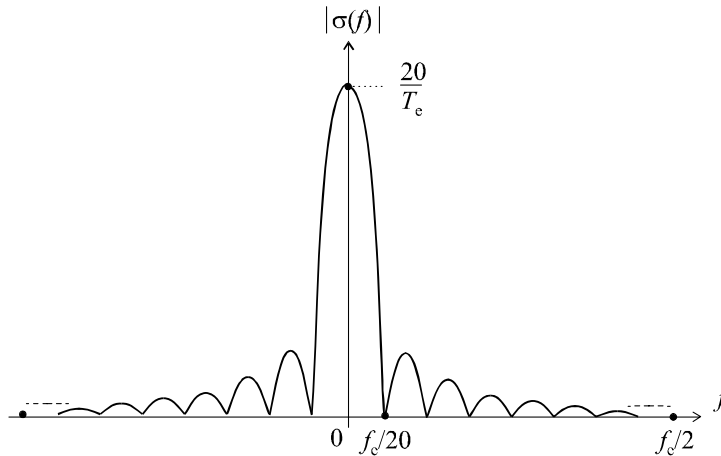
Dans ce cas, les fréquences pour lesquelles le spectre s'annule ont pour expressions :

$$\omega = \frac{k\pi}{10} \Rightarrow f = \frac{k}{20}$$

De plus :

$$|\sigma(0)| \rightarrow \left| \frac{10\omega}{\frac{\omega T_e}{2}} \right| = \frac{20}{T_e}$$

L'étude précise, ou le tracé point par point, de cette fonction, nous conduit au graphe de la figure 11.24.



**Figure 11.24** Spectre du signal.

Ce spectre est bien sûr à comparer au spectre continu du même signal étudié dans l'exercice 2.4.

**11.9** Par définition, la transformée de Fourier en temps discret est obtenue à partir de la transformée en  $z$  du signal.

Or :

$$S(z) = G(z)E(z) = \frac{3z}{z - 0,6}$$

d'où :

$$\sigma(f) = \frac{3 e^{j\omega T_e}}{(e^{j\omega T_e} - 0,6)}$$

Le spectre du signal est obtenu en calculant le module de cette expression :

$$|\sigma(f)| = \frac{3}{|e^{j\omega T_e} - 0,2|}$$

$$|\sigma(f)| = \frac{3}{\sqrt{(\cos \omega T_e - 0,6)^2 + \sin^2 \omega T_e}}$$

soit :

$$|\sigma(f)| = \frac{3}{\sqrt{1,36 - 1,2 \cos \omega T_e}}$$

On remarque d'une part que :

$$|\sigma(0)| = 7,5$$

et d'autre part, que :

$$\left| \sigma\left(\frac{f_c}{2}\right) \right| = \left| \sigma\left(\omega = \frac{\pi}{T_e}\right) \right| = \frac{3}{\sqrt{2,56}} = 1,875$$

La fonction étant strictement décroissante, son tracé (figure 11.25) ne pose aucune difficulté.



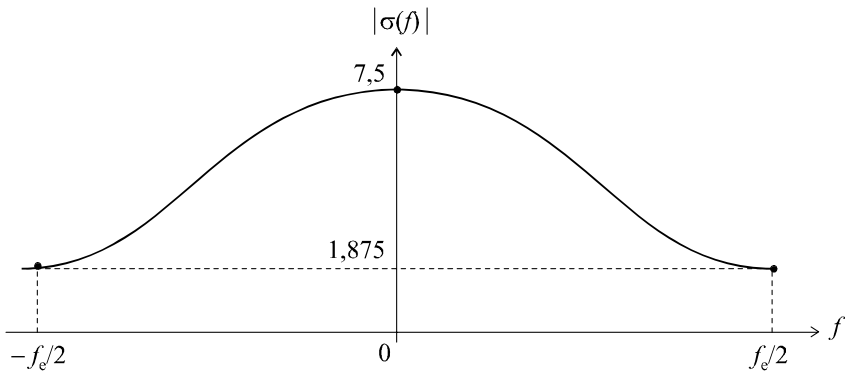


Figure 11.25 Spectre du signal de sortie.

11.10 L'équivalence à la dérivation est définie par :

$$p \leftrightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

On a donc :

$$G(p) = \frac{10}{p(p + 10)} \rightarrow G(z) = \frac{10}{\frac{1 - z^{-1}}{T_e} \left( \frac{1 - z^{-1}}{T_e} + 10 \right)}$$

soit :

$$G(z) = \frac{10T_e^2}{(1 - z^{-1})(1 - z^{-1} + 10T_e)} = \frac{10T_e^2}{z^{-2} - z^{-1}(2 + 10T_e) + 1 + 10T_e}$$

11.11 L'équivalence à l'intégration est définie par :

$$p \leftrightarrow \frac{2(1 - z^{-1})}{T_e(1 + z^{-1})}$$

On a donc :

$$G(p) = \frac{2}{(p + 1)^3} \rightarrow G(z) = \frac{2}{\left( \frac{2(1 - z^{-1})}{T_e(1 + z^{-1})} + 1 \right)^3}$$

soit :

$$G(z) = \frac{2T_e^3(1 + z^{-1})^3}{[2(1 - z^{-1}) + T_e(1 + z^{-1})]^3}$$

11.12 Calculons successivement les fonctions de transfert en  $z$ ,  $G_1(z)$  et  $G_2(z)$  définies respectivement comme les équivalents à la dérivation et à l'intégration de la fonction de transfert en temps continu  $G(p)$ .

On a :

$$G(p) = \frac{3}{p + 1} \rightarrow G_1(z) = \frac{3}{\frac{1 - z^{-1}}{T_e} + 1} = \frac{3T_e}{1 + T_e - z^{-1}} = \frac{1,5}{1,5 - z^{-1}}$$

et :

$$G(p) = \frac{3}{p + 1} \rightarrow G_2(z) = \frac{3}{\frac{2(1 - z^{-1})}{T_e(1 + z^{-1})} + 1} = \frac{3T_e(1 + z^{-1})}{2(1 - z^{-1}) + T_e(1 + z^{-1})}$$

soit : 
$$G_2(z) = \frac{3T_e (1 + z^{-1})}{2 + T_e + (T_e - 2)z^{-1}} = \frac{1,5 (1 + z^{-1})}{2,5 - 1,5z^{-1}}$$

Par ailleurs, d'après la table des équivalents, on a :

$$G_3(z) = \frac{3 (1 - e^{-T_e})}{z - e^{-T_e}} = \frac{1,2}{z - 0,6}$$

Déterminons à présent les équations de récurrence correspondant à ces trois fonctions de transfert et calculons les premiers éléments de la suite d'échantillons de sortie.

On a (tableau 11.3) : 
$$G_1(z) = \frac{1,5}{1,5 - z^{-1}} \Rightarrow s_k = e_k + 0,667s_{k-1}$$

**Tableau 11.3** ÉCHANTILLONS DE SORTIE POUR L'ÉQUIVALENT À LA DÉRIVATION.

<i>k</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>t</i> (s)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
<i>e<sub>k</sub></i>	1	1	1	1	1	1	1	1	1
<i>s<sub>k</sub></i>	1	1,67	2,11	2,41	2,61	2,74	2,83	2,86	2,92

On a également (tableau 11.4) :

$$G_2(z) = \frac{1,5 (1 + z^{-1})}{2,5 - 1,5z^{-1}} \Rightarrow s_k = 0,6e_k + 0,6e_{k-1} + 0,6s_{k-1}$$

**Tableau 11.4** ÉCHANTILLONS DE SORTIE POUR L'ÉQUIVALENT À L'INTÉGRATION.

<i>k</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>t</i> (s)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
<i>e<sub>k</sub></i>	1	1	1	1	1	1	1	1	1
<i>s<sub>k</sub></i>	0,6	1,56	2,14	2,48	2,69	2,81	2,89	2,93	2,96

Pour finir (tableau 11.5) : 
$$G_3(z) = \frac{1,2}{z - 0,6} \Rightarrow s_k = 1,2e_{k-1} + 0,6s_{k-1}$$

**Tableau 11.5** ÉCHANTILLONS DE SORTIE POUR L'ÉQUIVALENT À LA RÉPONSE IMPULSIONNELLE.

<i>k</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>t</i> (s)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
<i>e<sub>k</sub></i>	1	1	1	1	1	1	1	1	1
<i>s<sub>k</sub></i>	0	1,2	1,92	2,35	2,61	2,77	2,86	2,92	2,95

Représentons, sur le même diagramme, les trois réponses temporelles ainsi obtenues (figure 11.26). Le résultat est plus qu'éloquent : les trois réponses sont très proches les unes des autres, hormis les premiers instants d'échantillonnage.

De plus, chaque suite semble converger vers la même limite  $s_\infty = 3$ , ce qui est confirmé par le calcul des trois valeurs finales :

$$s_{1\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) S_1(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \left( \frac{z-1}{z} \right) G_1(z) \cdot \frac{z}{z-1} \right] = \frac{1,5}{1,5-1} = 3$$

$$s_{2\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) S_2(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \left( \frac{z-1}{z} \right) G_2(z) \cdot \frac{z}{z-1} \right] = \frac{1,5 \times 2}{2,5-1,5} = 3$$

$$s_{3\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) S_3(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \left( \frac{z-1}{z} \right) G_3(z) \cdot \frac{z}{z-1} \right] = \frac{1,2}{1-0,6} = 3$$

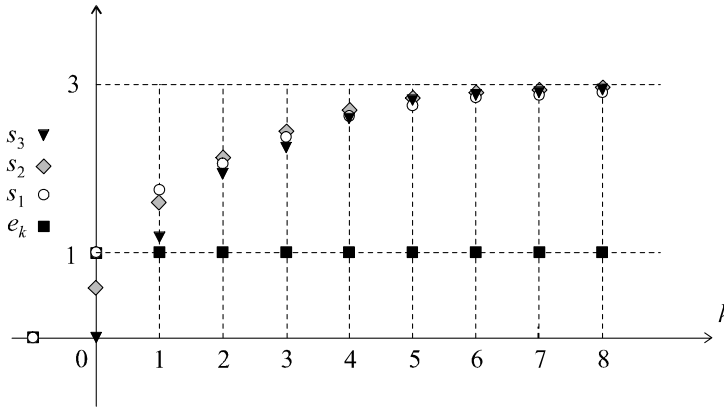


Figure 11.26 Réponses temporelles comparées.

Procédons pour terminer, aux trois études fréquentielles.

On a :

$$G_1(z) = \frac{1,5}{1,5 - z^{-1}} \Rightarrow G_1(j\omega) = \frac{1,5}{1,5 - e^{-j\omega T_e}}$$

d'où :

$$G_1(\omega) = \frac{1,5}{\sqrt{(1,5 - \cos \omega T_e)^2 + \sin^2 \omega T_e}} = \frac{1,5}{\sqrt{3,25 - 3 \cos \omega T_e}}$$

On remarque que  $G_1(0) = 3$  et que  $G_1\left(\frac{\pi}{T_e}\right) = 0,6$ .

Par ailleurs :

$$G_2(z) = \frac{1,5(1+z^{-1})}{2,5 - 1,5z^{-1}} \Rightarrow G_2(j\omega) = \frac{1,5(1+e^{-j\omega T_e})}{2,5 - 1,5e^{-j\omega T_e}}$$

d'où :

$$G_2(\omega) = \frac{1,5\sqrt{(1+\cos \omega T_e)^2 + \sin^2 \omega T_e}}{\sqrt{(2,5 - 1,5 \cos \omega T_e)^2 + 2,25 \sin^2 \omega T_e}} = \frac{1,5\sqrt{2+2\cos \omega T_e}}{\sqrt{8,5 - 7,5 \cos \omega T_e}}$$

On note que  $G_2(0) = 3$  et que  $G_2\left(\frac{\pi}{T_e}\right) = 0$ .

Pour finir :

$$G_3(z) = \frac{1,2}{z - 0,6} \Rightarrow G_3(j\omega) = \frac{1,2}{e^{j\omega T_e} - 0,6}$$

d'où :

$$G_3(\omega) = \frac{1,2}{\sqrt{(\cos \omega T_e - 0,6)^2 + \sin^2 \omega T_e}} = \frac{1,2}{\sqrt{1,36 - 1,2 \cos \omega T_e}}$$

On a, ici :  $G_3(0) = 3$  et  $G_3\left(\frac{\pi}{T_e}\right) = 0,75$ .

Traçons alors ces trois courbes de réponse, toutes strictement décroissantes, sur l'intervalle de pulsations  $\left[0; \frac{2\pi f_e}{2}\right] = \left[0; \frac{\pi}{T_e}\right] = [0; 6,28 \text{ rad/s}]$  (figure 11.27). En pointillé figure la courbe de réponse correspondant au système initial en temps continu.

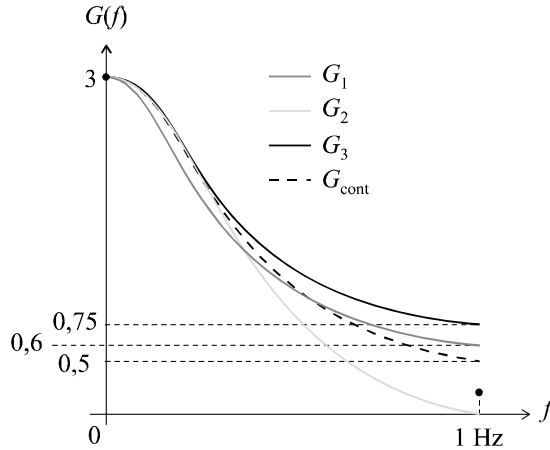


Figure 11.27 Courbes de réponse fréquentielle comparées.

La conclusion est évidente : l'équivalence à la dérivation, bien que très simple, fournit une approximation très satisfaisante, tout comme l'équivalence fournie par la table. En revanche, on note une divergence très sensible aux hautes fréquences, entre la réponse du modèle à temps continu et du modèle échantillonné obtenu par équivalence à l'intégration. Cela est dû à la distorsion fréquentielle introduite par la transformation bilinéaire.

Nous utiliserons donc plus volontiers l'équivalence à la dérivation ou l'équivalence fournie par les tables et réserverons l'équivalence à l'intégration à des cas très particuliers sur lesquels il est inutile de s'étendre pour le moment.

## Chapitre 12

# Stabilité et performances des systèmes échantillonnés asservis

### 12.1 MISE EN ÉQUATION DES ASSERVISSEMENTS ÉCHANTILLONNÉS

#### 12.1.1 Fonction de transfert en boucle fermée

Tout comme les systèmes continus, les systèmes échantillonnés peuvent être asservis selon le même principe de la boucle fermée (figure 12.1).

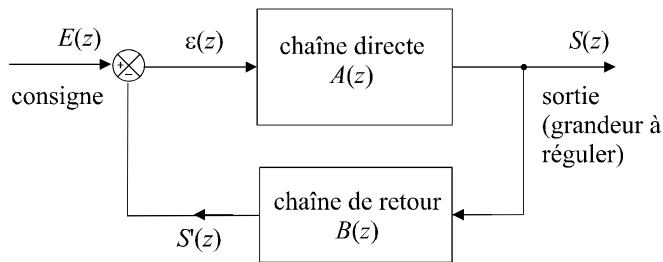


Figure 12.1 Schéma général d'un système échantillonné asservi.

La chaîne directe et la chaîne de retour sont modélisées par leurs fonctions de transfert en  $z$  et les signaux d'entrée et de sortie sont bien évidemment échantillonnés à une fréquence  $f_e$  et possèdent chacun une transformée en  $z$  :  $E(z)$  et  $S(z)$ . L'écart  $\varepsilon(t)$  n'échappe pas à la règle. Soit  $\varepsilon(z)$  sa transformée en  $z$ .

Tout comme dans le cas des systèmes à temps continu, on définit les fonctions de transfert en boucle ouverte  $G(z)$  et en boucle fermée  $H(z)$  par :

$$G(z) = A(z)B(z)$$

et :

$$H(z) = \frac{A(z)}{1 + A(z)B(z)}$$

Dans le cas d'une boucle à retour unitaire, on a  $B(z) = 1$  et, par conséquent :

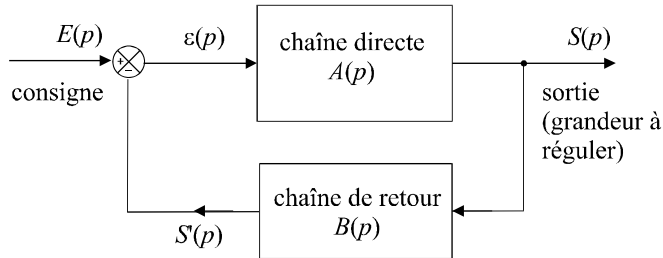
$$G(z) = A(z)$$

soit :

$$H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}$$

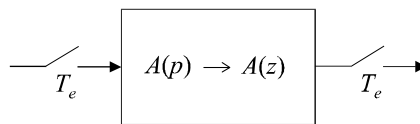
### 12.1.2 Relation temps continu – temps discret en boucle fermée

Considérons un système à temps continu asservi, selon le schéma général de la figure 12.2.



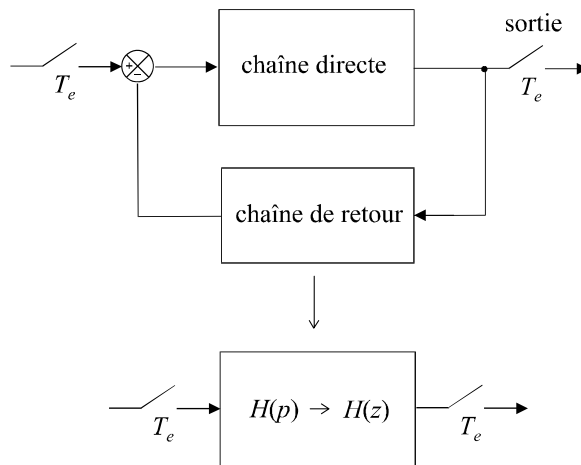
**Figure 12.2** Schéma général d'un système à temps continu asservi.

Chacun des sous-systèmes constitutifs  $A(p)$  et  $B(p)$  possède un équivalent en temps discret  $A(z)$  et  $B(z)$ , comme cela a été étudié au chapitre précédent. Ces équivalents supposent que chacun de ces sous-systèmes possède une entrée et une sortie échantillonnées (figure 12.3).



**Figure 12.3** Conditions d'équivalence Laplace – Z.

Si on se contentait, dans le schéma de la figure 12.2, d'échantillonner uniquement le signal de consigne et le signal de sortie, on obtiendrait le schéma de la figure 12.4, mais, dans cette configuration, le système obtenu serait complètement différent de celui auquel on s'attend et qui est représenté sur la figure 12.5. En effet, il n'est pas possible de déterminer l'équivalent  $A(z)$  de  $A(p)$  si son signal d'entrée n'est pas échantillonné. Il est donc nécessaire de disposer d'un modèle dans lequel chaque signal est échantillonné.



**Figure 12.4** Échantillonnage de la consigne et de la sortie.

La principale conséquence de cette constatation est le mode de calcul de la fonction de transfert en boucle fermée d'un système asservi à temps discret lorsque celui-ci est déterminé à partir d'un modèle à temps continu : il n'est pas possible de déterminer la fonction de transfert en  $z$  en boucle fermée à partir de l'équivalence de la fonction de transfert en boucle fermée en temps continu  $H(p)$ . Il faut déterminer indépendamment les fonctions de transfert en  $z$  de chaque sous-système (figure 12.5) et calculer la fonction de transfert en boucle fermée  $H(z)$  à partir de l'expression :

$$H(z) = \frac{A(z)}{1 + A(z)B(z)}$$

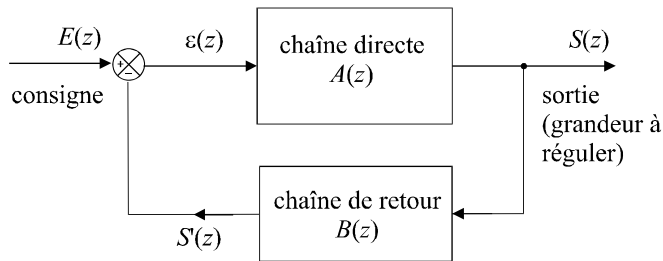


Figure 12.5 Schéma de l'asservissement échantillonné attendu.

## 12.2 STABILITÉ DES ASSERVISSEMENTS ÉCHANTILLONNÉS

### 12.2.1 Critère mathématique de stabilité

#### a) Énoncé du critère

Pour les systèmes à temps discret, la définition de la stabilité reste la même : à une entrée finie doit correspondre une sortie finie. Considérons un système échantillonné défini par la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_pz^{-p}}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_qz^{-q}} = \frac{a_0 \prod_{i=1}^p (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{j=1}^q (1 - p_j z^{-1})}$$

Les  $z_i$  et les  $p_j$  sont respectivement les zéros et les pôles de la fonction de transfert.

Plaçons un échelon unité à l'entrée de ce système, soit :  $E(z) = \frac{z}{z-1}$ .

On a alors :

$$S(z) = H(z)E(z) = \frac{a_0 \prod_{i=1}^p (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{j=1}^q (1 - p_j z^{-1})} \cdot \frac{z}{z-1}$$

D'après le théorème de la valeur finale, on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{z-1}{z} S(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{a_0 \prod_{i=1}^p (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{j=1}^q (1 - p_j z^{-1})} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} H(z)$$

Or le système sera stable si et seulement si  $s_k$  tend vers une valeur finie.

La fonction de transfert peut naturellement être décomposée en éléments simples :

$$H(z) = \sum \frac{\alpha_j}{\left(1 - \frac{p_j}{z}\right)}$$

et il faudra qu'aucun de ces termes ne tende vers l'infini lorsque  $z \rightarrow 1$  pour assurer la stabilité du système.

Une première analyse nous montre que s'il existe un pôle réel égal à 1, la sortie  $s_k$  ne pourra converger. Toutefois, les pôles  $p_j$  peuvent être complexes et dans ce cas, on peut montrer qu'un pôle de module 1 entraînera également l'instabilité du système.

On sait par ailleurs que le domaine de convergence (donc d'existence) de la transformée en  $z$  est tel que  $|z| > r$ . Pour faire tendre  $z$  vers 1, il faut bien évidemment que le seuil de convergence  $r$  soit inférieur à 1.

Le seul moyen de garantir qu'aucun terme de la décomposition en éléments simples ne diverge lorsque  $z$  tend vers 1 est donc de n'avoir que des pôles  $p_j$  dont le module sera strictement inférieur à 1.

**Remarque :** Ce développement théorique ne constitue pas, à proprement parler, une démonstration, mais il permet d'avoir une approche simple du critère mathématique de stabilité.

Généralisons donc ce résultat :

Un système échantillonné est stable si et seulement si tous les pôles  $p_j$  de sa fonction de transfert sont tels que  $|p_j| < 1$ .

On traduit souvent cette propriété par la proposition suivante qui concerne la position des pôles dans le plan complexe : un système est stable si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert se trouvent tous à l'intérieur du cercle de rayon 1.

*b) Exemple : stabilité en boucle ouverte d'un système AR du premier ordre*

On considère un système régi, en boucle ouverte, par une équation de récurrence d'ordre 1 :

$$s_k = be_k + as_{k-1}$$

En appliquant la transformée en  $z$ , on obtient :

$$S(z) = bE(z) + az^{-1}S(z)$$

d'où :

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{b}{1 - az^{-1}}$$

L'unique pôle de la fonction de transfert est  $a$ . Par conséquent, la condition de stabilité est :

$$|a| < 1$$

*c) Exemple : stabilité en boucle fermée d'un système AR du premier ordre*

On considère un système échantillonné de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(z)$  placé dans une boucle à retour unitaire (figure 12.6), avec :

$$G(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}} = \frac{bz}{z - a}$$

Les paramètres  $b$  et  $a$  sont positifs. De plus, on supposera que  $a < 1$ .

Rappelons que ce système correspond, en boucle ouverte, à l'équation de récurrence suivante :

$$s_k = be_k + as_{k-1}$$



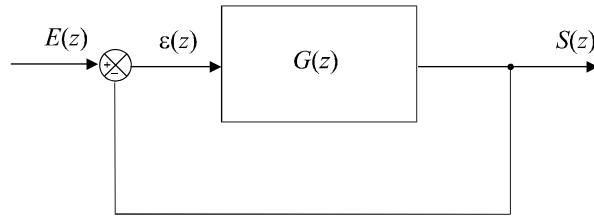


Figure 12.6 Schéma d'un asservissement échantillonné à retour unitaire.

Étudions sa stabilité en boucle fermée.

$$H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{\frac{bz}{z-a}}{1 + \frac{bz}{z-a}} = \frac{bz}{(b+1)z-a}$$

Le système est stable en boucle fermée si l'unique pôle de cette fonction de transfert est inférieur à 1 :

$$\frac{a}{b+1} < 1$$

### 12.2.2 Critère algébrique de Jury

Pour les systèmes à temps continu, nous avons mis en évidence l'impossibilité, pour les systèmes d'ordre élevé ou possédant des paramètres variables, d'utiliser le critère mathématique et c'est pour cela que le critère de Routh avait été introduit. Il en est de même pour les systèmes échantillonnés : il existe un critère algébrique, dit de Jury, qui permet de diagnostiquer la stabilité d'un système sans avoir à calculer ses pôles. Il ressemble beaucoup au critère de Routh et est aussi simple à utiliser. Attention, toutefois, les calculs sont légèrement différents.

#### a) Énoncé du critère

Soit  $H(z)$  la fonction de transfert en boucle fermée d'un système échantillonné asservi :

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_q z^{-q}}$$

En multipliant le dénominateur de cette fonction de transfert par  $z^q$ , on obtient :

$$H(z) = \frac{z^q (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p})}{b_0 z^q + b_1 z^{q-1} + b_2 z^{q-2} + \dots + b_{q-2} z^2 + b_{q-1} z + b_q} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

**Remarque :** Il faut s'arranger pour que  $b_0$  soit positif.

À partir de l'expression  $D(z)$  du dénominateur de  $H(z)$ , ainsi placé sous la forme d'un polynôme en  $z$ , on construit un tableau similaire à celui du critère de Routh, de la manière suivante :

On place toute la suite de coefficients  $b_j$  dans un tableau, sur une première ligne, dans l'ordre des puissances de  $z$  décroissantes, puis, sur une deuxième ligne, on place les mêmes coefficients mais en sens inverse. On effectue ensuite un calcul pour créer une ligne supplémentaire de  $q-1$  valeurs  $c_j$ , avec :

$$c_j = b_0 b_j - b_q b_{q-j}$$

On dispose alors d'un tableau de trois lignes et on crée aussitôt une quatrième ligne avec la même suite de coefficients  $c_j$ , mais placée en sens inverse.

$$\begin{array}{cccccccc}
 b_0 & b_1 & b_2 & \dots\dots\dots & b_q \\
 b_q & b_{q-1} & b_{q-2} & \dots\dots\dots & b_0 \\
 c_0 & c_1 & c_2 & \dots\dots\dots & c_{q-1} \\
 c_{q-1} & c_{q-2} & c_{q-3} & \dots\dots\dots & c_0
 \end{array}$$

La cinquième ligne est calculée à partir des deux lignes précédentes et cette fois, on calcule uniquement  $q - 2$  valeurs  $d_j$  selon l'expression :

$$d_j = c_0c_j - c_{q-1}c_{q-j-1}$$

Plutôt que de retenir cette expression, il est préférable de visualiser l'opération qui est faite, sur le tableau (figure 12.7).

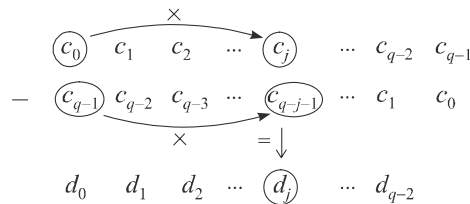


Figure 12.7 Construction de la table de Jury.

Une sixième ligne est automatiquement ajoutée au tableau en disposant les coefficients  $d_j$  en sens inverse. On itère le processus de calcul jusqu'à ce qu'il ne reste que 3 termes sur une ligne (bien noter qu'à chaque série de calculs, on crée un terme de moins qu'il n'y en a sur les deux lignes précédentes). Le tableau définitif doit comporter  $2q - 3$  lignes. Le système est stable si toutes les conditions suivantes sont réunies simultanément :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 D(1) > 0 \\
 D(-1) > 0 \text{ si } n \text{ est pair, } D(-1) < 0 \text{ si } n \text{ est impair} \\
 b_0 > |b_q| \\
 |c_0| > |c_{q-1}| \\
 |d_0| > |d_{q-2}| \\
 \dots \\
 |x_0| > |x_2|
 \end{array} \right.$$

**Remarque :** Il faut donc, en plus des conditions sur  $D(1)$  et  $D(-1)$ , que sur chaque ligne créée de rang impair, la valeur absolue du premier terme soit inférieure à celle du dernier.

b) Exemple : stabilité d'un système du second ordre

Soit  $H(z)$  la fonction de transfert en boucle fermée d'un système échantillonné asservi.

Soit :

$$H(z) = \frac{1}{az^2 + bz + c} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont supposés strictement positifs. Comme le système est d'ordre 2, une seule ligne suffit ( $2q - 3 = 1$ ). Le tableau se limite donc à la liste des coefficients dans l'ordre des puissances décroissantes :

$$a \quad b \quad c$$

L'analyse de la table nous conduit immédiatement à la condition :  $a > c$ .

Par ailleurs, on doit avoir :

$$D(1) > 0 \Rightarrow a + b + c > 0$$

et :

$$D(-1) > 0 \Rightarrow a - b + c > 0$$

En conclusion, le système est stable si :

$$\begin{cases} a > c \\ a + b + c > 0 \\ a - b + c > 0 \end{cases}$$

### 12.2.3 Utilisation du critère de Routh

Il est possible d'utiliser le critère de Routh pour l'étude la stabilité des systèmes échantillonnés en comparant les deux critères mathématiques utilisés en temps continu et en temps discret : pour un asservissement en temps continu, les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée doivent tous être situés dans le demi-plan complexe correspondant aux parties réelles négatives. En temps discret, les pôles doivent être situés à l'intérieur du cercle de rayon 1. Il suffit donc de transformer l'équation  $D(z) = 0$  en utilisant une fonction qui transforme, dans le plan complexe, le disque de rayon 1 en demi-plan correspondant aux parties réelles négatives.

Il suffit pour cela, d'effectuer le changement de variable  $x = \frac{z-1}{z+1}$  et d'appliquer le critère de Routh sur l'équation  $D(x) = 0$  ainsi obtenue.

**Remarque :** Cette astuce n'est donnée qu'à titre indicatif car, hormis d'un point de vue académique, son intérêt est somme toute, limité.

### 12.2.4 Influence de la fréquence d'échantillonnage sur la stabilité

a) *Mise en évidence*

Nous allons tenter, à partir d'un exemple simple, de montrer que la stabilité d'un système échantillonné peut être grandement influencée par le choix de la période d'échantillonnage. Considérons un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(p)$  placé dans une boucle à retour unitaire avec :

$$G(p) = \frac{K}{1 + Tp}$$

Si on se réfère à la table des équivalents Laplace -  $z$ , le système échantillonné asservi qui possédera le même fonctionnement aura pour fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{K \left(1 - e^{-\frac{T_e}{T}}\right)}{z - e^{-\frac{T_e}{T}}} \Rightarrow H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{K \left(1 - e^{-\frac{T_e}{T}}\right)}{z - e^{-\frac{T_e}{T}} + K \left(1 - e^{-\frac{T_e}{T}}\right)}$$

**Remarque :** Bien noter que l'on n'a pas le droit de déduire la fonction de transfert échantillonnée en boucle fermée à partir de la fonction de transfert continue en boucle fermée.

Alors que le système en temps continu  $H(p)$  est toujours stable, le système échantillonné ne l'est pas toujours. En effet,  $H(z)$  possède un pôle dont le module est susceptible d'être supérieur à 1.

Ce pôle a pour expression :

$$p_1 = K \left( e^{-\frac{T_e}{T}} - 1 \right) + e^{-\frac{T_e}{T}}$$

Le système échantillonné sera stable si et seulement si :

$$\left| K \left( e^{-\frac{T_e}{T}} - 1 \right) + e^{-\frac{T_e}{T}} \right| < 1 \Leftrightarrow \left| (1+K)e^{-\frac{T_e}{T}} - K \right| < 1$$

On peut donc avoir :

$$(1+K)e^{-\frac{T_e}{T}} - K < 1 \Rightarrow K > -1$$

ce qui ne nous intéresse guère,

ou bien :

$$K - (1+K)e^{-\frac{T_e}{T}} < 1 \Rightarrow K < \frac{1 + e^{-\frac{T_e}{T}}}{1 + e^{-\frac{T_e}{T}}}$$

Le système échantillonné peut donc être instable : pour une période d'échantillonnage donnée, il existe une limite supérieure du gain statique qui délimite le domaine stable. Si c'est le gain statique qui est fixé, on a :

$$K - (1+K)e^{-\frac{T_e}{T}} < 1 \Rightarrow -(1+K)e^{-\frac{T_e}{T}} < 1 - K$$

soit :

$$e^{-\frac{T_e}{T}} > \frac{1-K}{1+K} \Rightarrow -\frac{T_e}{T} > \ln \frac{1-K}{1+K} \Rightarrow T_e < T \ln \frac{1-K}{1+K}$$

La période d'échantillonnage doit donc être inférieure à une valeur qui dépend des paramètres du système. Autrement dit la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure à un certain seuil.

**Remarque :** Il s'agit là d'un résultat important : en automatique, la fréquence d'échantillonnage n'est pas uniquement dictée par le théorème de Shannon (d'ailleurs il n'est pas toujours possible de connaître *a priori* les spectres des signaux dans le système) mais aussi par les caractéristiques du système.

### b) Choix de la fréquence d'échantillonnage

La règle traditionnellement adoptée par les automaticiens, en matière de choix de la fréquence d'échantillonnage consiste à évaluer la bande passante  $f_{pas}$  du système asservi et de choisir une fréquence d'échantillonnage telle que :

$$6f_{pas} < f_e < 25f_{pas}$$

On rappelle que la bande passante est définie comme la limite supérieure de la plage de fréquences pour lesquelles le gain est constant à 3 dB près.

## 12.3 ASSERVISSEMENTS CONTINUS COMMANDÉS OU CORRIGÉS EN TEMPS DISCRET

### 12.3.1 Définition

Les systèmes asservis comportent assez souvent à la fois des éléments fonctionnant à temps discret et d'autres qui fonctionnent à temps continu. Parmi ces systèmes, on rencontre notamment des asservissements de systèmes continus pour lesquels on envisage une correction par ordinateur. Dans ce cas, les signaux de consignes et de sortie sont continus ; seuls les signaux entrant et sortant du correcteur sont échantillonnés (figure 12.8).

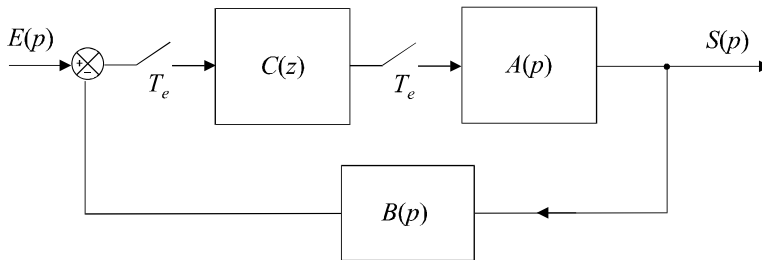


Figure 12.8 Asservissement continu avec correction numérique.

Dans d'autres cas, l'asservissement complet d'un système continu est piloté par un signal échantillonné (figure 12.9).

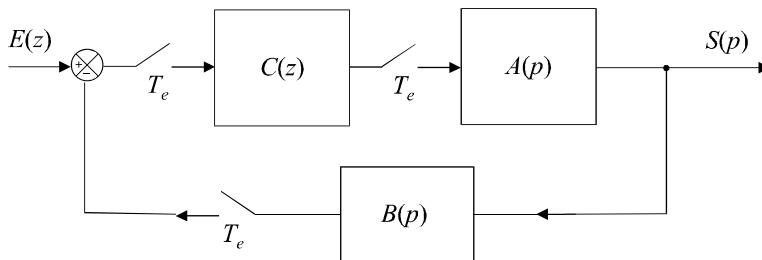


Figure 12.9 Asservissement continu commandé par un signal échantillonné.

### 12.3.2 Interfaçage entre un système discret et un système continu

Un problème subsiste dans les deux cas que nous venons de mentionner : la connexion d'un système échantillonné vers un système à temps continu n'est *a priori* pas possible. En effet, le signal délivré par le système  $C(z)$  est un signal identique à celui présenté sur la figure 12.10. Il s'agit même, en général, d'une suite de nombres délivrés sous forme binaire. Ce type de signal est bien sûr incompatible avec l'entrée d'un système à temps continu.

Pour retrouver un signal « admissible », il est nécessaire de reconvertir la suite numérique en impulsions discrètes, au moyen d'un convertisseur numérique analogique, puis (et c'est cela qui transforme véritablement le signal en temps discret en signal continu) de procéder à un blocage du signal grâce à un système appelé bloqueur.

Le blocage consiste à maintenir la valeur de l'échantillon jusqu'à l'arrivée de l'échantillon suivant. Le signal  $x^*(t)$ , après blocage, devient le signal continu représenté sur la figure 12.11.

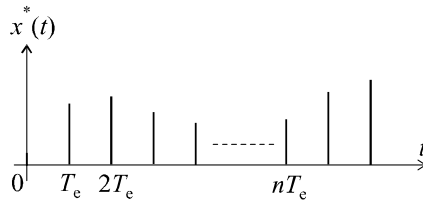


Figure 12.10 Signal issu du correcteur.

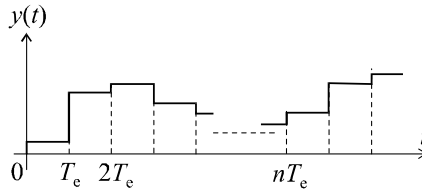


Figure 12.11 Signal continu obtenu après blocage du signal échantillonné.

**Remarque :** Il existe plusieurs types de bloqueurs; celui qui vient d’être décrit est appelé bloqueur d’ordre 0.

On admettra qu’un bloqueur d’ordre 0 peut être modélisé par une fonction de transfert en temps continu égale à :

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-pT_c}}{p}$$

### 12.3.3 Première méthode d’étude simple : recherche d’un système à temps continu équivalent

La première méthode d’étude du système consiste à rechercher le système continu auquel il est équivalent. Prenons l’exemple du système représenté sur la figure 12.8. Le correcteur  $C(z)$  possède sans aucun doute un équivalent en temps continu, soit  $C(p)$ .

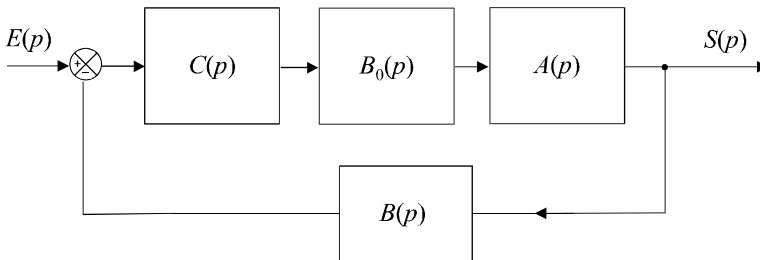


Figure 12.12 Équivalence en temps continu du système.

Nous pouvons alors proposer un schéma équivalent en continu, en veillant à ne pas oublier le bloqueur d’ordre 0 qui, dans le modèle en temps continu, effectue l’interfaçage entre le correcteur et le système à commander (figure 12.12).

### 12.3.4 Deuxième méthode d'étude simple : recherche d'un système à temps discret équivalent

On peut également étudier le système en recherchant le système à temps discret auquel il est équivalent. Reprenons l'exemple du système représenté sur la figure 12.7. Soit  $A(z)$  et  $B(z)$  les équivalents en temps discrets des fonctions de transfert  $A(p)$  et  $B(p)$ .

Nous pouvons immédiatement proposer le schéma équivalent en temps continu (figure 12.13), en veillant, surtout, à ne pas y inclure le bloqueur d'ordre 0 qui, dans le modèle en temps discret, n'a aucune raison d'être.

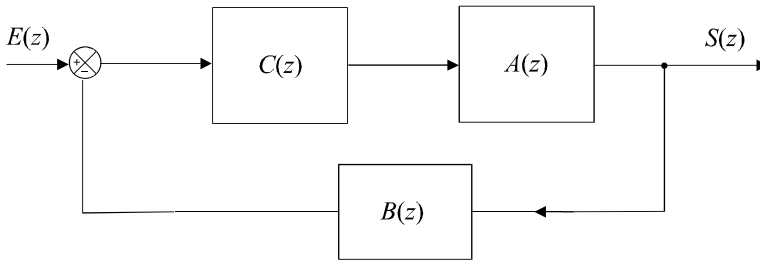


Figure 12.13 Équivalence en temps discret du système.

## 12.4 PRÉCISION DES ASSERVISSEMENTS ÉCHANTILLONNÉS

### 12.4.1 Erreurs de position et de vitesse

On définit, pour les systèmes à temps discret, les mêmes performances que pour les systèmes à temps continu. Il en est ainsi de la précision des systèmes qui est ici, toujours définie par les notions d'erreurs de position et de vitesse.

Considérons un système échantillonné asservi de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(z)$ , placé dans une boucle à retour unitaire et représenté sur la figure 12.14.

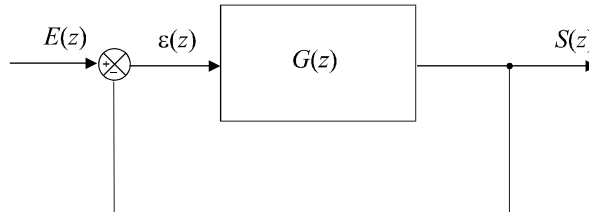


Figure 12.14 Schéma d'un asservissement échantillonné à retour unitaire.

On définit l'erreur de position  $\epsilon_p$  par :

$$\epsilon_p = \lim_{k \rightarrow +\infty} \epsilon_k \text{ pour une entrée en échelon unité}$$

En appliquant le théorème de la valeur finale, on obtient :

$$\epsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \left( \frac{z-1}{z} \right) \epsilon(z) \right]$$

Or :

$$\varepsilon(z) = E(z) - S(z) = E(z) - G(z)\varepsilon(z)$$

d'où :

$$\varepsilon(z) = \frac{E(z)}{1 + G(z)}$$

On a donc :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \left( \frac{z-1}{z} \right) \frac{E(z)}{1 + G(z)} \right]$$

Comme le signal d'entrée est un échelon unité, on a :

$$E(z) = \frac{z}{z-1} \Rightarrow \varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1 + G(z)} \right]$$

On définit également l'erreur de vitesse  $\varepsilon_v$  par :

$$\varepsilon_v = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon_k \text{ pour une entrée en rampe}$$

On a toujours :

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \left( \frac{z-1}{z} \right) \frac{E(z)}{1 + G(z)} \right]$$

avec cette fois :

$$E(z) = \frac{T_e z}{(z-1)^2} \Rightarrow \varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{T_e}{(z-1)[1 + G(z)]} \right]$$

## 12.4.2 Précision d'un système échantillonné du premier ordre

On considère un système échantillonné de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(z)$  placé dans une boucle à retour unitaire (figure 12.13), avec :

$$G(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}} = \frac{bz}{z - a} \text{ avec } b > 0 \text{ et } 0 < a \leq 1$$

Nous savons déjà (paragraphe 12.2.1 – c) que le système est stable en boucle fermée si l'unique pôle de la fonction de transfert en boucle fermée est inférieur à 1.

Soit :

$$\frac{a}{b+1} < 1$$

a) Calcul de l'erreur de position

L'erreur de position de ce système asservi a pour expression :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1 + G(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1 + \frac{b}{1 - az^{-1}}} \right]$$

soit :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1 + \frac{bz}{z - a}} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{z - a}{(b+1)z - a} \right] = \frac{1 - a}{b + 1 - a}$$



**Remarque :** Compte tenu de la condition de stabilité, le dénominateur de cette expression ne peut être nul.

Cette erreur de position est nulle, autrement dit le système est parfaitement précis en boucle fermée, si  $a = 1$ , donc si la fonction de transfert en boucle ouverte  $G(z)$  possède un pôle égal à 1.

b) *Calcul de l'erreur de vitesse*

L'erreur de vitesse du système asservi a pour expression :

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{T_e}{(z-1) \left[ 1 + \frac{bz}{z-a} \right]} \right]$$

soit :

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{T_e(z-a)}{(z-1)[z(1+b)-a]} \right] \rightarrow \infty$$

L'erreur de vitesse d'un système du premier ordre placé dans une boucle d'asservissement est donc infinie, sauf si  $a = 1$ , auquel cas :

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{T_e(z-1)}{(z-1)[z(1+b)-1]} \right] = \frac{T_e}{b}$$

c) *Généralisation*

La présence d'un pôle égal à 1 dans la fonction de transfert en boucle ouverte assure donc une bonne précision statique mais n'assure pas une bonne précision dynamique. Considérons à présent un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(z)$  quelconque de la forme :

$$G(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^n} \cdot A(z)$$

Un tel système possède  $n$  pôles égaux à 1. On aussi dit que la fonction de transfert en boucle ouverte est constituée, notamment, de  $n$  intégrateurs, étant donné que la forme  $\frac{1}{1-z^{-1}}$  correspond à une constante multiplicative près à l'intégration  $\frac{1}{p}$  (voir tables des équivalents en annexe D).

L'erreur de position de ce système en boucle fermée a pour expression :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1+G(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1 + \frac{A(z)}{(1-z^{-1})^n}} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(z-1)^n}{(z-1)^n + z^n A(z)} \right]$$

Quelle que soit la valeur de  $n$  supérieure ou égale à 1 :  $\varepsilon_p = 0$ .

La présence d'au moins un intégrateur dans la fonction de transfert en boucle ouverte assure donc bien la nullité de l'erreur statique.

L'erreur de vitesse du système en boucle fermée a pour expression :

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{T_e}{(z-1)[1+G(z)]} \right] = \frac{T_e}{\lim_{z \rightarrow 1} \left[ (z-1) + \frac{(z-1)A(z)}{(1-z^{-1})^n} \right]}$$

$$\text{soit : } \varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{T_e (z-1)^n}{(z-1) [(z-1)^n + z^n A(z)]} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{T_e (z-1)^{n-1}}{[(z-1)^n + z^n A(z)]} \right]$$

$$\text{Si } n = 1 : \quad \varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{T_e}{[(z-1) + z^n A(z)]} \right] = \frac{T_e}{A(1)} \neq 0$$

$$\text{Si } n \geq 2 : \quad \varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{T_e (z-1)^{n-1}}{[(z-1)^n + z^n A(z)]} \right] = \frac{T_e}{A(1)} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^{n-1} = 0$$

En conclusion, la présence d'un intégrateur dans la fonction de transfert en boucle ouverte assure une erreur de vitesse finie d'autant plus faible que la période d'échantillonnage est faible. La présence d'au moins deux intégrateurs assure la nullité de l'erreur de vitesse.

## 12.5 PERFORMANCES DYNAMIQUES D'UN SYSTÈME ÉCHANTILLONNÉ

Tout comme l'étude des systèmes à temps continu nous a conduit à mettre en évidence des performances en boucle fermée telles que rapidité et limitation du dépassement, nous allons à présent nous intéresser à ces performances dynamiques dans le cas des systèmes à temps discret.

Nous allons à nouveau utiliser, mais cette fois-ci à propos des systèmes à temps discret, la méthode qui consiste à assimiler le fonctionnement d'un système quelconque à celui d'un système du second ordre.

### 12.5.1 Fonction de transfert échantillonnée équivalente à un système du second ordre

On considère un système à temps continu du second ordre, caractérisé en boucle ouverte, par une fonction de transfert  $G(p)$  telle que :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$

Nous nous limiterons à l'étude du cas  $\xi < 1$ , pour mettre en évidence les paramètres liés au temps de montée et au dépassement. Nous savons déjà (chapitre 4), que cette fonction possède dans ce cas deux pôles complexes conjugués :

$$p_1 = -\omega_n \left[ \xi - j\sqrt{(1-\xi^2)} \right] \quad \text{et} \quad p_2 = -\omega_n \left[ \xi + j\sqrt{(1-\xi^2)} \right]$$

$$\text{Soit : } G(p) = \frac{K\omega_n^2}{(p-p_1)(p-p_2)} = K\omega_n^2 \cdot \frac{1}{(p-p_1)} \cdot \frac{1}{(p-p_2)}$$

Calculons à présent, à l'aide de la table d'équivalence fournie en annexe, la fonction de transfert en  $z$  équivalente à  $G(p)$  :

$$G(z) = K\omega_n^2 \cdot \left[ \left( -\frac{1}{p_1} \right) \frac{1 - e^{p_1 T_e}}{z - e^{p_1 T_e}} \right] \cdot \left[ \left( -\frac{1}{p_2} \right) \frac{1 - e^{p_2 T_e}}{z - e^{p_2 T_e}} \right]$$

$$\text{Comme : } p_1 p_2 = \omega_n^2$$

on obtient :

$$G(z) = \frac{K (1 - e^{p_1 T_e}) (1 - e^{p_2 T_e})}{(z - e^{p_1 T_e}) (z - e^{p_2 T_e})}$$

Notons au passage que les deux pôles de la fonction de transfert en  $z$  sont  $e^{p_1 T_e}$  et  $e^{p_2 T_e}$  et remplaçons pour finir  $p_1$  et  $p_2$  par leurs expressions.

On obtient :

$$G(z) = \frac{K \left( 1 + e^{-2\xi\omega_n T_e} - 2e^{-\xi\omega_n T_e} \cos \omega_n T_e \sqrt{1 - \xi^2} \right)}{z^2 - 2ze^{-\xi\omega_n T_e} \cos \omega_n T_e \sqrt{1 - \xi^2} + e^{-2\xi\omega_n T_e}}$$

### 12.5.2 Prévision des performances dynamiques

#### a) Principe

L'une des méthodes les plus simples consiste à rechercher l'équivalent en temps continu de la boucle d'asservissement en temps discret en prenant soin de ne pas oublier les bloqueurs d'ordre 0, si nécessaires. On évalue alors les performances dynamiques de ce système en temps continu en assimilant son fonctionnement à celui d'un système du second ordre.

Pour simplifier les calculs, on prend l'habitude d'effectuer une approximation sur la fonction de transfert du bloqueur d'ordre 0, approximation qui apparaît comme raisonnable si la fréquence d'échantillonnage est suffisamment élevée :

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-pT_e}}{p} \approx e^{-\frac{pT_e}{2}} \approx \frac{1}{1 + \frac{T_e p}{2}}$$

#### b) Exemple

On considère le système échantillonné asservi représenté sur la figure 12.15 et soumis à un échelon unitaire ; la période d'échantillonnage est réglée sur  $T_e = 0,2$  s.

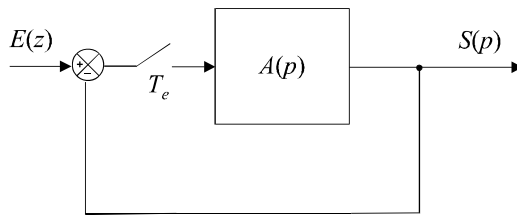


Figure 12.15 Asservissement continu commandé par un signal échantillonné.

On donne :

$$A(p) = \frac{4}{1 + p}$$

Recherchons l'équivalent en temps continu de cette boucle d'asservissement en temps discret : un bloqueur d'ordre 0 est nécessaire pour assurer la commande du système  $A(p)$ . On obtient alors le schéma équivalent de la figure 12.16.

La fonction de transfert en boucle ouverte de ce système en temps continu a pour expression :

$$G(p) = \frac{4}{\left(1 + \frac{T_e p}{2}\right) (1 + p)} = \frac{4}{\left(1 + \frac{p}{10}\right) (1 + p)}$$

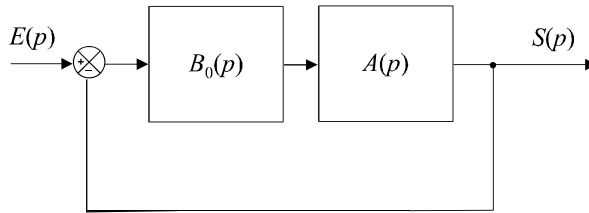


Figure 12.16 Équivalence du système en temps continu.

Calculons la pulsation de coupure à 0 dB et la marge de phase de ce système :

$$G(\omega) = \frac{10}{\sqrt{1 + \omega^2} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{100}}}$$

$$G(\omega) = 1 \Leftrightarrow (1 + \omega^2) \left(1 + \frac{\omega^2}{100}\right) = 16 \Leftrightarrow \frac{\omega^4}{100} + \frac{101\omega^2}{100} - 15 = 0$$

La seule solution réelle positive de cette équation est :  $\omega_{c0} = 3,6 \text{ rad/s}$

Par conséquent, en considérant les relations approchées mises en évidence au chapitre 7 à propos des performances des systèmes à temps continu, nous pouvons en déduire une estimation du temps de montée en boucle fermée :

$$t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}} \approx 0,8 \text{ s}$$

Calculons à présent la marge de phase :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi - \arctan \frac{\omega_{c0}}{10} - \arctan \omega_{c0}$$

soit : 
$$\Delta\varphi = 85^\circ \Rightarrow \xi_{BF} \approx 0,85$$

Ce coefficient d’amortissement en boucle fermée correspond à un dépassement de 0,6 %, autrement dit, le système devrait présenter un dépassement imperceptible.

En conclusion, nous considérerons que le système échantillonné initial possède pour performances dynamiques :

$$t_m \approx 0,8 \text{ s}$$

$$dep \approx 0$$

Cette étude a par ailleurs permis de démontrer que le dispositif était caractérisé par une marge de phase relativement importante, montrant ainsi que le système est très stable en boucle fermée.

c) Validation des résultats obtenus

Considérons, pour valider les résultats obtenus précédemment, l’équivalent en  $z$  de la boucle d’asservissement étudiée (figure 12.17).

D’après la table d’équivalence :

$$A(z) = \frac{4(1 - e^{-T_c})}{(z - e^{-T_c})}$$

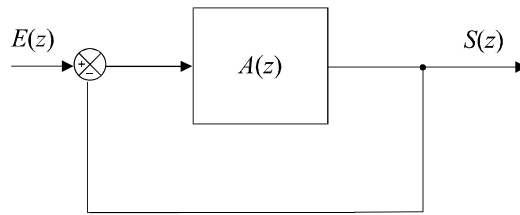


Figure 12.17 Modèle à temps discret de la boucle d'asservissement.

La fonction de transfert en boucle fermée a pour expression :

$$H(z) = \frac{A(z)}{1 + A(z)} = \frac{4(1 - e^{-T_e})}{(z - e^{-T_e}) + 4(1 - e^{-T_e})}$$

soit :

$$H(z) = \frac{0,72}{z - 0,1}$$

Or :

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{0,72}{z - 0,1} \Rightarrow (z - 0,1)S(z) = 0,72E(z)$$

soit :

$$(z - 0,1)S(z) = 0,72E(z)$$

Ce qui correspond à l'équation de récurrence suivante :

$$s_k = 0,1s_{k-1} + 0,72e_{k-1}$$

Le système étant commandé par un échelon, la suite  $(e_k)$  est connue et cette équation nous permet de calculer, échantillon par échantillon, les différentes valeurs de la suite  $(s_k)$  (tableau 12.1).

Tableau 12.1 SIMULATION DE LA SUITE D'ÉCHANTILLONS.

$t$	0	0,2 s	0,4 s	0,6 s	0,8 s	1,0 s	1,2 s
$e_k$	1	1	1	1	1	1	1
$s_k$	0	0,720	0,792	0,799	0,800	0,800	0,800

La figure 12.18 propose une représentation graphique de ces résultats. Nous y remarquons l'absence de dépassement perceptible et pouvons y mesurer le temps de montée qui est tout à fait conforme aux prédictions calculées à partir de notre modèle.

Nous pouvons également vérifier la valeur de l'erreur de position prévue par notre modèle :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + A(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - e^{-T_e}}{z - e^{-T_e} + 4(1 - e^{-T_e})}$$

soit :

$$\varepsilon_p = \frac{1 - 0,82}{1 - 0,82 + 4(1 - 0,82)} = 0,2 = 20 \%$$

Ce qui est tout à fait conforme au graphe présenté.

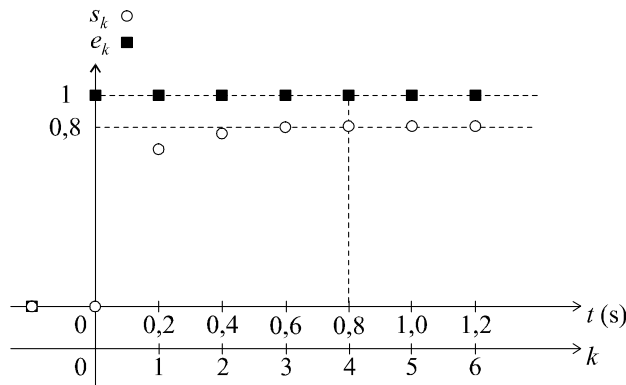


Figure 12.18 Représentation temporelle du comportement du système en boucle fermée.

## EXERCICES

### 12.1 Mise en équation d'un asservissement et étude de sa stabilité

On considère un système échantillonné de fonction de transfert  $G(z)$  placé dans une boucle d'asservissement à retour unitaire, avec :

$$G(z) = \frac{K}{(z - 0,4)(z - 0,8)} \text{ avec } K > 0$$

Calculer la fonction de transfert en boucle fermée et étudier les conditions de stabilité de ce système en boucle fermée.

Le système étant sollicité, en boucle fermée, par un échelon unité, calculer les premiers éléments de la suite des échantillons de sortie dans le cas  $K = 0,3$  et dans le cas  $K = 1$ .

### 12.2 Stabilité et précision d'un système échantillonné asservi

On considère un système échantillonné de fonction de transfert  $G(z)$  placé dans une boucle d'asservissement à retour unitaire, avec :

$$G(z) = \frac{Kz}{(z - 0,9)} \text{ avec } K > 0 \text{ réglable}$$

Calculer la fonction de transfert en boucle fermée et étudier les conditions de stabilité de ce système en boucle fermée.

Calculer l'erreur statique en fonction de  $K$ .

Le système étant sollicité, en boucle fermée, par un échelon unité, calculer les premiers éléments de la suite des échantillons de sortie dans le cas où  $K$  est réglé de manière à obtenir une erreur statique égale à 0,1.

### 12.3 Influence d'un intégrateur sur la stabilité d'un système

On considère un système échantillonné de fonction de transfert  $G(z)$  placé dans une boucle d'asservissement à retour unitaire, avec :

$$G(z) = \frac{K}{(z - 0,6)^3} \text{ avec } K > 0 \text{ réglable}$$

Calculer la fonction de transfert en boucle fermée et étudier les conditions de stabilité de ce système en boucle fermée.

Calculer l'erreur statique en fonction de  $K$  et déterminer les valeurs minimales et maximales de cette erreur statique.

On introduit à présent un intégrateur dans la chaîne directe. Calculer la nouvelle fonction de transfert en boucle fermée et montrer que, dans ces conditions, il sera pratiquement impossible de régler  $K$  pour assurer la stabilité du système.

#### 12.4 Mesure des performances dynamiques d'un système échantillonné

Un système échantillonné de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(z)$  est placé dans une boucle de régulation à retour unitaire.

$$G(z) = \frac{0,16K}{(z - 0,8)^2} \text{ avec } K > 0$$

La période d'échantillonnage est :  $T_e = 0,1$  s.

Calculer la fonction de transfert en boucle fermée et déterminer la condition de stabilité du système en boucle fermée.

Le gain étant réglé sur  $K = 1$ , déterminer, en boucle fermée : l'erreur de position, l'équation de récurrence, et calculer, puis tracer, les premiers éléments de la suite des échantillons de sortie lorsque l'entrée est un échelon unitaire. En déduire la valeur du temps de montée et du coefficient d'amortissement en boucle fermée.

Répondre aux mêmes questions en réglant le gain sur  $K = 2$ . Conclure.

#### 12.5 Influence du choix de la fréquence d'échantillonnage sur la stabilité

Un système à temps continu de fonction de transfert  $G(p)$  est placé dans une boucle de régulation à temps discret à retour unitaire et commandé numériquement. La fréquence d'échantillonnage  $T_e$  est réglable.

On donne :

$$G(p) = \frac{K}{p + 10}$$

Déterminer, en fonction de  $K$  les conditions de stabilité du système échantillonné en boucle fermée. Comparer les conditions de stabilité du système pour  $T_e = 1$  s,  $T_e = 0,1$  s et  $T_e = 0,02$  s.

La valeur du gain étant réglée sur  $K = 50$ , déterminer la condition sur  $T_e$  pour que le système soit stable.

#### 12.6 Étude comparée de la stabilité sur plusieurs modèles à temps discret

On considère un système à temps continu régi, en boucle ouverte, par la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{K}{(p + 1)(p + 3)} \text{ avec } K > 0 \text{ réglable}$$

Calculer successivement, en boucle ouverte, les équivalents en  $z$ , à la dérivation et à l'intégration de ce système, respectivement  $G_1(z)$  et  $G_2(z)$ . Rechercher, dans la table fournie en annexe, l'équivalent de ce système, soit  $G_3(z)$ . On choisira une fréquence d'échantillonnage  $T_e = 0,2$  s.

Calculer les trois fonctions de transfert échantillonnées en boucle fermée et déterminer, pour chacune d'elles, les conditions de stabilité sur  $K$ . Comparer les résultats et conclure.

### 12.7 Synthèse d'une fonction de transfert en temps discret

On considère un système échantillonné à une période  $T_e = 0,5$  s, de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(z)$  telle que :

$$G(z) = \frac{K}{z^2 - az + b}$$

Déterminer les valeurs de  $K$ ,  $a$  et  $b$  de telle sorte que ce système, placé dans une boucle à retour unitaire, soit caractérisé en boucle fermée, par une erreur de position égale à 20 %, un temps de montée  $t_m = 2,5$  s et un dépassement de 30 %.

Déterminer alors l'équation de récurrence du système et vérifier les performances à l'aide du calcul et du tracé des premiers échantillons de sortie.

### 12.8 Performances d'un système continu commandé en temps discret

Un système à temps continu de fonction de transfert  $A(p)$  est placé dans une boucle de régulation à temps discret à retour unitaire et commandé numériquement. La fréquence d'échantillonnage  $T_e$  est égale à 0,5 s.

On donne :

$$A(p) = \frac{K}{p(p+1)}$$

On souhaite régler  $K$  pour limiter le dépassement à 20 % en boucle fermée.

Déterminer le schéma équivalent en temps continu de cet asservissement et en déduire la condition de stabilité en boucle fermée.

Déterminer la valeur de  $K$  qui assure un dépassement de 20 % en boucle fermée et en déduire la fonction de transfert échantillonnée correspondante.

Déterminer alors l'équation de récurrence du système et vérifier la valeur du dépassement à l'aide du calcul et du tracé des premiers échantillons de sortie.

## SOLUTIONS

**12.1** Calculons la fonction de transfert du système en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{K}{(z - 0,4)(z - 0,8) + K}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert est :

$$D(z) = z^2 - 1,2z + 0,32 + K$$

D'après le critère de Jury, le système est stable si et seulement si toutes les conditions suivantes sont respectées :

$$\begin{cases} D(1) > 0 \\ D(-1) > 0 \\ 1 > 0,32 + K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,12 + K > 0 \\ 2,52 + K > 0 \\ K < 0,68 \end{cases}$$

La condition de stabilité se résume donc à :  $K < 0,68$ .



Pour calculer, dans les deux cas demandés, la suite d'échantillons de sortie, exprimons l'équation de récurrence du système à partir de la fonction de transfert en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{K}{z^2 - 1,2z + 0,32 + K} = \frac{Kz^{-2}}{1 - 1,2z^{-1} + (0,32 + K)z^{-2}}$$

d'où :

$$s_k = 1,2s_{k-1} - (0,32 + K)s_{k-2} + Ke_{k-2}$$

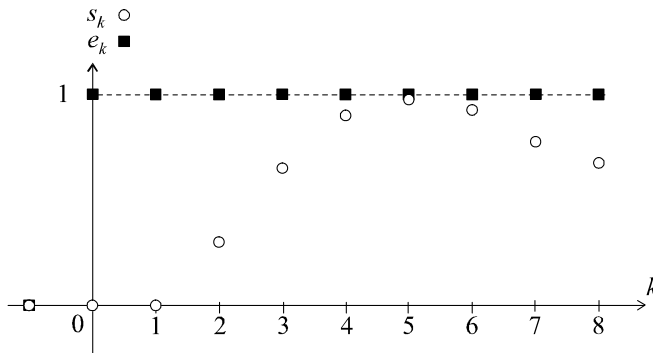
Pour  $K = 0,3$ , on a :

$$s_k = 1,2s_{k-1} - 0,62s_{k-2} + 0,3e_{k-2}$$

Ce qui nous permet, pour une entrée en échelon unité, de calculer et tracer les valeurs des échantillons de sortie.

**Tableau 12.2** CALCUL DE LA SUITE D'ÉCHANTILLONS DE SORTIE.

$e_k$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$s_k$	0	0	0,300	0,660	0,906	0,978	0,911	0,787	0,680



**Figure 12.19** Représentation temporelle de la sortie du système.

En calculant plus d'échantillons, on montre effectivement la convergence du signal de sortie, ce qui prouve la stabilité du système, dans ce cas.

Pour  $K = 1$ , on a :

$$s_k = 1,2s_{k-1} - 1,32s_{k-2} + e_{k-2}$$

Ce qui nous permet, pour une entrée en échelon unité, de calculer et tracer les valeurs des échantillons de sortie.

**Tableau 12.3** CALCUL DE LA SUITE D'ÉCHANTILLONS DE SORTIE.

$e_k$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$s_k$	0	0	1,000	2,200	2,320	0,880	-1,006	-1,369	0,685

En calculant plus d'échantillons, on montre effectivement l'absence de convergence du signal de sortie qui oscille en divergeant, ce qui confirme l'instabilité du système, dans ce cas.

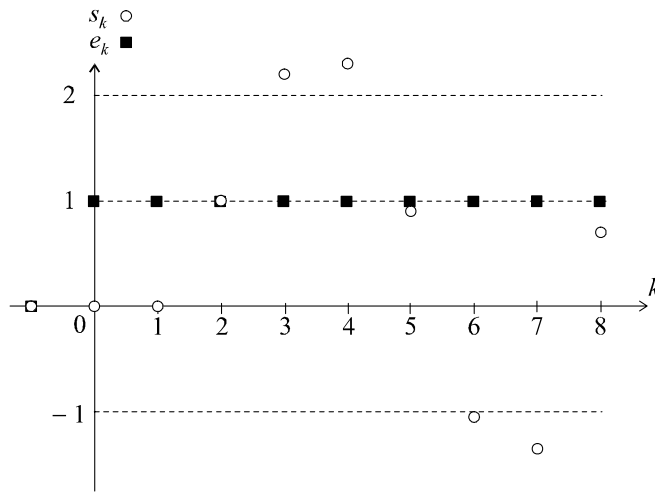


Figure 12.20 Représentation temporelle de la sortie du système.

► Résolution avec Mathematica

Pour tracer la suite d'échantillons, on écrira, suivant les cas ( $K = 0,3$  ou  $K = 1$ ) :

$$SZ = 0.3z^{-1} / \left( (1 - 1.2z^{-1} + 0.62z^{-2})(z-1) \right)$$

$$SK = \text{InverseZTransform}[SZ, z, k]$$

$$\text{DiscretePlot}[SK, \{k, 1, 8\}]$$

ou bien :

$$SZ = z^{-1} / \left( (1 - 1.2z^{-1} + 1.32z^{-2})(z-1) \right)$$

$$SK = \text{InverseZTransform}[SZ, z, k]$$

$$\text{DiscretePlot}[SK, \{k, 1, 8\}]$$

12.2 Calculons la fonction de transfert du système en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{Kz}{(z - 0,9) + Kz} = \frac{Kz}{(K + 1)z - 0,9}$$

L'unique pôle de la fonction de transfert est :

$$p_1 = \frac{0,9}{K + 1}$$

Le système est stable si et seulement si le module de ce pôle est inférieur à 1 :

$$\frac{0,9}{K + 1} < 1 \Rightarrow K > -0,1$$

Le système est donc toujours stable, quelle que soit la valeur positive de  $K$ .

Calculons à présent l'erreur de position du système en boucle fermée :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1 + G(z)} \right] = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow 1} \left( 1 + \frac{Kz}{z - 0,9} \right)} = \frac{1}{1 + 10K}$$

Pour obtenir une erreur de position de 10 %, soit  $\varepsilon_p = 0,1$ , on doit avoir :

$$\frac{1}{1 + 10K} = 0,1 \Rightarrow K = 0,9$$

Dans ces conditions, la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$H(z) = \frac{0,9z}{1,9z - 0,9} = \frac{0,474}{1 - 0,474z^{-1}}$$

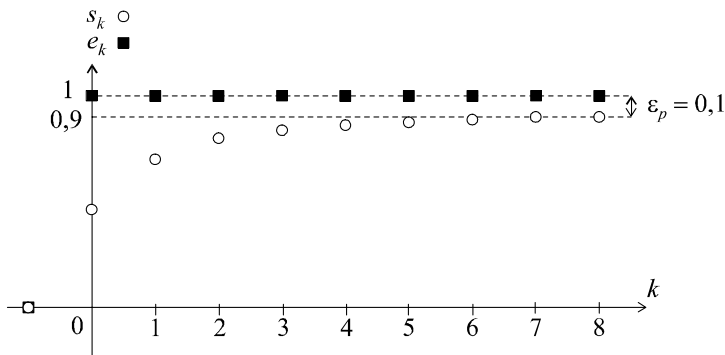
d'où la relation de récurrence qui régit le système en boucle fermée :

$$s_k = 0,474e_k + 0,474s_{k-1}$$

Calculons (tableau 12.4) et représentons graphiquement (figure 12.21) la suite d'échantillons de sortie. Compte tenu de la vitesse de convergence de la suite  $(s_k)$ , autrement dit, de la rapidité du système, l'erreur de position se mesure très facilement dès les premiers échantillons.

**Tableau 12.4** CALCUL DE LA SUITE D'ÉCHANTILLONS DE SORTIE.

$e_k$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$s_k$	0,474	0,699	0,805	0,856	0,880	0,891	0,896	0,899	0,900



**Figure 12.21** Représentation temporelle de la sortie du système.

► Résolution avec Mathematica

Pour tracer la suite d'échantillons, on écrira :

$$SZ = 0.474z / ((1 - 0.474z^{-1})(z - 1))$$

$$SK = \text{InverseZTransform}[SZ, z, k]$$

$$\text{DiscretePlot}[SK, \{k, 1, 8\}]$$

**12.3** Calculons la fonction de transfert du système en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{K}{(z - 0,6)^3 + K}$$

Le dénominateur de cette fonction de transfert est :

$$D(z) = z^3 - 1,8z^2 + 1,08z - 0,21 + K$$

Établissons la table de Jury :

1	-1,8	1,08	K - 0,21
K - 0,21	1,08	-1,8	1
$1 - (K - 0,21)^2$	$-1,8 - 1,08(K - 0,21)$	$1,08 + 1,8(K - 0,21)$	

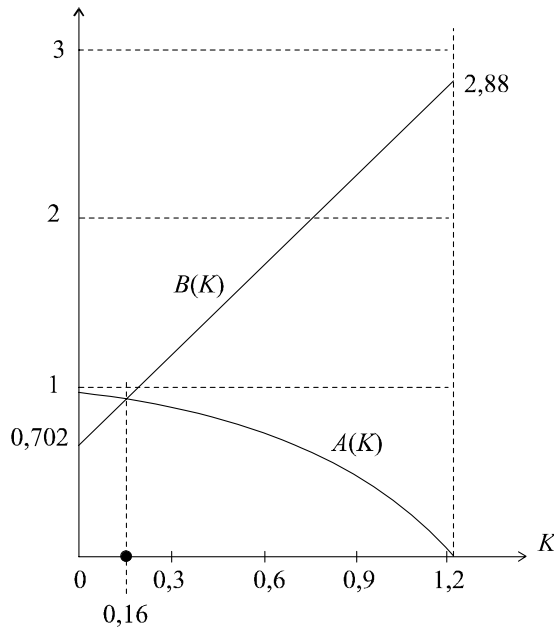
D'après le critère de Jury, le système est stable si et seulement si toutes les conditions suivantes sont respectées :

$$\begin{cases} D(1) > 0 \\ D(-1) < 0 \\ 1 > |K - 0,21| \\ |1 - (K - 0,21)^2| > |1,08 + 1,8(K - 0,21)| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,07 + K > 0 \\ -4,08 + K < 0 \\ -0,79 < K < 1,21 \\ |1 - (K - 0,21)^2| > |0,702 + 1,8K| \end{cases}$$

Comme  $K > 0$ , les trois premières conditions se résument à  $K < 1,21$ . Afin d'étudier d'un peu plus près la dernière condition :

$$|1 - (K - 0,21)^2| > |0,702 + 1,8K|$$

traçons sur un même diagramme les variations de  $A(K) = |1 - (K - 0,21)^2|$  et de  $B(K) = |0,702 + 1,8K|$  pour  $K$  variant de 0 à 1,21 (figure 12.22).



**Figure 12.22** Détermination graphique des conditions de stabilité en fonction du gain  $K$ .

En conclusion, le système est stable si et seulement si :

$$K < 0,16$$

Calculons à présent l'erreur statique en fonction de  $K$  :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1 + G(z)} \right] = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow 1} \left( 1 + \frac{K}{(z - 0,6)^3} \right)} = \frac{1}{1 + 15,6K}$$

Pour  $0 < K < 0,16$ , on a :

$$0,29 < \varepsilon_p < 1$$

L'erreur minimale que l'on puisse obtenir est donc de 29 % (pour la valeur de  $K$  située au voisinage du seuil d'instabilité). Cette valeur est d'autant plus inadmissible qu'il nous faudra sans aucun doute choisir une valeur de gain largement inférieure à 0,16, donc concéder une erreur stratique encore plus grande).

On introduit à présent un intégrateur dans la chaîne directe. La nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte est donc :

$$G(z) = \frac{K}{(1 - z^{-1})(z - 0,6)^3} = \frac{Kz}{(z - 1)(z - 0,6)^3}$$

Soit, en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{K}{(z - 1)(z - 0,6)^3 + K}$$

ou encore :

$$H(z) = \frac{K}{z^4 - 2,8z^3 + 2,88z^2 - 1,29z + K + 0,21}$$

Le dénominateur de cette fonction de transfert est :

$$D(z) = z^4 - 2,8z^3 + 2,88z^2 - 1,29z + K + 0,21$$

Établissons la table de Jury :

1	-2,8	2,88	-1,29	$K + 0,21$
$K + 0,21$	-1,29	2,88	-2,8	1
$1 - (K + 0,21)^2$	$-2,53 + 1,29K$	$2,88K + 2,276$	$-0,702 + 2,8K$	
$-0,702 + 2,8K$	$2,88K + 2,276$	$-2,53 + 1,29K$	$1 - (K + 0,21)^2$	
$A(K)$	$B(K)$	$C(K)$		

avec :

$$A(K) = [1 - (K + 0,21)^2]^2 - [2,8K - 0,702]^2$$

et :

$$C(K) = [1 - (K + 0,21)^2][2,88K + 2,276] - [2,8K - 0,702][1,29K - 2,53]$$

D'après le critère de Jury, le système est stable si et seulement si toutes les conditions suivantes sont respectées :

$$\begin{cases} D(1) > 0 \\ D(-1) > 0 \\ 1 > K + 0,21 \\ |1 - (K + 0,21)^2| > |2,8K - 0,702| \\ |A(K)| > |C(K)| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K > 0 \\ 8,18 + K > 0 \\ K < 0,79 \\ |1 - (K + 0,21)^2| > |2,8K - 0,702| \\ |A(K)| > |C(K)| \end{cases}$$

Comme  $K > 0$ , les trois premières conditions se résument à  $K < 0,79$ . Afin d'étudier d'un peu plus près la dernière condition :

$$|1 - (K + 0,21)^2| > |2,8K - 0,702|$$

traçons sur un même diagramme les variations de  $P(K) = |1 - (K + 0,21)^2|$  et de  $Q(K) = |2,8K - 0,702|$  pour  $K$  variant de 0 à 0,79 (figure 12.23).

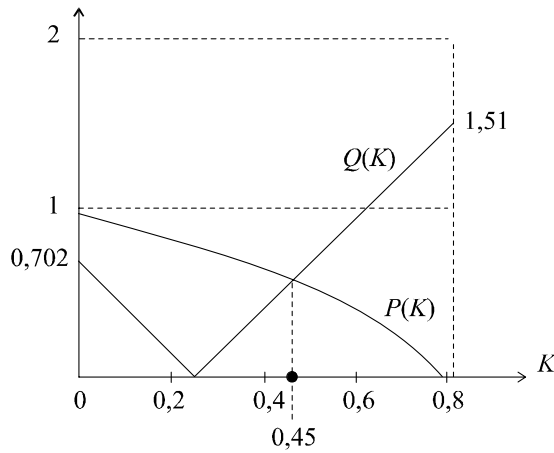


Figure 12.23 Détermination graphique d'une condition de stabilité en fonction du gain  $K$ .

Cette condition nous conduit à :  $K < 0,45$

Étudions à présent la dernière condition  $|A(K)| > |C(K)|$ . Pour ce faire, traçons, sur un même diagramme, les variations de  $|A(K)|$  et de  $|C(K)|$  pour  $K$  variant de 0 à 0,45 (figure 12.28).

On constate que  $|A(K)| > |C(K)|$  uniquement au voisinage de  $K = 0$ . Cela se traduit, dans la pratique, par l'impossibilité de trouver une valeur de  $K$  permettant d'assurer la condition recherchée. Par conséquent, le système, ainsi corrigé par un intégrateur, pourra difficilement être réglé pour être stable.

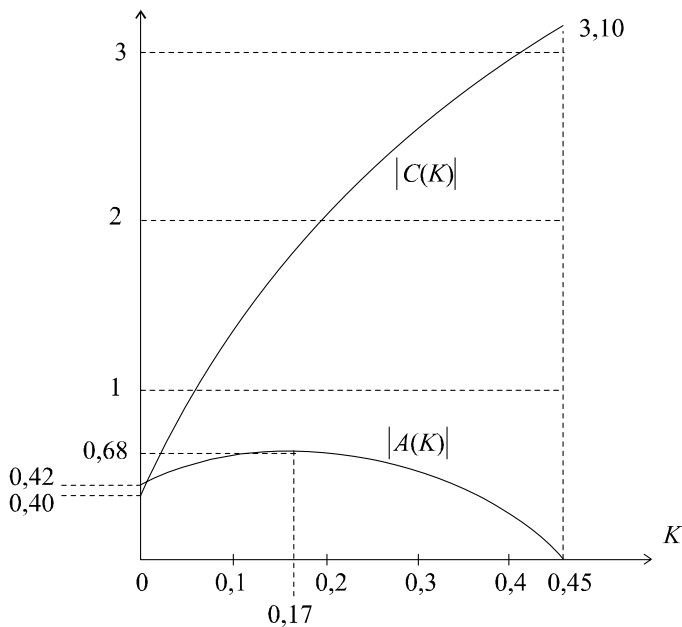


Figure 12.24 Détermination graphique d'une condition de stabilité en fonction du gain  $K$ .

**12.4** Calculons la fonction de transfert du système en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{0,16K}{(z - 0,8)^2 + 0,16K} = \frac{0,16K}{z^2 - 1,6z + 0,64 + 0,16K}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert est :

$$D(z) = z^2 - 1,6z + 0,64 + 0,16K$$

D'après le critère de Jury, le système est stable si et seulement si toutes les conditions suivantes sont respectées :

$$\begin{cases} D(1) > 0 \\ D(-1) > 0 \\ 1 > 0,64 + 0,16K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,04 + 0,16K > 0 \\ 3,24 + 0,16K > 0 \\ K < 2,25 \end{cases}$$

La condition de stabilité se résume donc à :  $K < 2,25$ .

En choisissant  $K = 1$ , on a :

$$H(z) = \frac{0,16}{z^2 - 1,6z + 0,8}$$

d'où :

$$s_k = 0,16e_{k-2} + 1,6s_{k-1} - 0,8s_{k-2}$$

L'erreur de position peut être facilement calculée :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1 + G(z)} \right] = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow 1} \left( 1 + \frac{0,16}{(z - 0,8)^2} \right)} = 0,2$$

Le calcul des premiers échantillons de sortie (tableau 12.5) et leur tracé (figure 12.25) permet de mettre en évidence le temps de montée et la valeur du dépassement. Un calcul plus approfondi des échantillons suivants montre la convergence assez rapide vers la valeur finale du signal (soit pour une entrée en échelon unité :  $s_\infty = 1 - 0,2 = 0,8$ ).

Le temps de montée se situe entre le cinquième et le sixième échantillon, soit :

$$t_m \approx 0,6 \text{ s}$$

Par ailleurs :

$$dep \approx 20 \%$$

ce qui correspond à un facteur d'amortissement, en boucle fermée égal à :

$$\xi_{BF} \approx 0,45$$

**Tableau 12.5** CALCUL DE LA SUITE D'ÉCHANTILLONS DE SORTIE.

$e_k$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$s_k$	0	0	0,16	0,416	0,698	0,943	1,111	1,183	1,164

En choisissant  $K = 2$ , on a :

$$H(z) = \frac{0,32}{z^2 - 1,6z + 0,96}$$

d'où :

$$s_k = 0,32e_{k-2} + 1,6s_{k-1} - 0,96s_{k-2}$$

L'erreur de position peut être facilement calculée :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1 + G(z)} \right] = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow 1} \left( 1 + \frac{0,32}{(z - 0,8)^2} \right)} = 0,11$$

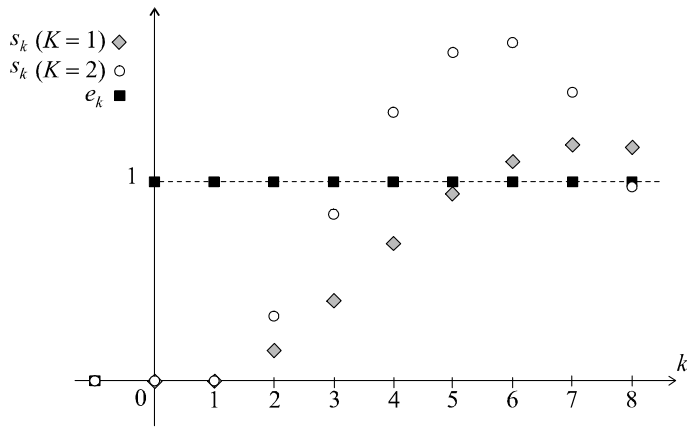


Figure 12.25 Représentation temporelle de la sortie du système.

Le calcul des premiers échantillons de sortie (tableau 12.6) permet de mettre en évidence le temps de montée et la valeur du dépassement. Un calcul plus approfondi des échantillons suivants montre la convergence très lente vers la valeur finale du signal (soit pour une entrée en échelon unité :  $s_\infty = 1 - 0,11 = 0,89$ ).

Le temps de montée se situe entre le troisième et le quatrième échantillon, soit :

$$t_m \approx 0,4 \text{ s}$$

Par ailleurs :

$$dep \approx 70 \%$$

Ce qui correspond à un facteur d'amortissement, en boucle fermée égal à :

$$\xi_{BF} \approx 0,1$$

Tableau 12.6 CALCUL DE LA SUITE D'ÉCHANTILLONS DE SORTIE.

$e_k$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$s_k$	0	0	0,32	0,832	1,344	1,672	1,704	1,442	0,991

En traçant cette suite d'échantillons sur le même graphe que pour le cas  $K = 1$  (figure 12.25), les conséquences des deux réglages différents sont facilement observables. La limitation du gain se traduit par un amortissement plus important (un dépassement plus faible) et un temps de montée légèrement plus grand. Le système est donc *a priori* plus stable et moins rapide. En revanche, le choix d'un gain plus important (assez proche du seuil d'instabilité) nous donne un dépassement plus important (système moins amorti) et un temps de montée plus faible. Cette rapidité est toute relative car c'est pour  $K = 1$  que le temps de réponse est plus faible.

► Résolution avec Mathematica

Pour tracer la suite d'échantillons, on écrira, suivant les cas ( $K = 1$  ou  $K = 2$ ) :

$$SZ = 0,16z / \left( (z^2 - 1,6z^{-1} + 0,8)(z - 1) \right)$$

$$SK = \text{InverseZTransform}[SZ, z, k]$$

$$\text{DiscretePlot}[SK, \{k, 1, 8\}]$$

ou bien :

$$SZ = 0,32z / \left( (z^2 - 1,6z^{-1} + 0,96)(z - 1) \right)$$

$$SK = \text{InverseZTransform}[SZ, z, k]$$

$$\text{DiscretePlot}[SK, \{k, 1, 8\}]$$



**12.5** Calculons la fonction de transfert équivalente en  $z$  du système en boucle fermée :

$$\text{On a :} \quad G(p) = \frac{K}{p+10} \quad \rightarrow \quad G(z) = \frac{K(1-e^{-10T_e})}{10(z-e^{-10T_e})}$$

Soit en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{K(1-e^{-10T_e})}{10(z-e^{-10T_e}) + K(1-e^{-10T_e})} = \frac{K(1-e^{-10T_e})}{10z - 10e^{-10T_e} + K(1-e^{-10T_e})}$$

Ce système est stable si et seulement si l'unique pôle de cette fonction de transfert en boucle fermée possède un module inférieur à 1.

$$\text{Soit :} \quad \left| \frac{10e^{-10T_e} + K(e^{-10T_e} - 1)}{10} \right| < 1$$

$$\text{Remarquons tout d'abord que :} \quad (e^{-10T_e} - 1) < 0, \quad \forall T_e > 0$$

$$\text{Si :} \quad 10e^{-10T_e} + K(e^{-10T_e} - 1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad K < \frac{10e^{-10T_e}}{1 - e^{-10T_e}}$$

$$\text{on a alors :} \quad 10e^{-10T_e} + K(e^{-10T_e} - 1) < 10$$

$$\text{d'où :} \quad K > \frac{10 - 10e^{-10T_e}}{e^{-10T_e} - 1} \quad \Rightarrow \quad K > -10$$

qui est toujours vrai, donc  $K < \frac{10e^{-10T_e}}{1 - e^{-10T_e}}$  est une condition suffisante de stabilité.

$$\text{Si au contraire :} \quad 10e^{-10T_e} + K(e^{-10T_e} - 1) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad K > \frac{10e^{-10T_e}}{1 - e^{-10T_e}}$$

$$\text{on a alors :} \quad -10e^{-10T_e} - K(e^{-10T_e} - 1) < 10$$

$$\text{d'où :} \quad K < \frac{10 + 10e^{-10T_e}}{1 - e^{-10T_e}}$$

Cette valeur étant supérieure à celle trouvée précédemment, on en déduit, en résumant les deux cas, la condition nécessaire et suffisante de stabilité :

$$K < \frac{10 + 10e^{-10T_e}}{1 - e^{-10T_e}}$$

Ce seuil de stabilité dépend de la valeur de la période d'échantillonnage.

$$\text{Pour } T_e = 1 \text{ s, on a :} \quad K < 10$$

$$\text{Pour } T_e = 0,1 \text{ s, on a :} \quad K < 21,6$$

$$\text{Pour } T_e = 0,02 \text{ s, on a :} \quad K < 100$$

Conclusion : le seuil de stabilité est d'autant plus important que la période d'échantillonnage est faible.

Réglons à présent le gain sur  $K = 50$ . La condition de stabilité s'exprime par :

$$50 < \frac{10 + 10e^{-10T_e}}{1 - e^{-10T_e}}$$

soit :

$$50 \left(1 - e^{-10T_e}\right) < 10 + 10 e^{-10T_e}$$

d'où :

$$e^{-10T_e} > \frac{2}{3}$$

Finalement :

$$T_e < -\frac{1}{10} \ln \frac{2}{3} \Rightarrow T_e < 0,04 \text{ s}$$

Conclusion : le choix d'un critère de stabilité concernant le gain statique impose une condition sur la période d'échantillonnage.

**12.6** Calculons la fonction de transfert équivalente en  $z$  du système en boucle ouverte, à partir de l'équivalent à la dérivation :

$$G_1(z) = \frac{K}{\left(\frac{z-1}{0,2z} + 1\right) \left(\frac{z-1}{0,2z} + 3\right)} = \frac{0,04Kz^2}{(1,2z-1)(1,6z-1)}$$

soit encore :

$$G_1(z) = \frac{0,04Kz^2}{1,92z^2 - 2,8z + 1}$$

En utilisant l'équivalent à l'intégration, on obtient :

$$G_2(z) = \frac{K}{\left(\frac{10z-10}{z+1} + 1\right) \left(\frac{10z-10}{z+1} + 3\right)} = \frac{K(z+1)^2}{(11z-9)(13z-7)}$$

soit encore :

$$G_2(z) = \frac{K(z+1)^2}{143z^2 - 194z + 63}$$

Quant à la table des équivalents fournie en annexe D, elle nous donne :

$$G_3(z) = \frac{K(1 - e^{-T_e})(1 - e^{-3T_e})}{3(z - e^{-T_e})(z - e^{-3T_e})} = \frac{0,081K}{3(z - 0,82)(z - 0,55)}$$

soit encore :

$$G_3(z) = \frac{0,081K}{3z^2 - 4,11z + 1,35}$$

Calculons à présent les trois fonctions de transfert en boucle fermée et déterminons, pour chacune d'entre elles, les conditions de stabilité.

Tout d'abord :

$$H_1(z) = \frac{0,04Kz^2}{(1,92 + 0,04K)z^2 - 2,8z + 1}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert est :

$$D_1(z) = (1,92 + 0,04K)z^2 - 2,8z + 1$$

D'après le critère de Jury, le système est stable si et seulement si toutes les conditions suivantes sont respectées :

$$\begin{cases} D(1) > 0 \\ D(-1) > 0 \\ 1,92 + 0,04K > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,12 + 0,04K > 0 \\ 5,72 + 0,04K > 0 \\ K > -23 \end{cases}$$

Comme  $K > 0$ , le système est inconditionnellement stable.

On a ensuite :

$$H_2(z) = \frac{K(z+1)^2}{143z^2 - 194z + 63 + K(z+1)^2}$$

soit :

$$H_2(z) = \frac{K(z+1)^2}{(143+K)z^2 - (194-2K)z + 63+K}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert est :

$$D_2(z) = (143+K)z^2 - (194-2K)z + 63+K$$

D'après le critère de Jury, le système est stable si et seulement si toutes les conditions suivantes sont respectées :

$$\begin{cases} D(1) > 0 \\ D(-1) > 0 \\ 143+K > 63+K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12+4K > 0 \\ 400 > 0 \\ 143 > 63 \end{cases}$$

Comme  $K > 0$ , le système est inconditionnellement stable.

Pour finir :

$$H_3(z) = \frac{0,081K}{3z^2 - 4,11z + 1,35 + 0,081K}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert est :

$$D_3(z) = 3z^2 - 4,11z + 1,35 + 0,081K$$

D'après le critère de Jury, le système est stable si et seulement si toutes les conditions suivantes sont respectées :

$$\begin{cases} D(1) > 0 \\ D(-1) > 0 \\ 3 > 1,35 + 0,081K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,24 + 0,081K > 0 \\ 8,46 + 0,081K > 0 \\ K < 20,4 \end{cases}$$

Comme  $K > 0$ , la condition de stabilité se résume à :  $K < 20,4$ .

Conclusion : les équivalents à la dérivation et à l'intégration ne permettent pas toujours de rendre compte d'une possible instabilité d'un système échantillonné censé être équivalent à un système à temps continu qui, lui, est inconditionnellement stable.

**12.7** Avant de calculer la fonction de transfert en boucle fermée, déterminons tout de suite la condition sur les paramètres du système de manière à obtenir l'erreur statique attendue :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1+G(z)} \right] = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow 1} \left( 1 + \frac{K}{z^2 - az + b} \right)} = \frac{1-a+b}{K+1-a+b}$$

On doit donc avoir :

$$\varepsilon_p = \frac{1-a+b}{K+1-a+b} = 0,2$$

Calculons à présent la fonction de transfert du système en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{K}{z^2 - az + b + K}$$

Le comportement souhaité en boucle fermée est comparable à celui d'un système du second ordre en régime oscillatoire amorti.

Nous savons, dans ces conditions, que :

$$H(z) = \frac{K_{BF} \left( 1 + e^{-2\xi_{BF}\omega_{nBF}T_e} - 2 e^{-\xi_{BF}\omega_{nBF}T_e} \cos \omega_{nBF}T_e \sqrt{1 - \xi_{BF}^2} \right)}{z^2 - 2z e^{-\xi_{BF}\omega_{nBF}T_e} \cos \omega_{nBF}T_e \sqrt{1 - \xi_{BF}^2} + e^{-2\xi_{BF}\omega_{nBF}T_e}}$$

D'après l'abaque des réponses indicielles d'un système du second ordre, on a :

$$d = 30 \% \Rightarrow \xi_{BF} \approx 0,35$$

Par ailleurs :  $t_m = 2,5 \text{ s} \Rightarrow \omega_{nBF} \approx \frac{3}{2,5} = 1,2 \text{ rad/s}$

En appliquant l'expression ci-dessus, la fonction de transfert en boucle fermée qui possédera les performances dynamiques requises, a pour expression :

$$H(z) = \frac{0,29K_{BF}}{z^2 - 1,37z + 0,66}$$

On a donc : 
$$\begin{cases} a = 1,37 \\ b + K = 0,66 \end{cases}$$

Or : 
$$\varepsilon_p = \frac{1 - a + b}{K + 1 - a + b} = 0,2 \Rightarrow \frac{b - 0,37}{0,29} = 0,2$$

d'où : 
$$b = 0,428$$

et : 
$$K = 0,232$$

On a, par ailleurs : 
$$K = 0,29K_{BF} \Rightarrow K_{BF} = 0,8$$

Résultat tout à fait prévisible puisque l'erreur statique, en boucle fermée, doit être égale à 0,2.

En résumé, la fonction de transfert en boucle fermée correspondant au cahier des charges attendu a pour expression :

$$H(z) = \frac{0,232}{z^2 - 1,37z + 0,66}$$

et elle correspond, en boucle ouverte, à la fonction :

$$G(z) = \frac{0,232}{z^2 - 1,37z + 0,428}$$

En boucle fermée, l'équation de récurrence est :

$$s_k = 1,37s_{k-1} + 0,66s_{k-2} + 0,232e_{k-2}$$

Le calcul des premiers échantillons de sortie (tableau 12.7) et leur tracé (figure 12.26) permet de mettre en évidence le temps de montée et la valeur du dépassement. Un calcul plus approfondi des échantillons suivants montre la convergence assez rapide vers la valeur finale du signal (soit pour une entrée en échelon unité :  $s_\infty = 1 - 0,2 = 0,8$ ).

Le dépassement est certes légèrement plus important que prévu et le temps de montée un peu plus court, mais la technique que nous venons d'employer prouve, malgré tout, toute son efficacité.

**Tableau 12.7** CALCUL DE LA SUITE D'ÉCHANTILLONS DE SORTIE.

$e_k$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$s_k$	0	0	0,232	0,550	0,832	1,009	1,065	1,025	0,934

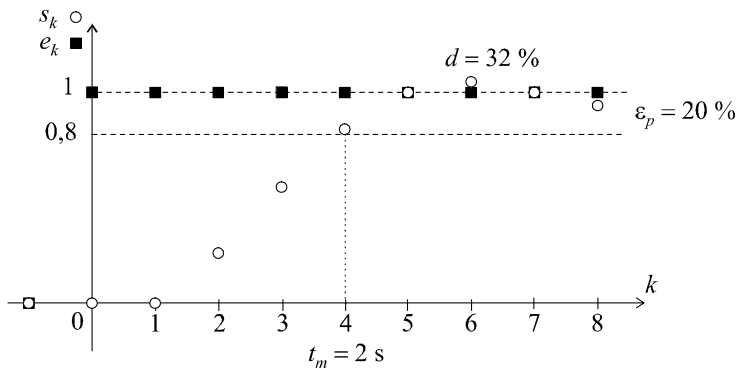


Figure 12.26 Représentation temporelle de la sortie du système.

► Résolution avec Mathematica

Pour tracer la suite d'échantillons, on écrira :

```
SZ = 0,232z / ((0,66 - 1,37z + z^2)(z - 1))
SK = InverseZTransform[SZ, z, k]
DiscretePlot[SK, {k, 1, 8}]
```

12.8 Le schéma équivalent du système, en temps continu, est représenté sur la figure 12.27. Un bloqueur d'ordre 0 assure l'interface avec le système  $G(p)$ .

On a :

$$B_0(p) \approx \frac{1}{1 + \frac{T_e p}{2}} = \frac{4}{p + 4}$$

La fonction de transfert du système en boucle ouverte est donc :

$$G(p) = B_0(p)A(p) = \frac{4K}{p(p + 1)(p + 4)}$$

et en boucle fermée :

$$H(p) = \frac{4K}{p(p + 1)(p + 4) + 4K}$$

soit :

$$H(p) = \frac{4K}{p^3 + 5p^2 + 4p + 4K}$$

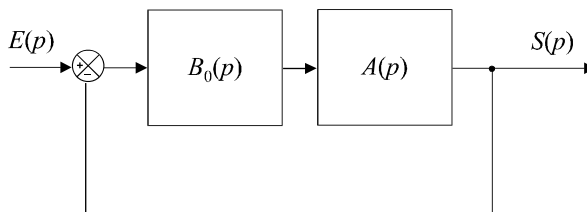


Figure 12.27 Équivalence du système en temps continu.

Déterminons les conditions de stabilité de ce système à l'aide du critère de Routh :

$$\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 5 & 4K \\ \frac{20-4K}{5} & 0 \\ 4K & 0 \end{array}$$

Le système est stable si :

$$K < 5$$

Pour obtenir un dépassement de 20 % en boucle fermée, on doit avoir :

$$\xi_{BF} = 0,45 \Rightarrow \Delta\varphi \approx 45^\circ$$

Or :

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan \omega_{c0} - \arctan \frac{\omega_{c0}}{4}$$

d'où :

$$\omega_{c0} = 0,7 \text{ rad/s}$$

Par conséquent :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{4K}{\omega_{c0} \sqrt{\omega_{c0}^2 + 1} \sqrt{\omega_{c0}^2 + 16}} = 1$$

d'où :

$$K = \frac{\omega_{c0}}{4} \sqrt{\omega_{c0}^2 + 1} \sqrt{\omega_{c0}^2 + 16} = 0,87$$

Pour obtenir un dépassement de 20 % en boucle fermée, la fonction de transfert du système  $A(p)$  doit donc être :

$$A(p) = \frac{0,87}{p(p+1)}$$

La fonction de transfert échantillonnée correspondante est :

$$A(z) = 0,87 \left[ \frac{0,5}{z-1} - \frac{1-e^{-0,5}}{z-e^{-0,5}} \right]$$

soit :

$$A(z) = 0,87 \left[ \frac{0,5}{z-1} - \frac{0,4}{z-0,6} \right] = \frac{0,087z + 0,087}{z^2 - 1,6z + 0,6}$$

La fonction de transfert en boucle fermée est donc :

$$H(z) = \frac{0,087z + 0,087}{z^2 - 1,6z + 0,6 + 0,087z + 0,087}$$

soit :

$$H(z) = \frac{0,087z + 0,087}{z^2 - 1,513z + 0,687} = \frac{0,087z^{-1} + 0,087z^{-2}}{1 - 1,513z^{-1} + 0,687z^{-2}}$$

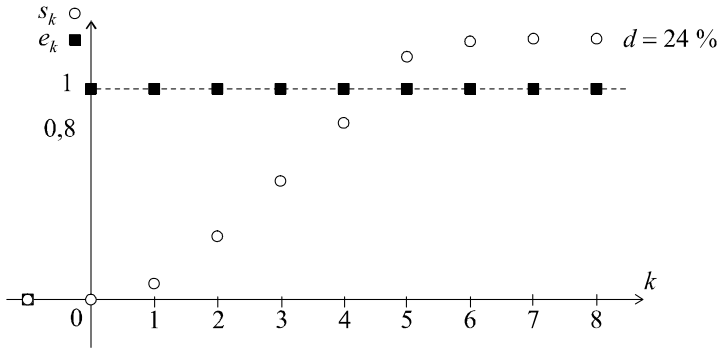
d'où l'équation de récurrence :  $s_k = 1,513s_{k-1} - 0,687s_{k-2} + 0,087e_{k-1} + 0,087e_{k-2}$

Le calcul des premiers échantillons de sortie (tableau 12.8) et leur tracé (figure 12.28) permet de mettre en évidence la valeur du dépassement qui est conforme à nos prévisions (24 % au lieu de 20 %, ce qui est somme toute honorable compte tenu des approximations réalisées).

L'erreur statique est nulle, grâce à l'intégrateur, et le calcul des échantillons suivants montre la convergence assez rapide vers 1 après quelques oscillations amorties.

**Tableau 12.8** CALCUL DE LA SUITE D'ÉCHANTILLONS DE SORTIE.

$e_k$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$s_k$	0	0,087	0,306	0,577	0,837	1,043	1,178	1,24	1,24



**Figure 12.28** Représentation temporelle de la sortie du système.

► Résolution avec Mathematica

Pour tracer la suite d'échantillons, on écrira :

$$SZ = (0,087 + 0,087z^{-1}) / ((1 - 1,513z^{-1} + 0,687z^{-2})(z - 1))$$

$$SK = \text{InverseZTransform}[SZ, z, k]$$

$$\text{DiscretePlot}[SK, \{k, 1, 8\}]$$

## Chapitre 13

# Correction des systèmes échantillonnés asservis

### 13.1 PRINCIPES GÉNÉRAUX

#### 13.1.1 Rappel du cahier des charges d'un asservissement

Les systèmes échantillonnés comme les systèmes à temps continu, doivent en général satisfaire à un cahier des charges qui impose, en boucle fermée, un certain nombre de performances (qui d'ailleurs sont les mêmes qu'en temps continu) : précision, rapidité, marge de stabilité et limitation du dépassement.

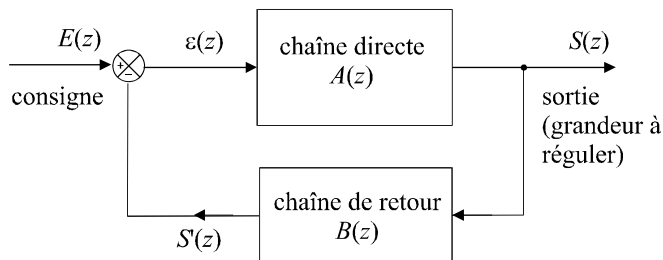


Figure 13.1 Schéma général d'un système échantillonné asservi.

Considérons un système constitué d'une chaîne directe et d'une chaîne de retour. La plupart du temps, on ne choisit ni les lois de fonctionnement des systèmes  $A(z)$  et  $B(z)$ , ni, bien sûr, leurs fonctions de transfert qui, en général, sont des données imposées par la conception même du système asservi en cours d'élaboration. Parfois, certains paramètres sont réglables mais souvent, aucun d'entre eux ne l'est.

#### 13.1.2 Rôle du correcteur

Si l'on s'en tenait là, nous ne pourrions malheureusement que prédire et constater les performances (ou les contre-performances) de la boucle d'asservissement sans pouvoir agir sur celles-ci. Il y a peu de chance, alors, que le cahier des charges soit respecté. L'idée consiste, ici encore, à introduire dans la chaîne directe, en amont du système  $A(z)$ , un dispositif supplémentaire de fonction de transfert  $C(z)$ , appelé correcteur numérique et dont le rôle essentiel doit consister à modifier les performances du système initial (figure 13.2).

Cela revient à dire que nous transformons les fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée de manière à imposer à l'ensemble de fonctionner selon le cahier des charges voulu.



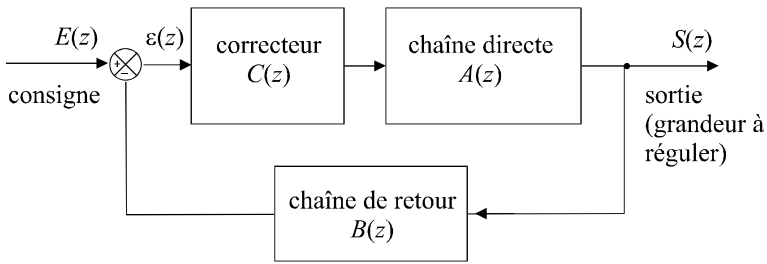


Figure 13.2 Schéma général d'un système échantillonné asservi et corrigé.

Si  $G_i(z)$  et  $H_i(z)$  sont les fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée du système initial et  $G_c(z)$  et  $H_c(z)$  les fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée du système corrigé, on aura :

$$G_i(z) = A(z)B(z)H_i(z) = \frac{A(z)}{1 + A(z)B(z)}$$

et :

$$G_c(z) = A(z)B(z)C(z)H_c(z) = \frac{A(z)C(z)}{1 + A(z)B(z)C(z)}$$

Tout l'art de la correction des systèmes échantillonnés consiste à choisir la bonne fonction de transfert  $C(z)$  pour ce correcteur numérique de manière à régler chaque performance sur sa valeur requise, sans perturber, bien sûr, le fonctionnement du système. Ces corrections sont en général assurées par un ordinateur.

### 13.1.3 Correction numérique d'un système à temps continu

Très souvent, on choisit, pour des questions de souplesse et de précision, de corriger numériquement un système à temps continu. Le schéma de la boucle d'asservissement correspondante est représenté sur la figure 13.3. Un bloqueur doit, bien entendu, être intercalé entre le correcteur numérique et le système à commander.

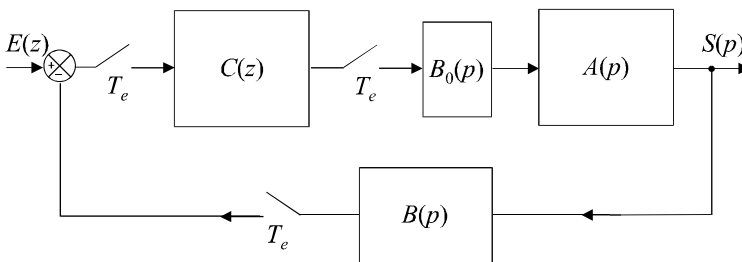


Figure 13.3 Asservissement continu commandé et corrigé numériquement.

Dans ce cas, les techniques de recherche d'un équivalent de la boucle d'asservissement étudiées au chapitre précédent pourront s'appliquer, que ce soit un équivalent à temps continu ou à temps discret.

### 13.1.4 Problèmes spécifiques liés aux correcteurs numériques

Dans le cas des systèmes à temps continus, il a été relativement facile d'identifier les trois actions correctives simples : action proportionnelle, action dérivée et action intégrale et visualiser immédiatement, par exemple sur un diagramme de Bode, l'influence que ce type d'action avait sur le comportement fréquentiel, donc sur les performances.

Les choses ne sont pas si simples lorsqu'il s'agit d'asservissements échantillonnés. En effet, les formes diverses et variées des équations de récurrence des systèmes posent parfois problème lorsqu'il s'agit de conclure à des résultats généraux.

Certes, on peut toujours présupposer un principe d'équivalence entre les actions correctives élémentaires en temps continu et la forme correspondante en  $z$  :

$$\begin{aligned} \text{Action proportionnelle : } & C(p) = K \quad \leftrightarrow \quad C(z) = K \\ \text{Action intégrale : } & C(p) = \frac{1}{p} \quad \leftrightarrow \quad C(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \\ \text{Action dérivée : } & C(p) = p \quad \leftrightarrow \quad C(z) = 1 - z^{-1} \end{aligned}$$

Toutefois, il est hors de question, ici, d'imaginer corriger intuitivement un système échantillonné en introduisant telle ou telle action corrective élémentaire (hormis l'action intégrale qui, elle, est sans trop de surprises et qui améliore systématiquement la précision en boucle fermée). Ainsi, l'introduction du gain inférieur à 1 n'augmente pas obligatoirement la stabilité, de même que la rapidité n'est pas forcément affectée par l'introduction d'un dérivateur.

Le paragraphe suivant, que nous avons volontairement intitulé « tentatives » d'actions correctives simples, présente quelques exemples que nous considérerons plutôt comme des études de cas permettant de sensibiliser le lecteur aux problèmes spécifiques liés aux actions correctives sur les systèmes échantillonnés. Nous étudierons ensuite des méthodes de synthèse de correcteurs numériques plus adaptées et plus systématiques, telles que la technique de discrétisation des correcteurs (bien adaptée à la correction numérique d'un système à temps continu) et les méthodes polynomiales (classiques, efficaces et somme toute, assez faciles à mettre en œuvre).

## 13.2 TENTATIVES D'ACTIONS CORRECTIVES SIMPLES

### 13.2.1 Amélioration de la précision

Comme mentionné précédemment, peu de surprises ici. L'action intégrale améliore la précision du système, mais, attention, elle peut bousculer les autres performances, de manière souvent imprévisible (au sens de la perception *temps continu* que l'on a peut-être de cette action corrective).

#### a) Correcteur à action intégrale

L'étude menée au chapitre précédent à propos de la précision d'un système asservi à temps discret nous a conduit à la conclusion suivante : la présence, dans la fonction de transfert en boucle ouverte, d'un intégrateur (i.e. d'un pôle égal à 1) assure la nullité de l'erreur de position, c'est-à-dire la précision statique parfaite. Si ce pôle est au moins double (s'il y a au moins deux intégrateurs dans la chaîne directe), l'erreur de vitesse est nulle, autrement dit la précision dynamique parfaite est assurée. Par conséquent, pour améliorer simplement la précision, en boucle fermée, d'un système à temps discret, on peut choisir un correcteur de fonction de transfert égale à :

$$C(z) = \frac{K}{(1 - z^{-1})^n}$$

On choisira  $n = 1$  si le cahier des charges impose uniquement une condition de nullité de l'erreur de position et  $n = 2$  si l'erreur de vitesse doit être nulle également.

b) Conséquence sur les autres performances

Analysons au travers d'un exemple simple, l'influence de l'introduction d'un intégrateur sur le comportement global d'un asservissement. Soit un système à temps discret de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(z)$  placé dans une boucle à retour unitaire, avec :

$$G(z) = \frac{2}{1 - 0,5z^{-1}} = \frac{2z}{z - 0,5}$$

Soit, en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{2z}{3z - 0,5}$$

Ce qui correspond à l'équation de récurrence :  $s_k = 0,17s_{k-1} + 0,67e_k$ .

Ce système est stable en boucle fermée puisque l'unique pôle de la fonction de transfert en boucle fermée est inférieur à 1.

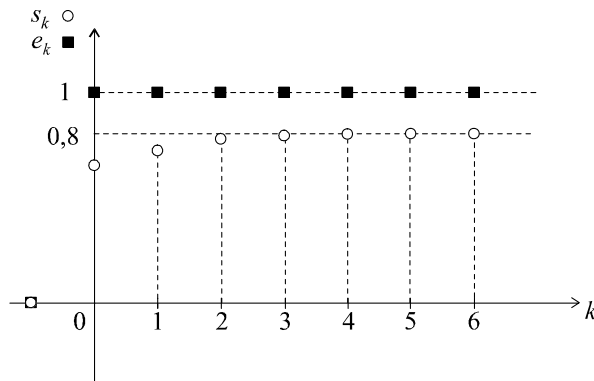
Soit :

$$p_1 = \frac{0,5}{3} = 0,17 < 1$$

Considérons les suites d'échantillons d'entrée (échelon unité) et de sortie (tableau 13.1) et représentons-les graphiquement (figure 13.4).

**Tableau 13.1** SIMULATION DE LA SUITE D'ÉCHANTILLONS.

$e_k$	1	1	1	1	1	1	1
$s_k$	0,667	0,777	0,796	0,799	0,800	0,800	0,800



**Figure 13.4** Représentation temporelle du comportement du système en boucle fermée.

L'erreur de position a pour valeur :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + G(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \frac{2z}{z - 0,5}} = \frac{1 - 0,5}{1 - 0,5 + 2} = 0,2 = 20 \%$$

Introduisons un intégrateur dans la chaîne directe. On a, à présent :

$$G(z) = \frac{K}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{2z}{z - 0,5} = \frac{2z^2}{(z - 1)(z - 0,5)} \text{ avec } K = 1 \text{ dans un premier temps.}$$

soit, en boucle fermée : 
$$H(z) = \frac{2z^2}{(z-1)(z-0,5) + 2z^2} = \frac{2z^2}{3z^2 - 1,5z + 0,5}$$

ou encore : 
$$H(z) = \frac{2}{3 - 1,5z^{-1} + 0,5z^{-2}}$$

ce qui correspond à l'équation de récurrence :

$$s_k = 0,5s_{k-1} - 0,17s_{k-2} + 0,67e_k$$

Les pôles de cette fonction de transfert (les racines de l'équation  $3z^2 - 1,5z + 0,5 = 0$ ) se calculent aisément et on peut vérifier sans peine que leurs modules sont inférieurs à 1. La condition de stabilité est donc toujours vérifiée.

En effet : 
$$\Delta = b^2 - 4ac = (1,5)^2 - 6 = -3,75$$

$$p_{1/2} = \frac{1,5 \pm j\sqrt{3,75}}{6} \Rightarrow |p_1| = |p_2| = 0,41$$

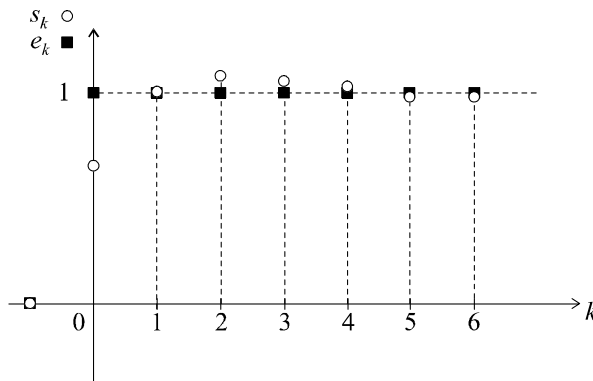
Toutefois, les modules de ces pôles sont plus proches de 1 que l'unique pôle du système non corrigé (qui était égal à 0,17). On peut donc en déduire que la marge de stabilité est légèrement diminuée par l'ajout du correcteur (elle reste néanmoins très confortable).

Construisons un tableau avec les suites d'échantillons d'entrée (échelon unité) et de sortie (tableau 13.2) et représentons-les graphiquement (figure 13.5).

**Tableau 13.2** SIMULATION DE LA SUITE D'ÉCHANTILLONS.

$e_k$	1	1	1	1	1	1	1
$s_k$	0,667	1,000	1,056	1,028	1,005	0,998	0,998

On note la présence d'un faible dépassement (environ 6 %) ce qui corrobore la légère perte de marge de stabilité et une rapidité accrue puisque le temps de montée correspond à l'échantillon  $k = 1$ , soit  $t_m = T_e$ .



**Figure 13.5** Représentation temporelle du comportement du système en boucle fermée après correction.

### 13.2.2 Compensation de la perte de stabilité par placement des pôles

Reprenons le système que nous venons d'étudier en ajoutant un gain  $K$  dans la chaîne directe en plus de l'intégrateur. On a donc maintenant :

$$G(z) = \frac{K}{1-z^{-1}} \cdot \frac{2z}{z-0,5} = \frac{2Kz^2}{(z-1)(z-0,5)} \text{ avec } K \neq 1$$

soit, en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{2Kz^2}{(1+2K)z^2 - 1,5z + 0,5}$$

Cette fois, on a :  $\Delta = b^2 - 4ac = (1,5)^2 - 2(1+2K) = 0,25 - 4K$

Pour augmenter la marge de stabilité, on doit chercher à réduire le module des pôles. Le discriminant restant négatif tant que  $K > 0,0625$ , nous pouvons partir du principe que les pôles resteront complexes conjugués :

$$p_{1/2} = \frac{1,5 \pm j\sqrt{4K - 0,25}}{2(1+2K)}$$

soit :

$$|p_1| = |p_2| = \frac{\sqrt{(1,5)^2 + 4K - 0,25}}{2(1+2K)} = \frac{1}{\sqrt{2(1+2K)}}$$

Il suffit de choisir une valeur de  $K$  qui correspond à une valeur souhaitée pour le module de chaque pôle, par exemple :

$$|p_1| = |p_2| = 0,25 \text{ pour } K = 3,5$$

On a alors :

$$H(z) = \frac{7}{8 - 1,5z^{-1} + 0,5z^{-2}}$$

ce qui correspond à l'équation de récurrence :

$$s_k = 0,1875s_{k-1} - 0,0625s_{k-2} + 0,875e_k$$

**Tableau 13.3** SIMULATION DE LA SUITE D'ÉCHANTILLONS.

$e_k$	1	1	1	1	1	1	1
$s_k$	0,875	1,039	1,015	1,000	0,999	1,000	1,000

On note bien la présence d'un amortissement plus prononcé, ce qui correspond bien à une augmentation de la marge de stabilité

**Remarque** : on peut être surpris de corriger la stabilité d'un système à l'aide d'un amplificateur de gain  $K > 1$ . Attention, il ne s'agit pas d'un cas général : c'est la forme particulière du système qui amène ce résultat auquel nous sommes fort peu habitués. L'étude qui vient d'être faite montre qu'il n'est pas aussi facile de corriger « intuitivement » un système à temps discret, comme on peut avoir l'habitude de le faire en temps continu. On retiendra de cette étude la technique de placement des pôles, autrement dit du choix de la valeur de ceux-ci, ou plutôt de leurs modules.

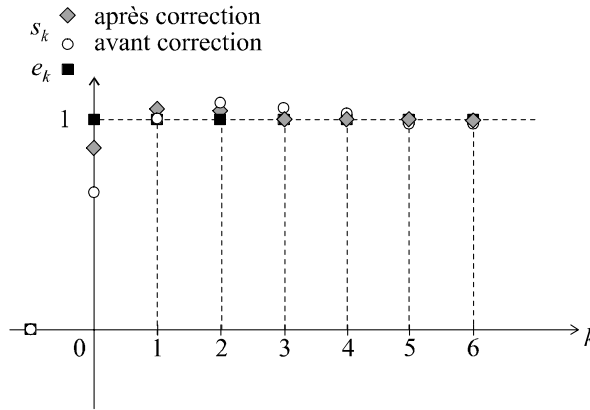


Figure 13.6 Représentation temporelle du comportement du système en boucle fermée après correction.

### 13.2.3 Action dérivée

Un correcteur numérique à action dérivée possède une fonction de transfert  $C(z)$  égale à :

$$C(z) = K (1 - z^{-1}) \text{ avec } K > 0$$

Analysons, au travers d'un exemple simple, l'influence d'un tel correcteur. Soit  $A(z)$  un système échantillonné placé dans une boucle de régulation à retour unitaire et précédé d'un correcteur à action dérivée, avec :

$$A(z) = \frac{1}{(z - 0,1)}$$

La fonction de transfert en boucle fermée du système non corrigé est :

$$H_i(z) = \frac{A(z)}{1 + A(z)} = \frac{1}{z + 0,9}$$

L'unique pôle de cette fonction de transfert est :

$$p_1 = -0,9$$

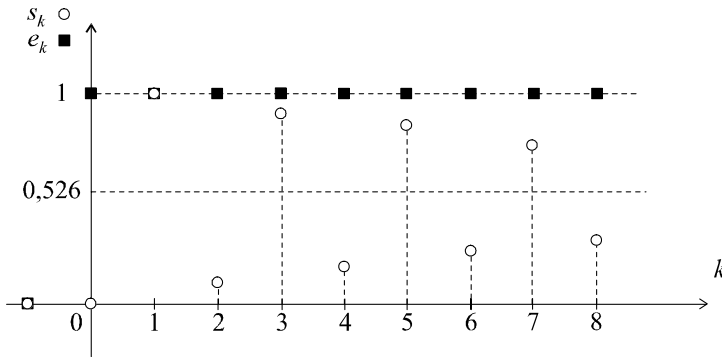
Ce pôle possède bien un module inférieur à 1 mais sa valeur est proche de la limite d'instabilité ; le système est donc stable en boucle fermée mais mériterait sans doute d'être corrigé pour disposer d'une marge de sécurité plus confortable. L'équation de récurrence en boucle fermée étant :

$$s_k = -0,9s_{k-1} + e_{k-1}$$

on peut aisément calculer et représenter graphiquement la suite des échantillons de sortie lorsque l'entrée est un échelon unité pour constater qu'effectivement, le système est stable, mais peu stable si l'on en croit le régime oscillatoire très peu amorti. De plus, il est très peu précis.

**Tableau 13.4** SIMULATION DE LA SUITE D'ÉCHANTILLONS.

$e_k$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$s_k$	0	1	0,1	0,910	0,181	0,837	0,247	0,778	0,300



**Figure 13.7** Représentation temporelle du comportement du système en boucle fermée avant correction.

En présence du correcteur à action dérivée, on a :

$$G(z) = C(z)A(z) = \frac{K(1 - z^{-1})}{z - 0,1} = \frac{K(z - 1)}{z(z - 0,1)}$$

**Remarque** : compte tenu des connaissances que nous avons acquises pour les systèmes à temps continu, nous nous attendons à ce que la stabilité du système soit améliorée.

La fonction de transfert en boucle fermée du système corrigé est donc :

$$H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{K(z - 1)}{z(z - 0,1) + K(z - 1)} = \frac{K(z - 1)}{z^2 + (K - 0,1)z - K}$$

L'équation de récurrence correspondante est :

$$s_k = (0,1 - K)s_{k-1} + Ks_{k-2} + Ke_{k-1} - Ke_{k-2}$$

Calculons les pôles de cette fonction de transfert.

Cette fois, on a :  $\Delta = b^2 - 4ac = (K - 0,1)^2 + 4K$

Ce discriminant étant toujours positif, on a :

$$p_{1/2} = \frac{-(K - 0,1) \pm \sqrt{(K - 0,1)^2 + 4K}}{2}$$

soit :  $|p_1| = \frac{0,1 - K + \sqrt{(K - 0,1)^2 + 4K}}{2}$

et :  $|p_2| = \frac{K - 0,1 + \sqrt{(K - 0,1)^2 + 4K}}{2}$

On peut représenter, sur un même graphique, les variations de  $|p_1|$  et de  $|p_2|$  en fonction de  $K$  (figure 13.8). Pour que le système soit stable, il faut que les deux pôles aient un module inférieur à 1.

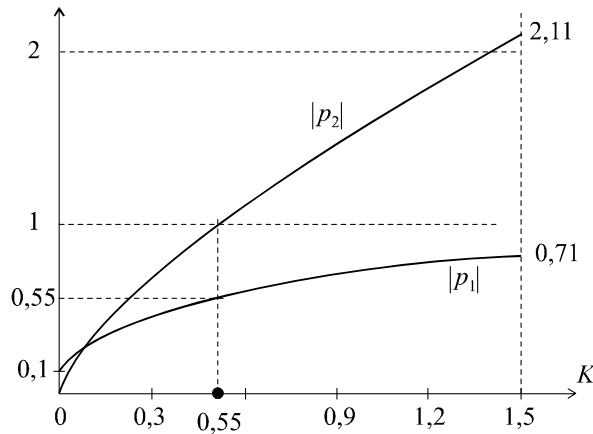


Figure 13.8 Variations des modules des pôles en fonction du gain  $K$ .

On en déduit donc :  $K < 0,55$

Choisissons par exemple  $K = 0,4$  puis calculons et traçons la suite d'échantillons en sortie du système lorsque celui-ci est soumis à un échelon unité (tableau 13.5 et figure 13.9). Dans ce cas, on a :

$$s_k = -0,3s_{k-1} + 0,4s_{k-2} + 0,4e_{k-1} - 0,4e_{k-2}$$

Tableau 13.5 SIMULATION DE LA SUITE D'ÉCHANTILLONS.

$e_k$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$s_k$	0	0,400	-0,120	0,196	-0,107	0,110	-0,076	0,067	-0,050

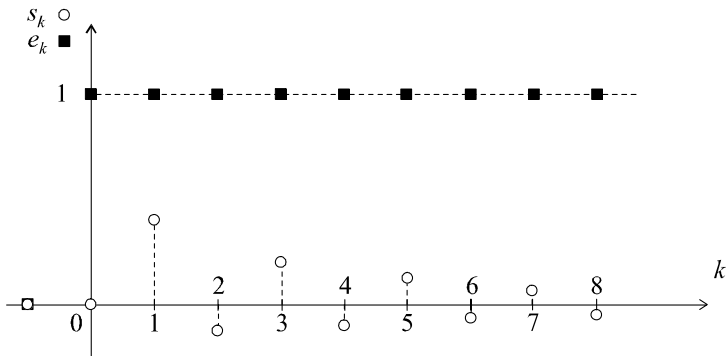


Figure 13.9 Représentation temporelle du comportement du système en boucle fermée après correction.



Le système est effectivement plus stable puisqu'il converge vers une valeur finie beaucoup plus vite, ce qui est conforme au calcul des nouveaux pôles.

Soit :  $|p_1| = 0,5$

et :  $|p_2| = 0,8$

Toutefois, ce type de correction est inacceptable puisque l'erreur de position atteint à présent 100 %.

### 13.3 SYNTHÈSE D'UN CORRECTEUR NUMÉRIQUE PAR DISCRÉTISATION D'UN CORRECTEUR CONTINU

#### 13.3.1 Principe

La méthode que nous allons présenter s'adapte particulièrement bien aux problèmes de synthèse d'une correction numérique d'un asservissement continu (figure 13.10). Nous supposons donc que nous cherchons à asservir un système de fonction de transfert  $A(p)$  au moyen d'un correcteur  $C(z)$ . Pour simplifier, nous supposons que la boucle est à retour unitaire.

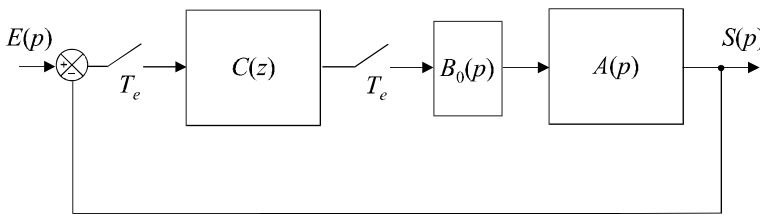


Figure 13.10 Asservissement continu corrigé numériquement.

**Remarque :** un bloqueur d'ordre 0 assure l'interface entre la sortie numérique du correcteur et l'entrée continue du système à asservir.

La technique consiste à étudier cet asservissement en temps continu (comme représenté sur la figure 13.11) puis à rechercher le modèle numérique équivalent au correcteur continu  $C(p)$  que nous aurons calculé pour conférer au système les performances d'un cahier des charges.

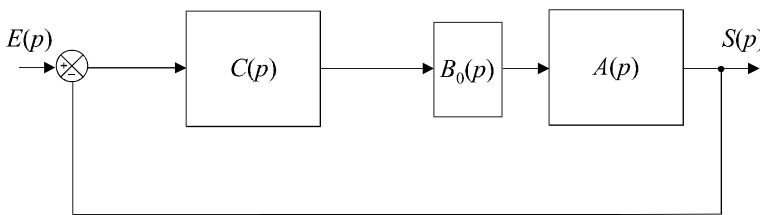


Figure 13.11 Modèle à temps continu de l'asservissement.

En théorie, il faut tenir compte de la présence du bloqueur dans l'étude en temps continu. Toutefois, une fréquence d'échantillonnage suffisamment grande peut nous permettre de le négliger. Dans ces conditions, on est ramené *stricto sensu* à l'étude du système en continu.

Le cahier des charges imposé au système nous amène au calcul classique de la fonction de transfert du correcteur et il suffit, ensuite, de rechercher un équivalent discret de cette fonction de transfert. Les équivalences qui peuvent être utilisées sont :

$$\text{– l'équivalence à la dérivation : } p \leftrightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

$$\text{– la transformation bilinéaire : } p \leftrightarrow \frac{2(1 - z^{-1})}{T_e(1 + z^{-1})}$$

$$\text{– l'équivalence modale : } p - p_i \leftrightarrow z - e^{p_i T_e}$$

**Remarque :** rappelons à propos de cette équivalence temporelle que les tables fournies en annexe proposent des équivalents qui sont spécifiquement adaptés pour conserver le gain statique du système.

$$\text{On donne : } G(p) = \frac{1}{p - p_i} \leftrightarrow G(z) = \left(-\frac{1}{p_i}\right) \frac{1 - e^{p_i T_e}}{z - e^{p_i T_e}}$$

$$\text{De sorte que : } G(0) = \frac{1}{0 - p_i} \leftrightarrow G(1) = -\left(\frac{1}{p_i}\right) \frac{1 - e^{p_i T_e}}{1 - e^{p_i T_e}}$$

On peut choisir de conserver la valeur du gain pour une autre fréquence que la fréquence nulle, notamment pour la fréquence autour de laquelle porte la correction du système.

### 13.3.2 Exemple

On souhaite asservir un système continu de fonction de transfert  $G(p)$  en utilisant un correcteur numérique et en imposant le cahier des charges suivant :

- marge de phase  $\Delta\varphi = 45^\circ$ ,
- temps de montée  $t_m = 0,2$  s.

$$\text{On donne : } G(p) = \frac{K}{\left(\frac{p}{10} + 1\right)^3} \text{ avec } K > 0 \text{ réglable}$$

a) Synthèse du correcteur en temps continu

La valeur de  $K$  qui assure le temps de montée voulu se calcule en utilisant la relation approchée :

$$\omega_{c0} \approx \frac{3}{t_m} \approx 15 \text{ rad/s}$$

$$\text{On a alors : } G(\omega_{c0}) = 1 \Rightarrow K = 5,86$$

Pour cette valeur de  $K$ , on obtient une marge de phase égale à :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi - 3 \arctan \frac{15}{10} = 11^\circ$$

Il est donc nécessaire d'introduire un correcteur à avance de phase caractérisé par une remontée de phase de  $34^\circ$  centrée sur la pulsation  $\omega_{c0}$ .

Soit :

$$C(p) = \frac{1 + aTp}{1 + Tp}$$

avec :

$$\varphi_{\max} = \arcsin \frac{a-1}{a+1} \Rightarrow a = 3,55$$

et :

$$\frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_{c0} \Rightarrow T = 0,035 \text{ s}$$

d'où :

$$C(p) = \frac{1 + 0,124p}{1 + 0,035p}$$

*b) Calcul du correcteur numérique équivalent*

Utilisons, pour simplifier, l'équivalence à la dérivation :

$$p \leftrightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

Soit :

$$C(z) = \frac{1 + 0,124 \left( \frac{1 - z^{-1}}{T_e} \right)}{1 + 0,035 \left( \frac{1 - z^{-1}}{T_e} \right)}$$

Choisissons la fréquence d'échantillonnage de sorte qu'elle soit comprise entre 6 fois et 25 fois la bande passante du système. Cette bande passante est telle que :

$$G(2\pi f_{pas}) = \frac{5,86}{\left( \sqrt{\frac{4\pi^2 f_{pas}^2}{100} + 1} \right)^3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f_{pas} = 2,8 \text{ Hz}$$

On choisit par exemple :

$$f_e = 100 \text{ Hz} \Leftrightarrow T_e = 0,01 \text{ s}$$

Finalement :

$$C(z) = \frac{1 + 12,4(1 - z^{-1})}{1 + 3,5(1 - z^{-1})} = \frac{13,4z - 12,4}{4,5z - 3,5}$$

*c) Validation des résultats*

Validons ces résultats, bien évidemment en recherchant le modèle à temps discret équivalent à l'ensemble de l'asservissement. Prenons l'équivalent le plus simple pour la fonction  $G(p)$ , autrement dit l'équivalent à la dérivation :

$$G(z) = \frac{5,86}{\left( \frac{1 - z^{-1}}{10T_e} + 1 \right)^3} = \frac{5,86}{(11 - 10z^{-1})^3}$$

La fonction de transfert en boucle fermée est :

$$H(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} = \frac{5,86(13,4z - 12,4)}{(11 - 10z^{-1})^3(4,5z - 3,5) + 5,86(13,4z - 12,4)}$$

soit : 
$$H(z) = \frac{5,86 (13,4 - 12,4z^{-1})}{(11 - 10z^{-1})^3 (4,5 - 3,5z^{-1}) + 5,86 (13,4 - 12,4z^{-1})}$$

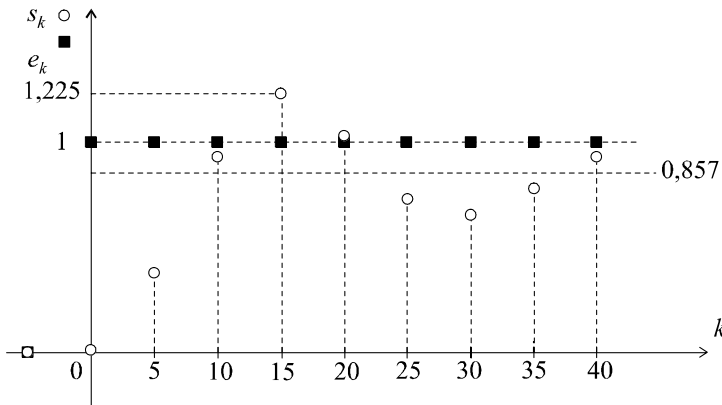
$$H(z) = \frac{78,5 - 72,5z^{-1}}{6\,068 - 21\,066z^{-1} + 27\,555z^{-2} - 16\,050z^{-3} + 3\,500z^{-4}}$$

d'où la fonction de récurrence correspondante :

$$s_k = 3,47s_{k-1} - 4,54s_{k-2} + 2,65s_{k-3} - 0,58s_{k-4} + 0,01294e_k - 0,01195e_{k-1}$$

**Tableau 13.6** SIMULATION DE LA SUITE D'ÉCHANTILLONS.

$k$	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$t$	0	0,05 s	0,10	0,15	0,2	0,25	0,30	0,35	0,40
$e_k$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$s_k$	0,013	0,389	0,978	1,225	1,044	0,761	0,672	0,785	0,920



**Figure 13.12** Représentation temporelle du comportement du système en boucle fermée après correction.

Le temps de montée peut être repéré vers le douzième échantillon, soit  $t_m \approx 0,12$  s. Par ailleurs, le dépassement, visiblement égal à 40 %, correspond à un coefficient d'amortissement en boucle fermé d'environ 0,3.

On a alors : 
$$\xi_{BF} = 0,3 \Rightarrow \Delta\varphi \approx 30^\circ$$

Les performances constatées sont voisines des performances attendues, même si le système est un peu plus rapide et un peu moins stable que prévu. Ces différences s'expliquent par les nombreuses approximations que nous avons effectuées. Compte tenu de l'ensemble de ces approximations, le résultat obtenu est relativement bon.

## 13.4 SYNTHÈSE D'UN CORRECTEUR NUMÉRIQUE PAR MÉTHODE POLYNOMIALE

### 13.4.1 Principe

Les méthodes polynomiales figurent parmi les méthodes de synthèse de correcteurs numériques les plus utilisées. Elles sont en effet très souples et relativement simples à mettre en œuvre.

Considérons un système échantillonné de fonction de transfert  $A(z)$  placé dans une boucle à retour unitaire en cascade avec un correcteur  $C(z)$  que l'on cherche à déterminer pour conférer au système complet, en boucle fermée, des performances dictées par un cahier des charges : précision, amortissement, rapidité, marge de stabilité.

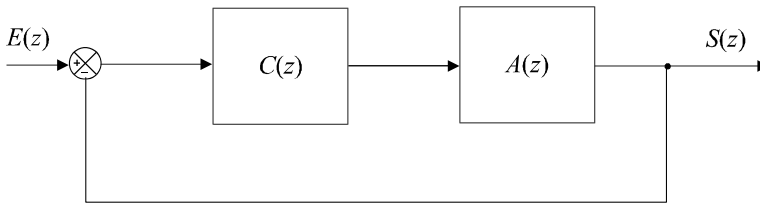


Figure 13.13 Boucle d'asservissement échantillonné avec correcteur.

D'une manière générale, l'objectif de l'action corrective consiste à rechercher  $C(z)$  pour que cette boucle d'asservissement de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(z)$  possède les caractéristiques attendues.

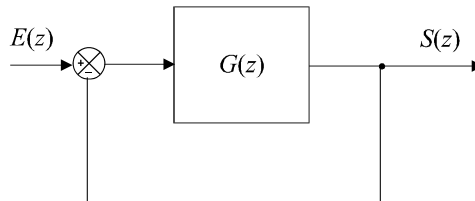


Figure 13.14 Boucle d'asservissement équivalente.

La technique de la synthèse par méthode polynomiale consiste à corriger le système de sorte que  $G(z)$  corresponde à un système du second ordre, de fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{K \left( 1 + e^{-2\xi\omega_n T_e} - 2 e^{-\xi\omega_n T_e} \cos \omega_n T_e \sqrt{1 - \xi^2} \right)}{z^2 - 2z e^{-\xi\omega_n T_e} \cos \omega_n T_e \sqrt{1 - \xi^2} + e^{-2\xi\omega_n T_e}}$$

(Voir chapitre 12, paragraphe 12.5.1.)

Dans ces conditions, la fonction de transfert en boucle fermée  $H(z)$  est aussi une fonction du second ordre :

$$H(z) = \frac{K_{BF} \left( 1 + e^{-2\xi_{BF}\omega_{nBF} T_e} - 2 e^{-\xi_{BF}\omega_{nBF} T_e} \cos \omega_{nBF} T_e \sqrt{1 - \xi_{BF}^2} \right)}{z^2 - 2z e^{-\xi_{BF}\omega_{nBF} T_e} \cos \omega_{nBF} T_e \sqrt{1 - \xi_{BF}^2} + e^{-2\xi_{BF}\omega_{nBF} T_e}}$$

(Voir chapitre 12, exercice 12.7.)

Nous savons que les performances en boucle fermée, pour un tel système, se traduisent par des conditions sur  $\omega_{nBF}$  pour la rapidité et sur  $\xi_{BF}$  pour la marge de stabilité et, bien évidemment, pour l'amortissement.

En effet :

$$t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}} \approx \frac{3}{\omega_{nBF}}$$

et :

$$\xi_{BF} \approx \frac{\Delta\varphi^\circ}{100}$$

En ce qui concerne la précision, il suffit que  $G(z)$  possède un pôle égal à 1 pour que l'erreur de position soit nulle.

Toutes ces considérations nous permettent donc de déterminer les fonctions  $H(z)$  et  $G(z)$  idéales, du second ordre, qui possèdent les performances requises. Pour que notre boucle d'asservissement initiale (figure 13.13) possède elle-même ces performances, il suffit d'avoir :

$$G(z) = C(z)A(z)$$

et donc, de placer dans la chaîne directe, le correcteur de fonction de transfert :

$$C(z) = \frac{G(z)}{A(z)}$$

### 13.4.2 Exemple

Considérons le système échantillonné à une période  $T_e = 0,2$  s de fonction de transfert :

$$A(z) = \frac{z + 0,3}{z - 0,8}$$

On souhaite placer ce système dans une boucle à retour unitaire et on veut que le système possède, en boucle fermée, les performances suivantes :  $\varepsilon_p = 0$ ,  $t_m = 0,8$  s et  $\xi_{BF} = 0,45$  (marge de phase d'un système continu équivalent égale à  $45^\circ$  et dépassement de l'ordre de 20 %).

Construisons la fonction  $G(z)$  *a priori* : elle possède obligatoirement un pôle égal à 1 pour garantir une erreur de position nulle.

On a donc :

$$G(z) = \frac{a}{(z - 1)(z - b)}$$

d'où :

$$H(z) = \frac{a}{(z - 1)(z - b) + a} = \frac{a}{z^2 - (1 + b)z + a + b}$$

Or nous devons, avoir, pour garantir les performances exigées :

$$H(z) = \frac{K_{BF} \left( 1 + e^{-2\xi_{BF}\omega_{nBF}T_e} - 2e^{-\xi_{BF}\omega_{nBF}T_e} \cos \omega_{nBF}T_e \sqrt{1 - \xi_{BF}^2} \right)}{z^2 - 2ze^{-\xi_{BF}\omega_{nBF}T_e} \cos \omega_{nBF}T_e \sqrt{1 - \xi_{BF}^2} + e^{-2\xi_{BF}\omega_{nBF}T_e}}$$

avec :

$$\xi_{BF} = 0,45 \quad \text{et} \quad \omega_{nBF} = \frac{3}{t_m} = 3,75 \text{ rad/s}$$

d'où :

$$H(z) = \frac{0,39K_{BF}}{z^2 - 1,12z + 0,51}$$

Identifions les deux fonctions de transfert en boucle fermée :

$$\begin{cases} 1 + b = 1,12 \\ a + b = 0,51 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0,12 \\ a = 0,39 \end{cases}$$

Le gain statique en boucle fermée est bien sûr égal à 1 puisque l'erreur de position est nulle.

On a alors :

$$G(z) = \frac{0,39}{(z-1)(z-0,12)}$$

d'où :

$$C(z) = \frac{G(z)}{A(z)} = \frac{0,39(z-0,8)}{(z-1)(z-0,12)(z+0,3)}$$

## EXERCICES

### 13.1 Correction de la précision d'un système échantillonné

On considère un système à temps discret de fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{z-0,2}{z-0,7}$$

Ce système étant placé dans une boucle à retour unitaire, calculer l'erreur de position en boucle fermée et calculer puis tracer la suite des premiers échantillons de sortie en considérant que le signal de consigne est un échelon unité.

On introduit ensuite un intégrateur dans la chaîne directe, soit  $C(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ .

Montrer que le système est toujours stable et calculer puis tracer la suite des premiers échantillons de sortie en considérant que le signal de consigne est un échelon unité. Conclure.

### 13.2 Synthèse par discrétisation du correcteur numérique d'un système à temps continu d'ordre 3

On considère un système de fonction de transfert  $G(p) = \frac{K}{p(p+4)^2}$  placé dans une boucle de régulation à retour unitaire. On souhaite avoir à la fois une marge de phase supérieure à  $60^\circ$  et un temps de montée plus petit que 1,5 s et on envisage, pour ce faire, de corriger numériquement les performances de ce système. Calculer la valeur de  $K$  qui assure, en boucle fermée, un temps de montée de 1,5 s. Calculer, pour cette valeur de  $K$  la valeur de la marge de phase. En déduire l'expression de la fonction de transfert du correcteur à temps discret qu'il faut introduire dans la chaîne directe pour satisfaire au cahier des charges.

### 13.3 Synthèse d'un correcteur par méthode polynomiale

On considère un système échantillonné (période  $T_e = 0,2$  s) de fonction de transfert :

$$A(z) = \frac{z+0,7}{z-0,7}$$

Ce système étant placé dans une boucle à retour unitaire, on souhaite qu'il soit caractérisé par les performances suivantes :  $\varepsilon_p = 0$ ,  $t_m = 0,4$  s et  $\xi_{BF} = 0,6$  (marge de phase d'un système continu équivalent égale à  $60^\circ$  et dépassement de l'ordre de 10 %).

Calculer l'expression de la fonction de transfert du correcteur à temps discret qu'il faut introduire dans la chaîne directe pour satisfaire au cahier des charges.

**13.4 Correction de précision et de stabilité par placement des pôles**

On considère un système à temps discret de fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{3z}{z - 0,4}$$

Ce système étant placé dans une boucle à retour unitaire, on introduit un correcteur de fonction de transfert :

$$C(z) = \frac{K}{1 - z^{-1}}$$

Calculer la valeur du pôle de la fonction de transfert en boucle fermée en l'absence de correcteur.

En présence du correcteur, dont la vocation est d'annuler l'erreur de position, calculer la valeur de  $K$  qui permettra de placer les nouveaux pôles de la fonction de transfert en boucle fermée, à des valeurs telles que leur module soit égal à celui du pôle calculé initialement en l'absence du correcteur.

**SOLUTIONS**

**13.1** L'erreur de position, par définition, est égale à :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1 + G(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1 + \frac{z - 0,2}{z - 0,7}} \right] = 0,27 = 27 \%$$

Cette erreur de position, bien évidemment, est inacceptable.

Calculons la fonction de transfert en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{z - 0,2}{2z - 0,9}$$

Cette fonction de transfert correspond à l'équation de récurrence :

$$s_k = 0,45s_{k-1} + 0,5e_k - 0,1e_{k-1}$$

Par ailleurs, ce système est stable en boucle fermée puisque l'unique pôle de la fonction de transfert en boucle fermée est inférieur à 1.

Soit : 
$$p_1 = \frac{0,9}{2} = 0,45 < 1$$

Calculons la suite d'échantillons de sortie (tableau 13.7) et représentons-la graphiquement (figure 13.15).

**Tableau 13.7** SIMULATION DE LA SUITE D'ÉCHANTILLONS.

$e_k$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$s_k$	0,500	0,625	0,681	0,707	0,718	0,723	0,725	0,726	0,727

Si on introduit un intégrateur dans la chaîne directe, on a :

$$G(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{z - 0,2}{z - 0,7} = \frac{z(z - 0,2)}{(z - 1)(z - 0,7)}$$

soit, en boucle fermée :

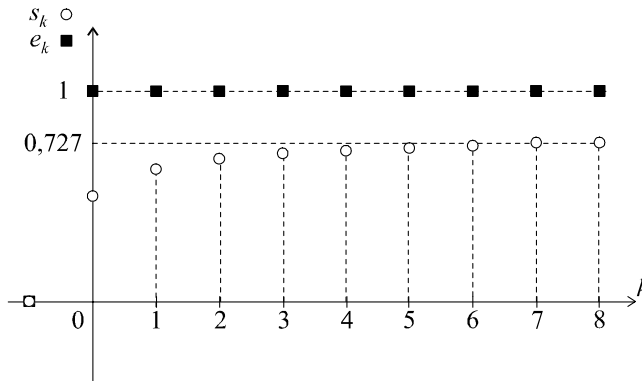
$$H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{z(z - 0,2)}{z(z - 0,2) + (z - 1)(z - 0,7)} = \frac{z(z - 0,2)}{2z^2 - 1,9z + 0,7}$$



ou encore : 
$$H(z) = \frac{1 - 0,2z^{-1}}{2 - 1,9z^{-1} + 0,7z^{-2}}$$

ce qui correspond à l'équation de récurrence :

$$s_k = 0,95s_{k-1} - 0,35s_{k-2} + 0,5e_k - 0,1e_{k-1}$$



**Figure 13.15** Représentation temporelle du comportement du système en boucle fermée.

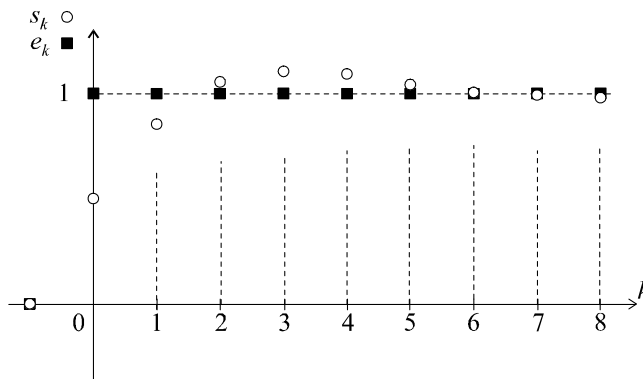
Les pôles de cette fonction de transfert (les racines de l'équation  $3z^2 - 1,5z + 0,5 = 0$ ) se calculent aisément et on peut vérifier sans peine que leurs modules sont inférieurs à 1. La condition de stabilité est donc toujours vérifiée.

Construisons un tableau avec les suites d'échantillons d'entrée (échelon unité) et de sortie (tableau 13.8) et représentons-les graphiquement (figure 13.16).

**Tableau 13.8** SIMULATION DE LA SUITE D'ÉCHANTILLONS.

$e_k$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$s_k$	0,500	0,875	1,056	1,097	1,073	1,034	1,007	0,995	0,992

On note la présence d'un faible dépassement (environ 10 %) ce qui témoigne d'une légère perte de marge de stabilité et une rapidité accrue puisque le temps de montée correspond à l'échantillon  $k = 2$ , soit  $t_m = 2T_e$ . La précision statique, bien évidemment, est désormais parfaite.



**Figure 13.16** Représentation temporelle du comportement du système en boucle fermée après correction.

► Visualisation avec Mathematica

On peut visualiser sans peine le comportement du système avant et après correction :

$$SZ = z(z - 0.2) / ((2z - 0.9)(z - 1))$$

$$SK = \text{InverseZTransform}[SZ, z, k]$$

$$\text{DiscretePlot}[SK, \{k, 1, 8\}]$$

puis :

$$SZCOR = z^2(z - 0.2) / ((2z^2 - 1.9z + 0.7)(z - 1))$$

$$SKCOR = \text{InverseZTransform}[SZCOR, z, k]$$

$$\text{DiscretePlot}[SKCOR, \{k, 1, 8\}]$$

**13.2** La valeur de  $K$  qui assure le temps de montée voulu se calcule en utilisant la relation approchée :

$$\omega_{c0} \approx \frac{3}{t_m} \approx 2 \text{ rad/s}$$

On a alors :

$$G(\omega_{c0}) = 1 \Rightarrow K = 40$$

Pour cette valeur de  $K$ , on obtient une marge de phase égale à :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi - \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{2}{4} = 37^\circ$$

Il est donc nécessaire d'introduire un correcteur à avance de phase caractérisé par une remontée de phase de  $23^\circ$  centrée sur la pulsation  $\omega_{c0}$ .

Soit :

$$C(p) = \frac{1 + aTp}{1 + Tp}$$

avec :

$$\varphi_{\max} = \arcsin \frac{a - 1}{a + 1} \Rightarrow a = 2,28$$

et :

$$\frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_{c0} \Rightarrow T = 0,33 \text{ s}$$

d'où :

$$C(p) = \frac{1 + 0,75p}{1 + 0,33p}$$

Discretisons ce correcteur et utilisons, pour cela, l'équivalent à la dérivation :

$$p \leftrightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

soit :

$$C(z) = \frac{1 + 0,75 \left( \frac{1 - z^{-1}}{T_e} \right)}{1 + 0,33 \left( \frac{1 - z^{-1}}{T_e} \right)}$$

Choisissons la fréquence d'échantillonnage de sorte qu'elle soit comprise entre 6 fois et 25 fois la bande passante du système. Cette bande passante est telle que :

$$G(2\pi f_{pas}) = \frac{40}{2\pi f_{pas} (4\pi^2 f_{pas}^2 + 16)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f_{pas} = 0,4 \text{ Hz}$$

On choisit par exemple :

$$f_e = 4 \text{ Hz} \Leftrightarrow T_e = 0,25 \text{ s}$$

Finalement :

$$C(z) = \frac{1 + 3(1 - z^{-1})}{1 + 1,32(1 - z^{-1})} = \frac{4 - 3z^{-1}}{2,32 - 1,32z^{-1}}$$

**13.3** Construisons la fonction de transfert en boucle ouverte globale  $G(z)$  *a priori* : elle possède obligatoirement un pôle égal à 1 pour garantir une erreur de position nulle.

On a donc :

$$G(z) = \frac{a}{(z - 1)(z - b)}$$

d'où :

$$H(z) = \frac{a}{(z - 1)(z - b) + a} = \frac{a}{z^2 - (1 + b)z + a + b}$$

Or nous devons avoir, pour garantir les performances exigées :

$$H(z) = \frac{K_{BF} \left( 1 + e^{-2\xi_{BF}\omega_{nBF}T_e} - 2 e^{-\xi_{BF}\omega_{nBF}T_e} \cos \omega_{nBF}T_e \sqrt{1 - \xi_{BF}^2} \right)}{z^2 - 2z e^{-\xi_{BF}\omega_{nBF}T_e} \cos \omega_{nBF}T_e \sqrt{1 - \xi_{BF}^2} + e^{-2\xi_{BF}\omega_{nBF}T_e}}$$

avec :

$$\xi_{BF} = 0,6 \text{ et } \omega_{nBF} = \frac{3}{t_m} = 7,5 \text{ rad/s}$$

d'où :

$$H(z) = \frac{0,88K_{BF}}{z^2 - 0,29z + 0,17}$$

Identifions les deux fonctions de transfert en boucle fermée :

$$\begin{cases} 1 + b = 0,29 \\ a + b = 0,17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -0,71 \\ a = 0,88 \end{cases}$$

Le gain statique en boucle fermée est bien sûr égal à 1 puisque l'erreur de position est nulle.

On a alors :

$$G(z) = \frac{0,88}{(z - 1)(z + 0,71)}$$

d'où :

$$C(z) = \frac{G(z)}{A(z)} = \frac{0,88(z - 0,7)}{(z - 1)(z + 0,71)(z + 0,7)}$$

**13.4** En l'absence de correcteur, la fonction de transfert en boucle fermée a pour expression :

$$H(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{3z}{4z - 0,4}$$

L'unique pôle de cette fonction de transfert vaut :  $p_1 = 0,1$ .

En présence du correcteur, la fonction de transfert en boucle ouverte a pour expression :

$$G(z) = \frac{K}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{3z}{z - 0,4} = \frac{3Kz^2}{(z - 1)(z - 0,4)}$$

soit, en boucle fermée :

$$H(z) = \frac{2Kz^2}{(1 + 3K)z^2 - 1,4z + 0,4}$$

Calculons les pôles de cette fonction de transfert en boucle fermée.

On a : 
$$\Delta = b^2 - 4ac = (1,4)^2 - 1,6(1 + 3K) = 0,36 - 4,8K$$

Le discriminant restant négatif tant que  $K > 0,075$ , nous pouvons partir du principe que les pôles resteront complexes conjugués :

$$p_{1/2} = \frac{1,4 \pm j\sqrt{4,8K - 0,36}}{2(1 + 3K)}$$

soit : 
$$|p_1| = |p_2| = \frac{\sqrt{(1,4)^2 + 4,8K - 0,36}}{2(1 + 3K)} = \frac{0,63}{\sqrt{1 + 3K}}$$

Il suffit de choisir une valeur de  $K$  qui correspond à la valeur souhaitée pour le module de chaque pôle, soit 0,1.

d'où : 
$$|p_1| = |p_2| = 0,1 \Rightarrow K = 12,9$$

CINQUIÈME PARTIE

# **Représentation d'état des systèmes**



## Chapitre 14

# Représentation d'état des systèmes à temps continu

### 14.1 DÉFINITIONS

Toutes les méthodes étudiées jusqu'à présent, que ce soit pour les systèmes linéaires ou non, en temps continu ou en temps discret restent valables et efficaces jusqu'à ce que ces systèmes atteignent une complexité telle que l'on ne puisse plus se satisfaire de l'unique relation entrée - sortie pour les commander correctement. De même, ces modèles deviennent difficiles à mettre en œuvre lorsque les systèmes étudiés possèdent plusieurs entrées et plusieurs sorties. Le représentation d'état des systèmes est un outil puissant permettant de modéliser le fonctionnement de systèmes linéaires ou non, en temps continu ou en temps discret et qui possède en outre, l'avantage de conserver la représentation temporelle des phénomènes.

#### 14.1.1 État d'un système et variables d'état

Considérons le système représenté sur la figure 14.1. Ce système est composé d'une cascade d'éléments différents (même si nous n'avons utilisé que des intégrateurs et des gains) et la commande automatique d'un tel système peut très bien aller beaucoup plus loin que la seule ambition de réguler le signal de sortie. Un certain nombre de signaux, que l'on peut qualifier d'internes au système apparaissent nettement sur le schéma. Nous les avons baptisé  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ . Quoi de plus naturel, en effet, que de vouloir commander ces différents signaux par l'intermédiaire du seul signal d'entrée  $e$ . Le problème de la commande du système ne se réduit donc plus au simple asservissement du signal de sortie mais peut donc être considéré comme la maîtrise simultanée de l'évolution des trois signaux  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ . On dit que l'ensemble de ces trois signaux forment l'état du système et la modélisation que nous allons associer à cette représentation va nous permettre d'envisager la commande de cet état grâce au signal d'entrée, autrement dit nous formulons l'ambition (si cela est possible, bien entendu) d'amener le système dans un état donné ( $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  devant converger vers des valeurs pré-établies) grâce au signal d'entrée du système. Les variables internes choisies sont appelées variables d'état du système.

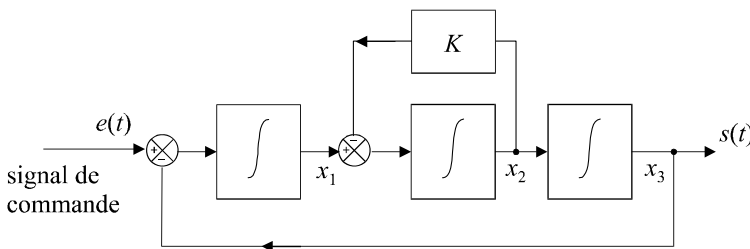


Figure 14.1 Exemple de représentation d'état d'un système.

L'état d'un système est en général représenté par un *vecteur d'état* que l'on note, en ce qui concerne notre exemple :

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \underline{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

**Remarque** : Ne pas oublier que, même si on se contente de la première écriture par souci d'allègement des expressions, les variables d'état, ici, sont toutes des fonctions continues du temps.

Dans le cas le plus général où  $n$  variables d'états sont identifiées dans le système, on aura :

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \underline{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_i(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

**Remarque** : Il est important de noter, par ailleurs, que la représentation d'état d'un système n'est pas unique et dépend, notamment, du choix des variables d'état que nous opérons.

### 14.1.2 Modélisation du fonctionnement du système

Lorsqu'un système est modélisé sous la forme d'une représentation d'état, on montre qu'il est possible d'exprimer l'état du système à un instant donné en fonction du signal d'entrée à ce même instant et en fonction de son « passé », autrement dit, de son état précédent. Comme nous avons affaire à des variables continues du temps, la notion d'état précédent n'existe pas vraiment. En revanche, ce concept est à rapprocher de l'évolution du système, autrement dit des variations de chaque variable d'état.

Cela signifie que, d'une manière générale, on peut exprimer l'évolution du système, modélisée par un vecteur constitué des dérivées premières des composantes du vecteur d'état, en fonction du vecteur d'état du système. L'objet qui lie ces deux vecteurs est appelé matrice de commande du système. Le vecteur d'état dépendant bien évidemment aussi du signal d'entrée, on a, pour notre exemple de la figure 14.1 la relation :

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = [\mathbf{A}] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (\mathbf{B}) e(t)$$

La matrice de commande  $[\mathbf{A}]$  est une matrice carrée, dans notre cas de dimension  $3 \times 3$  ;  $(\mathbf{B})$  est un vecteur colonne.

À partir du schéma de la figure 14.1, on peut facilement calculer la dérivée de chaque variable d'état et déterminer la matrice  $[\mathbf{A}]$  et le vecteur  $(\mathbf{B})$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = e - s = e - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - Kx_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -K & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e(t)$$



Pour être complet, il convient d'exprimer le signal de sortie en fonction du vecteur d'état, afin de conserver une certaine unité au formalisme d'ensemble.

$$\text{Comme } s = x_3, \text{ on écrit : } s(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{x}}$$

### 14.1.3 Cas général

Dans le cas général, le système peut avoir plusieurs entrées et plusieurs sorties. Soit  $n$  le nombre de variables d'état,  $m$  le nombre d'entrées et  $p$  le nombre de sorties.

Dans ces conditions, la matrice de commande est toujours une matrice  $n \times n$ , mais, cette fois,  $\mathbf{B}$  est une matrice  $n \times m$  et  $\mathbf{C}$  est une matrice  $p \times n$ . Pour être complet, il faut tenir compte d'une possible relation directe entre entrées et sorties. La matrice  $\mathbf{D}$ , de dimensions  $m \times p$  représente ce lien. Signalons pour finir que les coefficients des différentes matrices peuvent être variables dans le temps.

$$\text{On a alors : } \begin{cases} \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}(t)] \underline{\mathbf{x}}(t) + [\mathbf{B}(t)] \underline{\mathbf{e}}(t) \\ \underline{\mathbf{s}}(t) = [\mathbf{C}(t)] \underline{\mathbf{x}}(t) + [\mathbf{D}(t)] \underline{\mathbf{e}}(t) \end{cases}$$

La première équation s'appelle l'équation de commande. La seconde, équation d'observation. On adopte fréquemment la représentation schématique de la figure 14.2 pour illustrer cette modélisation. Attention, dans cette représentation, les signaux sont en réalité des vecteurs.

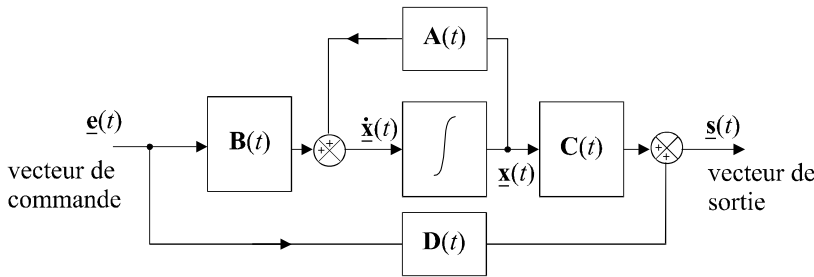


Figure 14.2 Représentation schématique d'une modélisation d'état.

Si ces coefficients sont constants, le système est dit invariant et on a :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}] \underline{\mathbf{x}}(t) + [\mathbf{B}] \underline{\mathbf{e}}(t) \\ \underline{\mathbf{s}}(t) = [\mathbf{C}] \underline{\mathbf{x}}(t) + [\mathbf{D}] \underline{\mathbf{e}}(t) \end{cases}$$

Dans le cas des systèmes mono-entrée, mono-sortie invariants, cas qui retiendra notre attention dans la suite de l'étude, on retrouve l'écriture mise en évidence dans le paragraphe précédent où la matrice de commande  $\mathbf{A}$  est toujours de dimension  $n \times n$ . Cette fois,  $\mathbf{B}$  est un vecteur colonne de dimension  $n$ ,  $\mathbf{C}$  est un vecteur ligne de dimension  $n$  et  $\mathbf{D}$  devient un scalaire  $d$  :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}] \underline{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{B}) e(t) \\ s(t) = (\mathbf{C}) \underline{\mathbf{x}}(t) + de(t) \end{cases}$$

**Remarque :** Il est rare que la sortie du système soit directement reliée à son entrée. On a donc très souvent  $d = 0$ .

## 14.2 RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'ÉTAT

Résoudre les équations d'état consiste à déterminer l'expression du vecteur d'état  $\underline{x}(t)$  en fonction du temps, autrement dit à déterminer les expressions temporelles des  $n$  variables d'état, connaissant le système (c'est-à-dire connaissant  $[\mathbf{A}]$ ,  $(\mathbf{B})$  et  $(\mathbf{C})$ ) et connaissant l'entrée  $e(t)$  qui lui est appliquée.

### 14.2.1 Étude préalable

Si on avait affaire à un système décrit par une simple équation différentielle et non par un système différentiel, l'équation d'état se résumerait à :

$$\dot{x} = ax + be(t)$$

La solution d'une telle équation différentielle est connue et a pour expression :

$$x(t) = e^{at} x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} be(\tau) d\tau$$

On reconnaît bien sûr dans cette expression la somme de la solution de l'équation correspondant au régime libre (ou autonome), soit  $e^{at} x(0)$  et de la solution correspondant au régime forcé (ou commandé).

### 14.2.2 Généralisation au système vectoriel

Considérons le système différentiel représentant les équations d'état :

$$\dot{\underline{x}}(t) = [\mathbf{A}] \underline{x}(t) + (\mathbf{B}) e(t)$$

On obtient, par généralisation du résultat précédent :

$$\underline{x}(t) = e^{[\mathbf{A}]t} \underline{x}(0) + \int_0^t e^{[\mathbf{A}](t-\tau)} (\mathbf{B}) e(\tau) d\tau$$

Dans cette écriture,  $e^{[\mathbf{A}]t}$  représente une matrice exponentielle que l'on note en général  $\Phi(t)$  et que l'on appelle matrice de transition du système.

Si on connaît l'état du système à un instant  $t_1$  différent de 0, on peut calculer son état à un instant  $t$  quelconque :

$$\underline{x}(t) = e^{[\mathbf{A}](t-t_1)} \underline{x}(t_1) + \int_{t_1}^t e^{[\mathbf{A}](t-\tau)} (\mathbf{B}) e(\tau) d\tau$$

### 14.2.3 Calcul de la matrice de transition

L'opération la plus délicate, dans la résolution des équations d'état, consiste à calculer la matrice de transition. De nombreuses méthodes existent. Nous nous contenterons de présenter ici les plus classiques.

#### a) Utilisation de la transformation de Laplace

Appliquons la transformation de Laplace au système d'équations différentielles de la représentation d'état :

$$\dot{\underline{x}}(t) = [\mathbf{A}] \underline{x}(t) + (\mathbf{B}) e(t) \quad \Rightarrow \quad p\underline{\mathbf{X}}(p) - \underline{x}(0) = [\mathbf{A}] \underline{\mathbf{X}}(p) + (\mathbf{B}) E(p)$$

soit :

$$(p\mathbf{I} - [\mathbf{A}]) \underline{\mathbf{X}}(p) = \underline{x}(0) + (\mathbf{B}) E(p)$$

où  $[\mathbf{I}]$  représente la matrice carrée identité de dimension  $n$ ,

d'où :

$$\underline{\mathbf{X}}(p) = (p\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1} \underline{x}(0) + (p\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1} (\mathbf{B}) E(p)$$

**Remarque** : Il est conseillé d'être particulièrement vigilant à l'ordre des produits des matrices et des vecteurs, la multiplication matricielle n'étant pas commutative.

Il apparaît clairement, en confrontant cette expression à la solution générale déterminée dans le paragraphe précédent, soit :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = e^{[\mathbf{A}]t} \underline{\mathbf{x}}(0) + \int_0^t e^{[\mathbf{A}](t-\tau)} (\mathbf{B}) e(\tau) d\tau$$

que la matrice de transition  $e^{[\mathbf{A}]t}$  possède pour transformée de Laplace la matrice  $(p\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1}$ .

Transformons l'expression de  $(p\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1}$  :

$$(p\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1} = \frac{1}{p} \left( \mathbf{I} - \frac{[\mathbf{A}]}{p} \right)^{-1} = \left( \frac{\mathbf{I}}{p} + \frac{[\mathbf{A}]}{p^2} + \frac{[\mathbf{A}]^2}{p^3} + \dots + \frac{[\mathbf{A}]^n}{p^{n+1}} + \dots \right)$$

En appliquant la transformation de Laplace inverse, on obtient :

$$e^{[\mathbf{A}]t} = \left( \mathbf{I} + [\mathbf{A}]t + \frac{[\mathbf{A}]^2}{2!} t^2 + \dots + \frac{[\mathbf{A}]^n}{n!} t^n + \dots \right)$$

Cette expression ne surprendra personne puisqu'on y retrouve l'expression du développement de Taylor.

### b) Application au calcul direct de la matrice de transition

On peut utiliser directement l'expression du développement de Taylor à condition que la matrice de commande soit nilpotente.

**Remarque** : Une matrice carrée est dite nilpotente si il existe un entier  $k$  positif tel que  $[\mathbf{A}]^n = [\mathbf{0}]$  pour tout  $n > k$ . Bien évidemment, plus  $k$  est petit, plus le calcul direct est simple et rapide.

Considérons par exemple la matrice de commande :  $[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

On a :

$$[\mathbf{A}]^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent :

$$[\mathbf{A}]^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \forall n \geq 2$$

On a donc :

$$e^{[\mathbf{A}]t} = \left( \mathbf{I} + [\mathbf{A}]t + \frac{[\mathbf{A}]^2}{2!} t^2 + \dots + \frac{[\mathbf{A}]^n}{n!} t^n + \dots \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### c) Méthode de diagonalisation de la matrice de transition

Il est facile de remarquer que le calcul de la matrice de transition est très simple à effectuer si celle-ci est diagonale.

$$\text{En effet : } [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow e^{[\mathbf{A}]t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Cette constatation nous conduit naturellement à imaginer une méthode relativement facile pour calculer  $e^{[\mathbf{A}]t}$  : il suffit de diagonaliser la matrice  $[\mathbf{A}]$ . Considérons une matrice de commande quelconque :

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Les vecteurs propres et les valeurs propres de cette matrice sont définis par :

$$[\mathbf{A}] (\mathbf{y}_i) = \lambda_i (\mathbf{y}_i)$$

Les vecteurs non nuls  $(\mathbf{y}_i)$  sont les vecteurs propres de  $[\mathbf{A}]$  ; les  $\lambda_i$  sont ses valeurs propres. Ces grandeurs sont très faciles à déterminer, étant donné que les  $\lambda_i$  sont les racines de l'équation caractéristique de la matrice  $[\mathbf{A}]$  définie par :

$$\det(\lambda \mathbf{I} - [\mathbf{A}]) = 0$$

Si on appelle  $[\mathbf{\Delta}]$  la matrice diagonale formée des valeurs propres de la matrice  $[\mathbf{A}]$  et  $[\mathbf{T}]$  la matrice modale formée de ses vecteurs propres, on a :

$$[\mathbf{\Delta}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ et } [\mathbf{T}] = \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \mathbf{y}_n \end{pmatrix} \right]$$

Dans ces conditions :  $[\mathbf{A}] = [\mathbf{T}] [\mathbf{\Delta}] [\mathbf{T}]^{-1}$

Il est alors facile de vérifier que :

$$[\mathbf{A}]^n = ([\mathbf{T}] [\mathbf{\Delta}] [\mathbf{T}]^{-1}) \times ([\mathbf{T}] [\mathbf{\Delta}] [\mathbf{T}]^{-1}) \times \cdots \times ([\mathbf{T}] [\mathbf{\Delta}] [\mathbf{T}]^{-1}) = [\mathbf{T}] [\mathbf{\Delta}]^n [\mathbf{T}]^{-1}$$

Comme : 
$$e^{[\mathbf{A}]t} = I + [\mathbf{A}]t + \frac{[\mathbf{A}]^2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{[\mathbf{A}]^n}{n!}t^n + \cdots$$

on a : 
$$e^{[\mathbf{A}]t} = [\mathbf{T}] \left( I + [\mathbf{\Delta}]t + \frac{[\mathbf{\Delta}]^2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{[\mathbf{\Delta}]^n}{n!}t^n + \cdots \right) [\mathbf{T}]^{-1} = [\mathbf{T}] e^{[\mathbf{\Delta}]t} [\mathbf{T}]^{-1}$$

Par conséquent :

$$e^{[\mathbf{A}]t} = [\mathbf{T}] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} [\mathbf{T}]^{-1}$$

Les fonctions  $e^{\lambda_1 t}$ ,  $e^{\lambda_2 t}$ , ...,  $e^{\lambda_n t}$  qui constituent la base de fonctions élémentaires du vecteur d'état, donc des signaux internes du système, sont appelées les modes du système.

#### d) Méthode de Cayley-Hamilton

Cette méthode, qui repose sur la propriété d'une matrice d'être toujours solution de son équation caractéristique, présente l'avantage d'être relativement rapide pour des matrices d'ordres peu élevés et de mettre en œuvre des calculs moins complexes, donc moins générateurs d'erreurs de calcul.

Considérons une matrice  $[\mathbf{A}]$  et son équation caractéristique :

$$\det(\lambda \mathbf{I} - [\mathbf{A}]) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

On a toujours :

$$[\mathbf{A}]^n + a_{n-1} [\mathbf{A}]^{n-1} + \dots + a_1 [\mathbf{A}] + a_0 \mathbf{I} = 0$$

Cette équation permet d'affirmer que pour toute matrice carrée d'ordre  $n$  possédant  $n$  valeurs propres distinctes, toute puissance de  $[\mathbf{A}]$  supérieure ou égale à  $n$  peut s'exprimer en fonction d'une combinaison des puissances de  $[\mathbf{A}]$  strictement inférieures à  $n$ .

On peut donc écrire :

$$e^{[\mathbf{A}]t} = f_{n-1}(t) [\mathbf{A}]^{n-1} + f_{n-2}(t) [\mathbf{A}]^{n-2} + \dots + f_1(t) [\mathbf{A}] + f_0(t) \mathbf{I}$$

La recherche des fonctions  $f_i(t)$  ne pose aucune difficulté : les valeurs propres de la matrice  $[\mathbf{A}]$  vérifiant obligatoirement cette équation, on construit un système de  $n$  équations où les  $n$  fonctions  $f_i(t)$  sont les inconnues et la résolution de ce système permet de déterminer  $e^{[\mathbf{A}]t}$ .

Soit :

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = f_{n-1}(t) \lambda_1^{n-1} + \dots + f_1(t) \lambda_1 + f_0(t) \\ e^{\lambda_2 t} = f_{n-1}(t) \lambda_2^{n-1} + \dots + f_1(t) \lambda_2 + f_0(t) \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} = f_{n-1}(t) \lambda_n^{n-1} + \dots + f_1(t) \lambda_n + f_0(t) \end{cases}$$

#### e) Utilisation de Mathematica

L'utilisation d'un logiciel de calcul formel comme Mathematica peut donner accès rapidement à l'expression de la matrice de transition. En effet, il permet d'obtenir instantanément les vecteurs propres, donc la matrice modale et supporte la plupart des opérations matricielles.

Avec Mathematica, une matrice  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  doit être définie selon la syntaxe suivante :

$$\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$$

Les principales commandes que nous utiliserons sont les suivantes :

$$\text{Eigenvalues} [\{\{a, b\}, \{c, d\}\}] : \text{calcul des valeurs propres}$$

Eigenvectors  $[\{\{a, b\}, \{c, d\}\}]$  : calcul des vecteurs propres

Inverse  $[\{\{a, b\}, \{c, d\}\}]$  : inversion d'une matrice

$\{\{a, b\}, \{c, d\}\} \cdot \{\{a', b'\}, \{c', d'\}\}$  : multiplication matricielle

Dans l'exemple qui est développé dans le paragraphe suivant, le lecteur pourra apprécier le gain de temps que procure l'utilisation de Mathematica ou de tout autre logiciel de même nature. Par ailleurs, les risques d'erreurs de calcul sont évidemment grandement réduits.

f) Exemple

Considérons la matrice de commande  $[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ .

Calculons la matrice de transition en utilisant, dans un premier temps, la méthode de diagonalisation. Les valeurs propres de cette matrices sont solutions de son équation caractéristique :

$$\det(\lambda \mathbf{I} - [\mathbf{A}]) = 0 \Rightarrow \det \left( \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 2 \\ 1 & \lambda + 3 \end{bmatrix} = 0$$

soit :  $(\lambda + 2)(\lambda + 3) - 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$

d'où :  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = -4$

Calculons le premier vecteur propre :

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -x \\ -x - 3y = -y \end{cases} \Rightarrow x = -2y$$

**Remarque** : Ne soyons pas surpris de ce résultat : il existe une infinité de vecteurs propres, tous colinéaires, associés à une valeur propre.

Prenons par exemple :  $\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Le second vecteur propre se calcule tout aussi facilement :

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -4x \\ -x - 3y = -4y \end{cases} \Rightarrow x = y$$

Prenons par exemple :  $\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a donc :  $[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

et :

$$[\mathbf{T}]^{-1} = \frac{1}{\det[\mathbf{T}]} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Par ailleurs :

$$[\mathbf{\Delta}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Calculons à présent la matrice de transition :

On a :

$$e^{[\mathbf{A}]t} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

soit :

$$e^{[\mathbf{A}]t} = \begin{bmatrix} -2e^{-t} & e^{-4t} \\ e^{-t} & e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

d'où :

$$e^{[\mathbf{A}]t} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \\ -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

Vérifions à présent ce résultat au moyen de la méthode de Cayley-Hamilton. Nous pouvons écrire, *a priori*, que :

$$e^{[\mathbf{A}]t} = f_1(t)[\mathbf{A}] + f_0(t)\mathbf{I} = f_1(t) \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} + f_0(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = e^{-t} = -f_1(t) + f_0(t) \\ e^{\lambda_2 t} = e^{-4t} = -4f_1(t) + f_0(t) \end{cases}$$

d'où :

$$e^{-t} - e^{-4t} = 3f_1(t) \Rightarrow f_1(t) = \frac{e^{-t}}{3} - \frac{e^{-4t}}{3}$$

et :

$$f_0(t) = f_1(t) + e^{-t} = \frac{4e^{-t}}{3} - \frac{e^{-4t}}{3}$$

On a donc :

$$e^{[\mathbf{A}]t} = \left( \frac{e^{-t}}{3} - \frac{e^{-4t}}{3} \right) \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} + \left( \frac{4e^{-t}}{3} - \frac{e^{-4t}}{3} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d'où :

$$e^{[\mathbf{A}]t} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \\ -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

► Résolution à l'aide de Mathematica

La commande Eigenvalues $\left[\left\{\left\{-2, -2\right\}, \left\{-1, -3\right\}\right\}\right]$  fournit immédiatement les valeurs propres de la matrice  $[\mathbf{A}]$ , soit  $\left\{-1, -4\right\}$ . La matrice  $[\mathbf{\Delta}]$  est donc connue.

La commande Eigenvectors $\left[\left\{\left\{-2, -2\right\}, \left\{-1, -3\right\}\right\}\right]$  fournit les deux vecteurs propres sous la forme  $\left\{\left\{-2, 1\right\}, \left\{1, 1\right\}\right\}$ . D'où :  $[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

La commande Inverse $\left[\left\{\left\{-2, 1\right\}, \left\{1, 1\right\}\right\}\right]$  donne l'expression de la matrice  $[\mathbf{T}]^{-1}$ , soit :

$$\left[\left\{\left\{-1/3, 1/3\right\}, \left\{1/3, 2/3\right\}\right\}\right].$$

Il reste enfin à effectuer le produit des trois matrices pour obtenir la matrice de transition :

$$\left\{\left\{-2, 1\right\}, \left\{1, 1\right\}\right\} \cdot \left\{\left\{e^{-t}, 0\right\}, \left\{0, e^{-4t}\right\}\right\} \cdot \left\{\left\{-1/3, 1/3\right\}, \left\{1/3, 2/3\right\}\right\}$$

#### 14.2.4 Calcul de l'état d'un système en fonction d'un signal de commande

Nous avons déjà montré que :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = e^{[\mathbf{A}]t} \underline{\mathbf{x}}(0) + \int_0^t e^{[\mathbf{A}](t-\tau)} (\mathbf{B}) e(\tau) d\tau$$

La connaissance de la matrice de transition permet de calculer directement le vecteur d'état du système à partir de cette expression. Il y a bien évidemment autant de calculs à effectuer qu'il y a de variables d'état.

Considérons par exemple le système régi par les équations d'état suivantes :

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}] \underline{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{B}) e(t)$$

avec :

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \text{ et } (\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Supposons que ce système soit sollicité par un échelon unitaire,  $e(t) = 1$ , et que son état initial est défini par :

$$\underline{\mathbf{x}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de transition a été calculée au paragraphe précédent :

$$e^{[\mathbf{A}]t} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \\ -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \end{bmatrix}$$



On a donc :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = e^{[A]t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} e^{-(t-\tau)} + \frac{1}{3} e^{-4(t-\tau)} & -\frac{2}{3} e^{-(t-\tau)} + \frac{2}{3} e^{-4(t-\tau)} \\ -\frac{1}{3} e^{-(t-\tau)} + \frac{1}{3} e^{-4(t-\tau)} & \frac{1}{3} e^{-(t-\tau)} + \frac{2}{3} e^{-4(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} d\tau$$

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \left[ \frac{2}{3} e^{-(t-\tau)} + \frac{1}{3} e^{-4(t-\tau)} + \frac{4}{3} e^{-(t-\tau)} - \frac{4}{3} e^{-4(t-\tau)} \right] d\tau \\ \int_0^t \left[ -\frac{1}{3} e^{-(t-\tau)} + \frac{1}{3} e^{-4(t-\tau)} - \frac{2}{3} e^{-(t-\tau)} - \frac{4}{3} e^{-4(t-\tau)} \right] d\tau \end{pmatrix}$$

soit :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t [2e^{-(t-\tau)} - e^{-4(t-\tau)}] d\tau \\ \int_0^t [-e^{-(t-\tau)} - e^{-4(t-\tau)}] d\tau \end{pmatrix}$$

Chacune des deux intégrales à calculer peut être évaluée par Mathematica. On écrit respectivement :

$$\text{Integrate} [2e^{-(t-tau)} - e^{-4(t-tau)}, \{tau, 0, t\}] \text{ et } \text{Integrate} [-e^{-(t-tau)} - e^{-4(t-tau)}, \{tau, 0, t\}]$$

Ce qui donne immédiatement le résultat :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} (7 + e^{-4t} - 8e^{-t}) \\ -\frac{5}{4} + \frac{e^{-4t}}{4} + e^{-t} \end{pmatrix}$$

## 14.3 COMMANDABILITÉ D'UN SYSTÈME

La problématique générale de l'automatique consiste à commander un système de manière à ce qu'il évolue, depuis un état initial constaté, vers un état final déterminé. En représentation d'état, il s'agira de déterminer le signal de commande  $e(t)$  entre deux instants donnés,  $t_1$  et  $t_2$ , pour amener le système de l'état  $\underline{\mathbf{x}}(t_1)$  vers un état  $\underline{\mathbf{x}}(t_2)$  souhaité.

### 14.3.1 Définitions

#### a) Commandabilité vers 0

Un système est dit commandable à l'instant  $t_1$  s'il est possible de déterminer un signal d'entrée  $e(t)$  sur l'intervalle  $[t_1, t_2]$  de manière à amener le système de l'état  $\underline{\mathbf{x}}(t_1) = \underline{\mathbf{x}}_1$  vers l'état  $\underline{\mathbf{x}}(t_2) = \mathbf{0}$ .

Si un système est commandable quel que soit  $t_1$ , il est dit complètement commandable.

#### b) Accessibilité

Un système est dit accessible à l'état  $\underline{\mathbf{x}}_2$  s'il est possible de déterminer un signal d'entrée  $e(t)$  sur l'intervalle  $[t_1, t_2]$  de manière à amener le système d'un état  $\underline{\mathbf{x}}(t_1) = \underline{\mathbf{x}}_1$  vers l'état  $\underline{\mathbf{x}}(t_2) = \underline{\mathbf{x}}_2$ .

Si un système est accessible quel que soit  $\underline{\mathbf{x}}_2$ , il est dit complètement accessible.

**Remarque** : La notion d'accessibilité correspond beaucoup mieux à l'idée que nous nous faisons de la commande d'un système et les deux définitions sont souvent confondues. On parle également parfois de gouvernabilité.

Si la matrice de transition  $e^{[A]t}$  est régulière (autrement dit si son déterminant est non nul), les notions d'accessibilité et de commandabilité sont équivalentes. On peut alors définir la commandabilité complète comme suit :

Un système est complètement commandable s'il est possible, quel que soit l'intervalle  $[t_1, t_2]$  et quelque soit l'état  $\underline{x}_2$ , de déterminer un signal de commande  $e(t)$  sur  $[t_1, t_2]$  qui amène le système de n'importe quel état  $\underline{x}(t_1) = \underline{x}_1$  vers l'état voulu  $\underline{x}(t_2) = \underline{x}_2$ .

**Remarque** : La notion de commandabilité ne porte que sur l'état du système et non sur sa sortie. Par conséquent, seule l'équation vectorielle  $\dot{\underline{x}}(t) = [A]\underline{x}(t) + [B]e(t)$  est à considérer pour caractériser la commandabilité d'un système. Pour cette raison, on dit parfois que c'est la paire  $[A], [B]$  qui est commandable.

### 14.3.2 Critère de Kalman

Il existe de nombreux critères de commandabilité ou de non-commandabilité. Le critère de Kalman est l'un des plus couramment utilisés.

Un système est complètement accessible et complètement commandable si et seulement si les vecteurs  $[B], [A][B], [A]^2[B], \dots, [A]^{n-1}[B]$  sont linéairement indépendants.

Cet énoncé peut se traduire également de la manière suivante : on définit la matrice de commandabilité par la matrice formée des  $n$  vecteurs colonnes  $[B], [A][B], [A]^2[B], \dots, [A]^{n-1}[B]$  :

$$[C]_{([A][B])} = \begin{bmatrix} [B] & [A][B] & [A]^2[B] & \dots & [A]^{n-1}[B] \end{bmatrix}$$

La paire  $[A], [B]$  est complètement commandable si et seulement si la matrice de commandabilité est régulière, autrement dit si son déterminant n'est pas nul.

### 14.3.3 Exemple

Reprenons l'exemple du système régi par les équations d'état suivantes :

$$\dot{\underline{x}}(t) = [A]\underline{x}(t) + [B]e(t)$$

avec :

$$[A] = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \text{ et } [B] = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La matrice de commandabilité est formée de deux vecteurs :

$$[C]_{([A][B])} = \begin{bmatrix} [B] & [A][B] \end{bmatrix}$$

Or :

$$[A][B] = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$[\mathbf{C}]_{(\mathbf{I}|\mathbf{A})|\mathbf{(B)}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est bien de rang 2, étant donné que son déterminant n'est pas nul :

$$\det [\mathbf{C}]_{(\mathbf{I}|\mathbf{A})|\mathbf{(B)}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 9$$

Le système est donc complètement commandable.

### 14.3.4 Calcul de la commande d'un système

#### a) Principe de la construction de Kalman

L'objectif consiste ici à calculer le signal de commande (ou d'entrée) du système, avec pour objectif de l'amener de l'état initial  $\underline{\mathbf{x}}(0)$  à l'instant  $t = 0$  à un état déterminé  $\underline{\mathbf{x}}(t)$  à un instant  $t$  quelconque. Si le système est complètement commandable (ou accessible), le calcul de cette commande est possible :

On a :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = e^{[\mathbf{A}]t} \underline{\mathbf{x}}(0) + \int_0^t e^{[\mathbf{A}](t-\tau)} (\mathbf{B}) e(\tau) d\tau$$

ou encore :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) - e^{[\mathbf{A}]t} \underline{\mathbf{x}}(0) = \int_0^t e^{[\mathbf{A}](t-\tau)} (\mathbf{B}) e(\tau) d\tau$$

Il s'agit donc de calculer l'expression de  $e(\tau)$  sur l'intervalle  $[0, t]$  pour atteindre cet objectif.

Kalman a montré que le signal de commande  $e(\tau)$  pouvait être construit à partir de l'expression suivante :

$$e(\tau) = (\mathbf{B})^T e^{[\mathbf{A}]^T(t-\tau)} [\mathbf{W}]^{-1} [\underline{\mathbf{x}}(t) - e^{[\mathbf{A}]t} \underline{\mathbf{x}}(0)]$$

La matrice  $[\mathbf{W}]$  étant définie par :

$$[\mathbf{W}] = \int_0^t e^{[\mathbf{A}]\tau} (\mathbf{B}) (\mathbf{B})^T e^{[\mathbf{A}]^T\tau} d\tau$$

#### b) Validation de la construction

Pour vérifier ce résultat, remplaçons  $e(\tau)$  par cette expression dans l'intégrale :

$$I = \int_0^t e^{[\mathbf{A}](t-\tau)} (\mathbf{B}) e(\tau) d\tau$$

On obtient :

$$I = \int_0^t e^{[\mathbf{A}](t-\tau)} (\mathbf{B}) \left\{ (\mathbf{B})^T e^{[\mathbf{A}]^T(t-\tau)} [\mathbf{W}]^{-1} [\underline{\mathbf{x}}(t) - e^{[\mathbf{A}]t} \underline{\mathbf{x}}(0)] \right\} d\tau$$

soit :

$$I = [\underline{\mathbf{x}}(t) - e^{[\mathbf{A}]t} \underline{\mathbf{x}}(0)] \int_0^t \left\{ e^{[\mathbf{A}](t-\tau)} (\mathbf{B}) (\mathbf{B})^T e^{[\mathbf{A}]^T(t-\tau)} \right\} [\mathbf{W}]^{-1} d\tau$$

Arrêtons-nous un moment sur l'expression :

$$\int_0^t e^{[\mathbf{A}](t-\tau)} (\mathbf{B}) (\mathbf{B})^T e^{[\mathbf{A}]^T(t-\tau)} d\tau$$

Effectuons le changement de variable :  $t - \tau \rightarrow \tau$ .

On obtient :

$$\int_t^0 e^{[A]\tau} (\mathbf{B}) (\mathbf{B})^T e^{[A]^T \tau} (-d\tau) = \int_0^t e^{[A]\tau} (\mathbf{B}) (\mathbf{B})^T e^{[A]^T \tau} d\tau$$

d'où :

$$I = [\underline{\mathbf{x}}(t) - e^{[A]t} \underline{\mathbf{x}}(0)] [\mathbf{W}] [\mathbf{W}]^{-1} = \underline{\mathbf{x}}(t) - e^{[A]t} \underline{\mathbf{x}}(0)$$

On a donc bien vérifié la solution de l'équation d'état :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) - e^{[A]t} \underline{\mathbf{x}}(0) = \int_0^t e^{[A](t-\tau)} (\mathbf{B}) e(\tau) d\tau$$

c) Exemple

On souhaite amener le système défini par :

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}] \underline{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{B}) e(t)$$

avec :

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } (\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

d'un état initial :

$$\underline{\mathbf{x}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

à l'état final :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ en } t = 0,5 \text{ s}$$

Comme  $[\mathbf{A}]$  est une matrice diagonale, sa transposée lui est égale.

On a donc :

$$e^{[A]\tau} = e^{[A]^T \tau} = \begin{bmatrix} e^{-2\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix}$$

d'où :

$$[\mathbf{W}] = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} (1 \quad -2) \begin{bmatrix} e^{-2\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} d\tau$$

Soit, tous calculs faits, par exemple avec Mathematica :

$$[\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} (e^{-4t} - 1) & \frac{2}{3} (e^{-3t} - 1) \\ \frac{2}{3} (e^{-3t} - 1) & -2 (e^{-2t} - 1) \end{bmatrix}$$

Par conséquent :

$$[\mathbf{W}]^{-1} = \frac{1}{\det[\mathbf{W}]} \begin{bmatrix} -2 (e^{-2t} - 1) & -\frac{2}{3} (e^{-3t} - 1) \\ -\frac{2}{3} (e^{-3t} - 1) & -\frac{1}{4} (e^{-4t} - 1) \end{bmatrix}$$

Pour  $t = 0,5$  s, on a :

$$\det[\mathbf{W}] = \begin{vmatrix} 0,216 & -0,518 \\ -0,518 & 1,264 \end{vmatrix} = 0,0047$$

et :

$$[\mathbf{W}]^{-1} = \begin{bmatrix} 269 & 110 \\ 110 & 46 \end{bmatrix}$$

On a donc :

$$e(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2(0,5-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-(0,5-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 269 & 110 \\ 110 & 46 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 208e^{-2(0,5-\tau)} - 164e^{-(0,5-\tau)}$$

On peut sans peine vérifier que ce signal de commande amène bien le système dans l'état désiré au bout d'un temps  $t = 0,5$  s :

$$\underline{\mathbf{x}}(0,5) = \int_0^{0,5} \begin{bmatrix} e^{-2(0,5-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-(0,5-\tau)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e(\tau) d\tau \approx \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

### 14.3.5 Cas des systèmes non commandables

Si la matrice de commandabilité est de rang  $r < n$ , le système n'est pas complètement commandable. On montre que dans ce cas, il est possible de trouver une matrice de changement de base  $[\mathbf{T}]$  telle que :

$$[\tilde{\mathbf{A}}] = [\mathbf{T}][\mathbf{A}][\mathbf{T}]^{-1} \text{ et } (\tilde{\mathbf{B}}) = [\mathbf{T}]^{-1}(\mathbf{B})$$

avec :

$$[\tilde{\mathbf{A}}] = \begin{bmatrix} \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{11}} & \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{12}} \\ \boxed{0} & \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{22}} \end{bmatrix} \text{ et } (\tilde{\mathbf{B}}) = \begin{pmatrix} \boxed{\tilde{\mathbf{B}}_1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\begin{cases} \tilde{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\tilde{\mathbf{A}}] \tilde{\underline{\mathbf{x}}}(t) + (\tilde{\mathbf{B}}) e(t) \\ s(t) = (\tilde{\mathbf{C}}) \tilde{\underline{\mathbf{x}}}(t) \end{cases}$$

**Remarque :** Le vecteur d'état subit bien évidemment le même changement de base :  $\tilde{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{T}]\underline{\mathbf{x}}(t)$ .

Dans cette matrice  $[\tilde{\mathbf{A}}]$ , apparaît une sous-matrice  $r \times r$   $[\tilde{\mathbf{A}}_{11}]$  de rang  $r$  qui correspond à un sous-système qui lui, est complètement commandable. Dans le vecteur  $(\tilde{\mathbf{B}})$  apparaît un sous-vecteur possédant  $r$  composantes. On dit que le sous système défini par la paire  $[\tilde{\mathbf{A}}_{11}]$ ,  $(\tilde{\mathbf{B}}_1)$  est un sous-système complètement commandable du système défini par la paire  $[\mathbf{A}]$ ,  $(\mathbf{B})$ . Les  $r$  valeurs propres de la matrice  $[\tilde{\mathbf{A}}_{11}]$  qui sont également valeurs propres de la matrice  $[\mathbf{A}]$  correspondent aux modes commandables du système. Les autres valeurs propres correspondent aux modes non commandables.

## 14.4 OBSERVABILITÉ DE L'ÉTAT D'UN SYSTÈME

Dans la seconde partie de cet ouvrage, nous avons vu combien il était important, notamment pour la commande des systèmes en boucle fermée, d'être capable de mesurer un signal de sortie. En représentation d'état, il nous importe d'être capable de connaître à chaque instant, l'état du système, autrement dit de pouvoir déterminer le vecteur d'état  $\underline{\mathbf{x}}(t)$ . Certaines variables d'état sont très faciles à mesurer. Un capteur placé au bon endroit, à l'intérieur du système, peut nous donner accès à l'information recherchée. Dans ce cas, on dit que la variable d'état considérée est mesurable. Dans d'autres cas, cette investigation directe n'est pas possible. La grandeur est alors dite non mesurable.

En revanche, elle peut, tout en étant non mesurable, influencer la sortie  $s(t)$  du système. Il est alors possible, à partir de la mesure de la sortie, de déduire la grandeur considérée. On dit que celle-ci est observable.

### 14.4.1 Définition

Un système est dit observable à un instant  $t_1$ , si la connaissance du signal d'entrée et du signal de sortie sur un intervalle de temps  $[t_1, t_2]$  permet de calculer l'état du système à l'instant  $t_1$ .

Si un système est observable quel que soit l'instant  $t_1$ , il est dit complètement observable.

### 14.4.2 Critère d'observabilité

On considère un système défini par :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}] \mathbf{x}(t) + (\mathbf{B}) e(t) \\ s(t) = (\mathbf{C}) \mathbf{x}(t) + d \cdot e(t) \end{cases}$$

Ce système est complètement observable si et seulement si les vecteurs lignes  $(\mathbf{C})$ ,  $(\mathbf{C})[\mathbf{A}]$ ,  $(\mathbf{C})[\mathbf{A}]^2$ ,  $\dots$ ,  $(\mathbf{C})[\mathbf{A}]^{n-1}$  sont linéairement indépendants.

Cet énoncé peut se traduire également de la manière suivante : on définit la matrice d'observabilité par la matrice formée des  $n$  vecteurs lignes  $(\mathbf{C})$ ,  $(\mathbf{C})[\mathbf{A}]$ ,  $(\mathbf{C})[\mathbf{A}]^2$ ,  $\dots$ ,  $(\mathbf{C})[\mathbf{A}]^{n-1}$  :

$$[\mathbf{O}]_{([\mathbf{A}](\mathbf{C}))} = \begin{bmatrix} (\mathbf{C}) \\ (\mathbf{C})[\mathbf{A}] \\ (\mathbf{C})[\mathbf{A}]^2 \\ \vdots \\ (\mathbf{C})[\mathbf{A}]^{n-1} \end{bmatrix}$$

La paire  $[\mathbf{A}], (\mathbf{C})$  est complètement observable si et seulement si la matrice d'observabilité est régulière, autrement dit si son déterminant n'est pas nul.

### 14.4.3 Cas des systèmes non observables

Si la matrice d'observabilité est de rang  $r < n$ , le système n'est pas complètement observable. On montre que dans ce cas, il est possible de trouver une matrice de changement de base  $[\mathbf{T}]$  telle que :

$$[\tilde{\mathbf{A}}] = [\mathbf{T}][\mathbf{A}][\mathbf{T}]^{-1}, \quad (\tilde{\mathbf{C}}) = (\mathbf{C})[\mathbf{T}]$$

avec :

$$[\tilde{\mathbf{A}}] = \begin{bmatrix} \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{11}} & \boxed{\mathbf{0}} \\ \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{21}} & \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{22}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad (\tilde{\mathbf{C}}) = (\boxed{\tilde{\mathbf{C}}_1} \quad \boxed{\mathbf{0}})$$

On a alors :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = [\tilde{\mathbf{A}}] \tilde{\mathbf{x}}(t) + (\tilde{\mathbf{B}}) e(t) \\ s(t) = (\tilde{\mathbf{C}}) \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

**Remarque** : Le vecteur d'état subit bien évidemment le même changement de base :  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{T}]\mathbf{x}(t)$ .

Dans cette matrice  $[\tilde{\mathbf{A}}]$  apparaît une sous-matrice  $r \times r$   $[\tilde{\mathbf{A}}_{11}]$  de rang  $r$  qui correspond à un sous-système qui lui, est complètement observable. Dans le vecteur  $(\tilde{\mathbf{C}})$  apparaît un sous-vecteur possédant  $r$  composantes. On dit que le sous système défini par la paire  $[\tilde{\mathbf{A}}_{11}], (\tilde{\mathbf{C}}_1)$  est un sous-système complètement observable du système défini par la paire  $[\mathbf{A}], (\mathbf{C})$ . Les  $r$  premières variables d'état sont les variables d'état observables du système. Les autres variables d'état ne sont pas observables.

**Remarque** : Nous reparlerons de la notion d'observabilité dans le chapitre 16 consacré à la commande par retour d'état.

## 14.5 RELATION ENTRE LA REPRÉSENTATION D'ÉTAT ET LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME

### 14.5.1 Représentation d'état à partir de la fonction de transfert

Comme nous l'avons déjà mentionné, la représentation d'état d'un système n'est pas unique. Dans les lignes qui suivent, nous présentons plusieurs types de représentation d'état que l'on peut obtenir à partir d'une fonction de transfert  $G(p)$ . Le choix de la représentation peut dépendre de la forme disponible de la fonction de transfert ou du type d'étude que l'on souhaite réaliser à partir du modèle. Rappelons encore que la représentation d'état d'un système n'est pas unique et que les propriétés du système ne sont en aucun cas liées à la forme choisie.

#### a) Représentation modale

Ce type de représentation, encore appelée représentation parallèle, convient particulièrement bien à la représentation d'un système dont la fonction de transfert est placée sous la forme d'une somme. Soit  $G(p)$  sa fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\alpha_1}{p - p_1} + \frac{\alpha_2}{p - p_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{p - p_n}$$

**Remarque** : On dit alors que la fonction de transfert est strictement propre.

Cette écriture fait apparaître la somme de  $n$  fonctions de transfert et peut être matérialisée par le schéma de la figure 14.3 en faisant apparaître  $n$  blocs élémentaires.

En appelant  $X_i(p)$  la sortie du  $i^{\text{ème}}$  bloc élémentaire, on a :

$$X_i(p) = \frac{\alpha_i}{p - p_i} E(p) \Rightarrow \dot{x}_i = p_i x_i + e$$

et :

$$s(t) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

soit :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & p_n \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} e(t) \\ s(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

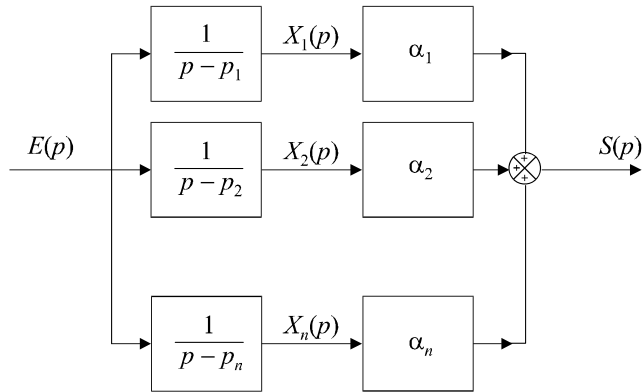


Figure 14.3 Schéma bloc de la fonction de transfert.

La matrice de commande  $[A]$  est diagonale et ses valeurs propres sont les pôles de la fonction de transfert. La traduction directe des équations d'état conduit à la représentation schématique de la figure 14.4.

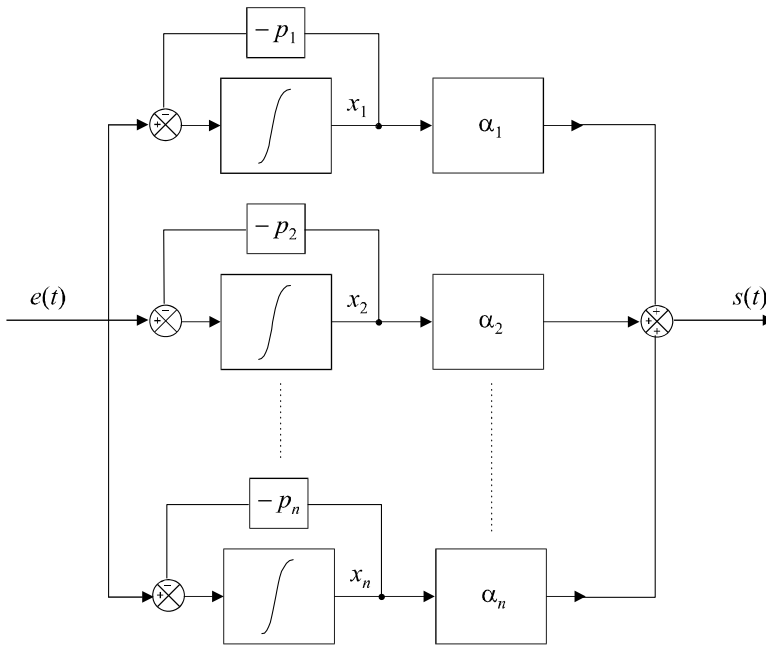


Figure 14.4 Représentation d'état du système sous forme modale.

b) Représentation série

Soit :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\alpha}{(p - p_1)(p - p_2) \times \dots \times (p - p_n)}$$

Cette écriture fait apparaître le produit de  $n$  fonctions de transfert et peut être matérialisée par la mise en cascade de  $n$  blocs élémentaires.



La figure 14.5 propose une représentation d'état cohérente avec cette forme en cascade de la fonction de transfert de transfert.

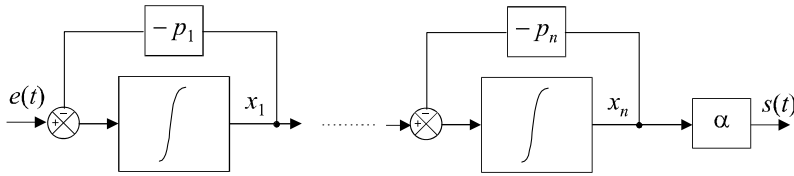


Figure 14.5 Représentation d'état du système sous forme série.

Dans ce cas, on a :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p_1 x_1 + e \\ \dot{x}_2 = p_2 x_2 + x_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = p_n x_n + x_{n-1} \\ s(t) = \alpha x_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & p_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & p_n \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e(t) \\ s(t) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \underline{x}(t) \end{cases}$$

**Remarque** : Une fonction de transfert  $G(p)$  peut posséder des pôles complexes conjugués, autrement dit il peut exister des termes non décomposables du type :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$

Dans ce cas, on utilise la représentation d'état proposée sur la figure 14.6.

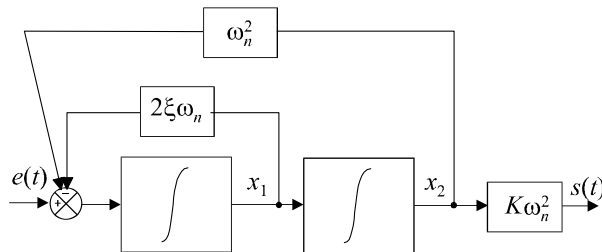


Figure 14.6 Représentation d'état d'un bloc du second ordre non décomposable.

c) Représentation compagne commandable

On suppose ici que la fonction de transfert n'est pas factorisée.

Soit :

$$G(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \text{ avec } m < n$$

Choisissons  $a_n = 1$  (ce qui revient à diviser le numérateur et le dénominateur par  $a_n$ ) et divisons le numérateur et le dénominateur par  $p^n$ . On obtient :

$$G(p) = \frac{b_m p^{m-n} + b_{m-1} p^{m-n-1} + \dots + b_1 p^{-n+1} + b_0 p^{-n}}{1 + a_{n-1} p^{-1} + \dots + a_1 p^{-n+1} + a_0 p^{-n}} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

On peut alors écrire :

$$S(p) = \left[ \frac{E(p)}{D(p)} \right] \times N(p) = Y(p)N(p)$$

soit :

$$Y(p) = \frac{E(p)}{1 + a_{n-1} p^{-1} + \dots + a_1 p^{-n+1} + a_0 p^{-n}}$$

$$Y(p) [1 + a_{n-1} p^{-1} + \dots + a_1 p^{-n+1} + a_0 p^{-n}] = E(p)$$

$$Y(p) = E(p) - \left[ a_{n-1} \left( \frac{1}{p} \right) + \dots + a_1 \left( \frac{1}{p} \right)^{n-1} + a_0 \left( \frac{1}{p} \right)^n \right] Y(p)$$

Si on pose :

$$X_n(p) = \frac{Y(p)}{p}, X_{n-1}(p) = \frac{Y(p)}{p^2}, \dots, X_1(p) = \frac{Y(p)}{p^n},$$

on obtient :

$$Y(p) = E(p) - [a_{n-1} X_n(p) + \dots + a_1 X_2(p) + a_0 X_1(p)]$$

On peut alors choisir les  $x_i$  comme composantes du vecteur d'état et proposer la représentation de la figure 14.7.

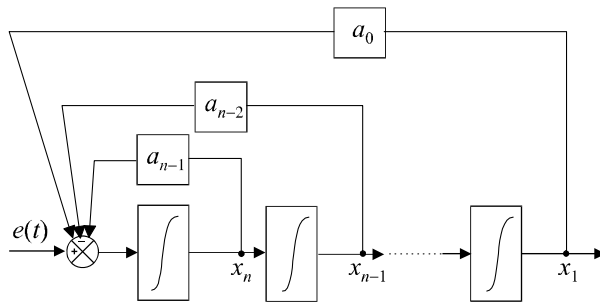


Figure 14.7 Représentation d'état partielle du système.

Cette représentation est bien évidemment incomplète puisqu'il y manque la reconstruction du signal de sortie.

On a :

$$S(p) = [b_m p^{m-n} + b_{m-1} p^{m-n-1} + \dots + b_1 p^{-n+1} + b_0 p^{-n}] Y(p)$$

d'où :

$$S(p) = b_m X_{m+1}(p) + b_{m-1} X_m(p) + \dots + b_1 X_2(p) + b_0 X_1(p)$$

Nous pouvons à présent compléter la représentation (figure 14.8).

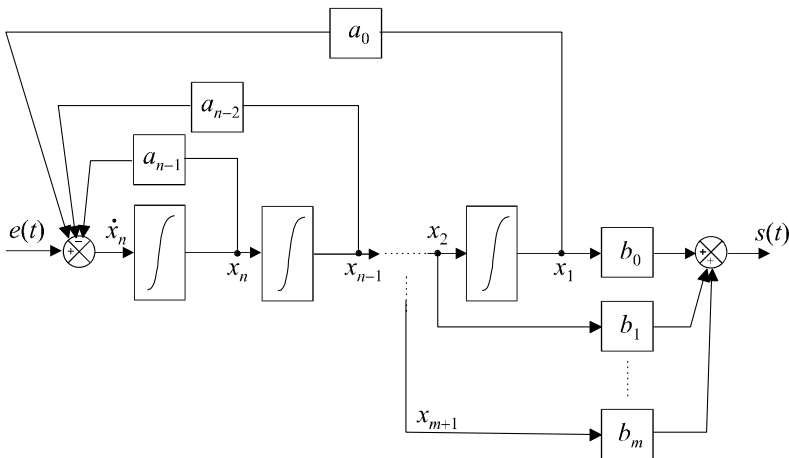


Figure 14.8 Représentation compagne commandable.

Les équations d'état se déduisent naturellement de cette représentation :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n + e(t) \\ s(t) = b_0x_1 + b_1x_2 + \dots + a_mx_{m+1} \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e(t) \\ s(t) = (b_0 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0) \underline{x}(t) \end{cases}$$

Cette forme de représentation est appelée forme compagne car la matrice de commande du système contient, en une seule ligne, l'ensemble des coefficients du dénominateur de la fonction de transfert. Elle est dite commandable car, bien que seule la variable  $x_n$  soit directement affectée par le signal d'entrée, toutes les variables d'état s'en trouvent influencées par intégrations successives. Si un système est complètement commandable, alors on peut le mettre sous forme compagne commandable.

d) Représentation compagne observable

Plus simple à appréhender, la représentation compagne observable peut être mise en évidence à partir de la forme de  $G(p)$  déjà transformée dans le paragraphe précédent :

$$G(p) = \frac{b_m p^{m-n} + b_{m-1} p^{m-n-1} + \dots + b_1 p^{-n+1} + b_0 p^{-n}}{1 + a_{n-1} p^{-1} + \dots + a_1 p^{-n+1} + a_0 p^{-n}}$$

On peut alors écrire :

$$S(p) = - [a_{n-1} p^{-1} + \dots + a_0 p^{-n}] S(p) + [b_m p^{m-n} + \dots + b_0 p^{-n}] E(p)$$

soit : 
$$S(p) = - \left[ a_{n-1} \left( \frac{1}{p} \right) + \dots + a_0 \left( \frac{1}{p} \right)^n \right] S(p) + \left[ b_m \left( \frac{1}{p} \right)^{n-m} + \dots + b_0 \left( \frac{1}{p} \right)^n \right] E(p)$$

On peut alors proposer la représentation d'état de la figure 14.9.

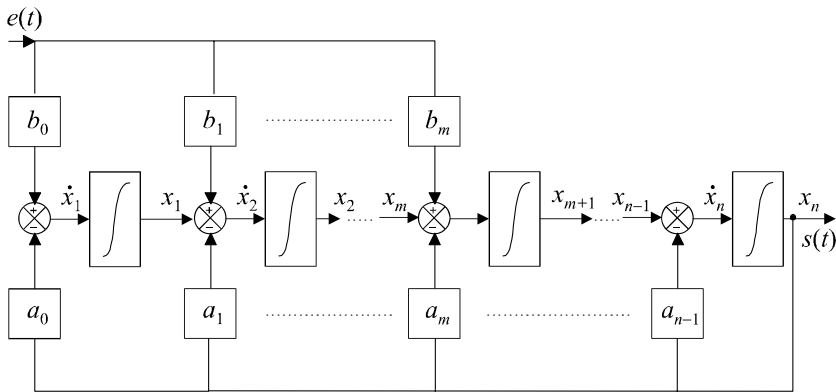


Figure 14.9 Représentation d'état du système sous forme compagne observable.

Les équations d'état se déduisent naturellement de cette représentation :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_0 x_n + b_0 e(t) \\ \dot{x}_2 = x_1 - a_1 x_n + b_1 e(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{m+1} = x_m - a_m x_n + b_m e(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = x_{n-1} - a_{n-1} x_n \\ s(t) = x_n \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{d'où :} \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e(t) \\ s(t) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \end{array} \right\}$$

Cette forme de représentation est appelée forme compagne observable car, outre le fait que la matrice de commande du système contient, en une seule colonne, l'ensemble des coefficients du dénominateur de la fonction de transfert, on remarque que la sortie de ce système est égale à  $x_n$  qui, par intégrations successives, est bien influencée par toutes les variables d'état. Si un système est complètement observable, alors on peut le mettre sous forme compagne observable.

#### e) Caractère intrinsèque de la commandabilité et de l'observabilité

La commandabilité et l'observabilité d'un système ne dépendent pas de la représentation choisie qui, rappelons-le une fois de plus, n'est pas unique. Si un système est commandable et/ou observable, il s'agit de propriétés intrinsèques au système qui ne sont pas remises en cause par la forme du modèle. Il ne faut donc pas confondre les formes compagnes avec des représentations sous lesquelles il faut impérativement placer le système pour qu'il possède telle ou telle caractéristique. En revanche, il est important, comme nous le verrons au chapitre 16, de connaître ces formes remarquables car elles facilitent, sous certaines conditions, la mise en œuvre des systèmes.

**Remarque :** L'analyse des différentes représentations nous montre qu'il est toujours conseillé de choisir les signaux de sortie des intégrateurs comme variables d'état.

### 14.5.2 Calcul de la fonction de transfert à partir de la représentation d'état

Si on applique la transformation de Laplace aux équations d'état, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}] \mathbf{x}(t) + (\mathbf{B}) e(t) \\ s(t) = (\mathbf{C}) \mathbf{x}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p\mathbf{X}(p) - \mathbf{x}(0) = [\mathbf{A}] \mathbf{X}(p) + (\mathbf{B}) E(p) \\ S(p) = (\mathbf{C}) \mathbf{X}(p) \end{cases}$$

$$\text{On a donc :} \quad p\mathbf{X}(p) - [\mathbf{A}] \mathbf{X}(p) = \mathbf{x}(0) + (\mathbf{B}) E(p)$$

$$\text{soit :} \quad (p\mathbf{I} - [\mathbf{A}]) \mathbf{X}(p) = \mathbf{x}(0) + (\mathbf{B}) E(p)$$

$$\text{ou encore :} \quad \mathbf{X}(p) = (p\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1} \mathbf{x}(0) + (p\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1} (\mathbf{B}) E(p)$$

On tire alors l'expression de  $S(p)$  :

$$S(p) = (\mathbf{C}) \mathbf{X}(p) = (\mathbf{C}) (p\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1} \mathbf{x}(0) + (\mathbf{C}) (p\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1} (\mathbf{B}) E(p)$$

La fonction de transfert du système est donc :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = (\mathbf{C})(p\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1}(\mathbf{B})$$

L'inverse d'une matrice carrée étant égale à sa matrice adjointe divisée par son déterminant, nous pouvons en déduire que les pôles de la fonction de transfert sont les valeurs de  $p$  qui sont solutions de l'équation :

$$\det(p\mathbf{I} - [\mathbf{A}]) = 0$$

Ce sont donc les valeurs propres de la matrice  $[\mathbf{A}]$ .

**Attention :** Pour pouvoir obtenir une fonction de transfert modélisant le fonctionnement réel du système, celui-ci doit être commandable et observable. Dans le cas contraire, la fonction de transfert obtenue correspond uniquement à sa partie commandable et observable.

## EXERCICES

### 14.1 Calcul de la matrice de transition d'un système d'ordre 2

On considère un système régi par l'équation d'état :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}]\mathbf{x}(t) + (\mathbf{B})e(t) \text{ avec } [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Déterminer l'expression de la matrice de transition de ce système.

### 14.2 Détermination de l'état d'un système en réponse à un échelon unité

On considère un système régi par l'équation d'état :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}]\mathbf{x}(t) + (\mathbf{B})e(t) \text{ avec } [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } (\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On suppose qu'à l'instant  $t = 0$ , le système se trouve dans l'état  $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Ce système étant soumis à une entrée en échelon unité, déterminer à tout instant  $t$  l'expression  $\mathbf{x}(t)$  de son vecteur d'état.

On pourra remarquer que la matrice de commande est nilpotente et choisir la méthode de calcul direct de la matrice de transition.

### 14.3 Commandabilité d'un système invariant d'ordre 2

On considère un système régi par l'équation d'état :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}]\mathbf{x}(t) + (\mathbf{B})e(t) \text{ avec } [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & 1 \end{bmatrix} \text{ et } (\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la condition sur le paramètre  $a$  pour que ce système soit complètement commandable.

---

#### 14.4 Observabilité d'un système invariant d'ordre 2

On considère un système régi par les équations d'état :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = [\mathbf{A}] \underline{x}(t) + (\mathbf{B}) e(t) \\ s(t) = (\mathbf{C}) \underline{x}(t) \end{cases} \quad \text{avec } [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } (\mathbf{C}) = (1 \quad -2)$$

Déterminer la condition sur le paramètre  $a$  pour que ce système soit complètement observable.

---

#### 14.5 Calcul du signal de commande d'un système d'ordre 2

On souhaite amener le système défini par :

$$\dot{\underline{x}}(t) = [\mathbf{A}] \underline{x}(t) + (\mathbf{B}) e(t) \quad \text{avec } [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/8 \end{bmatrix} \text{ et } (\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d'un état initial  $\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  à l'état final  $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  en  $t = 2$  s.

Déterminer l'expression du signal  $e(t)$  qui permet d'assurer la commande du système.

---

#### 14.6 Représentation d'état observable d'une fonction de transfert d'ordre 2

On considère un système de fonction de transfert  $G(p)$  avec :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$

Proposer une représentation d'état de ce système sous forme compagne observable. Discuter alors de la commandabilité et de l'observabilité du système.

---

#### 14.7 Représentation d'état commandable d'une fonction de transfert d'ordre 2

On considère à nouveau le système de fonction de transfert  $G(p)$  défini dans l'exercice 14.6. Proposer cette fois ci une représentation d'état de ce système sous forme compagne commandable. Étudier à nouveau la commandabilité et de l'observabilité du système.

---

#### 14.8 Représentation d'état observable d'un système d'ordre 3

On considère un système de fonction de transfert  $G(p)$  avec :

$$G(p) = \frac{p+1}{p^3+2p^2+4p+8}$$

Proposer une représentation d'état de ce système sous forme compagne observable.

### 14.9 Observabilité et commandabilité d'un système série

On considère un système constitué de la mise en cascade de deux éléments possédant respectivement les fonctions de transfert :

$$G_1(p) = \frac{p+a}{p+b} \text{ et } G_2(p) = \frac{1}{p+c}$$

Discuter de l'observabilité et de la commandabilité de ce système.

### 14.10 Détermination d'une fonction de transfert à partir des équations d'état

Déterminer la fonction de transfert du système défini par ses équations d'état :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}] \mathbf{x}(t) + (\mathbf{B}) e(t) \\ s(t) = (\mathbf{C}) \mathbf{x}(t) \end{cases} \text{ avec } [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -9 \end{bmatrix}, (\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } (\mathbf{C}) = (1 \quad 0)$$

Calculer les pôles de la fonction de transfert et en déduire l'expression de sa sortie en réponse à un échelon unité. Vérifier ce résultat en résolvant les équations d'état. On supposera que l'état initial du système est caractérisé par un vecteur d'état nul.

## SOLUTIONS

#### 14.1 Résolution à l'aide de Mathematica

La commande `Eigenvalues`  $\{\{-1, -2\}, \{-3, 1\}\}$  fournit immédiatement les valeurs propres de la matrice  $[\mathbf{A}]$ , soit  $\{\{-\sqrt{7}, -\sqrt{7}\}\}$ . La matrice  $[\Delta]$  est donc connue :

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} -\sqrt{7} & 0 \\ 0 & \sqrt{7} \end{bmatrix}$$

La commande `Eigenvectors`  $\{\{-1, -2\}, \{-3, 1\}\}$  fournit les deux vecteurs propres sous la forme

$$\left\{ \left\{ \frac{1+\sqrt{7}}{3}, 1 \right\}, \left\{ \frac{1-\sqrt{7}}{3}, 1 \right\} \right\}$$

$$\text{D'où : } [\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{7}}{3} & \frac{1-\sqrt{7}}{3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La commande `Inverse`  $\left\{ \left\{ \frac{1+\sqrt{7}}{3}, \frac{1-\sqrt{7}}{3} \right\}, \{1, 1\} \right\}$  donne l'expression de la matrice  $[\mathbf{T}]^{-1}$ , soit :

$$\left\{ \left\{ \frac{3\sqrt{7}}{14}, \frac{7-\sqrt{7}}{14} \right\}, \left\{ -\frac{3\sqrt{7}}{14}, \frac{7+\sqrt{7}}{14} \right\} \right\}$$

Il reste enfin à effectuer le produit des trois matrices pour obtenir la matrice de transition :

$$e^{[\mathbf{A}]t} = [\mathbf{T}] e^{[\Delta]t} [\mathbf{T}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{7}}{3} & \frac{1-\sqrt{7}}{3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-\sqrt{7}t} & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{7}t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{7}}{14} & \frac{7-\sqrt{7}}{14} \\ -\frac{3\sqrt{7}}{14} & \frac{7+\sqrt{7}}{14} \end{bmatrix}$$



Ce qui s'écrit, avec Mathematica :

$$\left\{ \left\{ \frac{1+\sqrt{7}}{3}, \frac{1-\sqrt{7}}{3} \right\}, \{1,1\} \right\} \cdot \left\{ \left\{ e^{-\sqrt{7}t}, 0 \right\}, \left\{ 0, e^{\sqrt{7}t} \right\} \right\} \cdot \left\{ \left\{ \frac{3\sqrt{7}}{14}, \frac{7-\sqrt{7}}{14} \right\}, \left\{ -\frac{3\sqrt{7}}{14}, \frac{7+\sqrt{7}}{14} \right\} \right\}$$

Le résultat est immédiat :

$$e^{[\mathbf{A}]t} = \begin{bmatrix} \frac{7+\sqrt{7}}{14}e^{-\sqrt{7}t} + \frac{7-\sqrt{7}}{14}e^{\sqrt{7}t} & \frac{-\sqrt{7}}{7}e^{-\sqrt{7}t} + \frac{\sqrt{7}}{7}e^{\sqrt{7}t} \\ \frac{3\sqrt{7}}{14}e^{-\sqrt{7}t} - \frac{3\sqrt{7}}{14}e^{\sqrt{7}t} & \frac{7-\sqrt{7}}{14}e^{-\sqrt{7}t} + \frac{7+\sqrt{7}}{14}e^{\sqrt{7}t} \end{bmatrix}$$

**14.2** Il est facile de vérifier que la matrice de commande est nilpotente.

En effet :

$$[\mathbf{A}]^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Par conséquent :

$$[\mathbf{A}]^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \forall n \geq 2$$

On a donc :  $e^{[\mathbf{A}]t} = \left( \mathbf{I} + [\mathbf{A}]t + \dots + \frac{[\mathbf{A}]^n}{n!}t^n + \dots \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t & -t \\ t & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}$

La forme générale de la solution de l'équation d'état a pour expression :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = e^{[\mathbf{A}]t} \underline{\mathbf{x}}(0) + \int_0^t e^{[\mathbf{A}](t-\tau)} (\mathbf{B}) e(\tau) d\tau$$

Ce système étant sollicité par un échelon, on a :  $e(\tau) = 1$ .

On a par ailleurs :

$$\underline{\mathbf{x}}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \left\{ \begin{bmatrix} 1-(t-\tau) & -(t-\tau) \\ (t-\tau) & 1+(t-\tau) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} d\tau$$

soit :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t (2-t+\tau) d\tau \\ \int_0^t (t-\tau-1) d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left[ 2\tau - t\tau + \frac{\tau^2}{2} \right]_0^t \\ \left[ t\tau - \frac{\tau^2}{2} - \tau \right]_0^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2t - \frac{t^2}{2} \\ 1 - t + \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}$$

**14.3** La paire  $[\mathbf{A}], (\mathbf{B})$  est complètement commandable si et seulement si la matrice de commandabilité est régulière, autrement dit si son déterminant n'est pas nul.

La matrice de commandabilité est formée de deux vecteurs :

$$[\mathbf{C}]_{([\mathbf{A}](\mathbf{B}))} = [(\mathbf{B}) \quad [\mathbf{A}](\mathbf{B})]$$

Or :

$$[\mathbf{A}](\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ a+1 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$[\mathbf{C}]_{(\mathbf{A})(\mathbf{B})} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & a+1 \end{bmatrix}$$

et :

$$\det [\mathbf{C}]_{(\mathbf{A})(\mathbf{B})} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = a-2$$

Le système est donc complètement commandable si et seulement si  $a \neq 2$ .

**14.4** La paire  $[\mathbf{A}], (\mathbf{C})$  est complètement observable si et seulement si la matrice d'observabilité est régulière, autrement dit si son déterminant n'est pas nul.

On a :

$$[\mathbf{O}]_{(\mathbf{A})(\mathbf{C})} = \begin{bmatrix} (\mathbf{C}) \\ (\mathbf{C})[\mathbf{A}] \end{bmatrix}$$

avec :

$$(\mathbf{C}) = (1 \quad -2) \text{ et } (\mathbf{C})[\mathbf{A}] = (1 \quad -2) \begin{bmatrix} a & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = (a-4 \quad -3)$$

Soit :

$$[\mathbf{O}]_{(\mathbf{A})(\mathbf{C})} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ a-4 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det [\mathbf{O}]_{(\mathbf{A})(\mathbf{C})} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ a-4 & -3 \end{vmatrix} = -11 + 2a$$

Le système est donc complètement observable si et seulement si  $a \neq \frac{11}{2}$ .

**14.5** Le signal de commande recherché a pour expression :

$$e(\tau) = (\mathbf{B})^T e^{[\mathbf{A}]^T(t-\tau)} [\mathbf{W}]^{-1} [\mathbf{x}(t) - e^{[\mathbf{A}]t} \mathbf{x}(0)]$$

avec :

$$[\mathbf{W}] = \int_0^t e^{[\mathbf{A}]\tau} (\mathbf{B})(\mathbf{B})^T e^{[\mathbf{A}]^T\tau} d\tau$$

Comme  $[\mathbf{A}]$  est une matrice diagonale, sa transposée lui est égale.

On a donc :

$$e^{[\mathbf{A}]\tau} = e^{[\mathbf{A}]^T\tau} = \begin{bmatrix} e^{-\tau/2} & 0 \\ 0 & e^{-\tau/8} \end{bmatrix}$$

d'où :

$$[\mathbf{W}] = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\tau/2} & 0 \\ 0 & e^{-\tau/8} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \quad 2) \begin{bmatrix} e^{-\tau/2} & 0 \\ 0 & e^{-\tau/8} \end{bmatrix} d\tau$$

soit :

$$[\mathbf{W}] = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\tau/2} \\ 2e^{-\tau/8} \end{pmatrix} (1 \quad 2) \begin{bmatrix} e^{-\tau/2} & 0 \\ 0 & e^{-\tau/8} \end{bmatrix} d\tau$$

$$[\mathbf{W}] = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\tau/2} & 2e^{-\tau/2} \\ 2e^{-\tau/8} & 4e^{-\tau/8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\tau/2} & 0 \\ 0 & e^{-\tau/8} \end{bmatrix} d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\tau} & 2e^{-5\tau/8} \\ 2e^{-5\tau/8} & 4e^{-\tau/4} \end{bmatrix} d\tau$$

d'où :

$$[\mathbf{W}] = \int_0^t \begin{bmatrix} [-e^{-\tau}]_0^t & [-\frac{16e^{-5\tau/8}}{5}]_0^t \\ [-\frac{16e^{-5\tau/8}}{5}]_0^t & [-16e^{-\tau/4}]_0^t \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 1 - e^{-t} & \frac{16}{5} (1 - e^{-5t/8}) \\ \frac{16}{5} (1 - e^{-5t/8}) & 16 (1 - e^{-t/4}) \end{bmatrix}$$

Par conséquent :

$$[\mathbf{W}]^{-1} = \frac{1}{\det[\mathbf{W}]} \begin{bmatrix} 16(1 - e^{-t/4}) & -\frac{16}{5}(1 - e^{-5t/8}) \\ -\frac{16}{5}(1 - e^{-5t/8}) & 1 - e^{-t} \end{bmatrix}$$

Pour  $t = 2$  s, on a :

$$\det[\mathbf{W}] = \begin{vmatrix} 0,865 & -2,283 \\ -2,283 & 6,296 \end{vmatrix} = 0,234$$

et :

$$[\mathbf{W}]^{-1} = \begin{bmatrix} 26,91 & -9,76 \\ -9,76 & 3,70 \end{bmatrix}$$

Comme :

$$e(\tau) = (\mathbf{B})^T e^{[\mathbf{A}]^T(t-\tau)} [\mathbf{W}]^{-1} [\mathbf{x}(t) - e^{[\mathbf{A}]t} \mathbf{x}(0)]$$

on a ici :

$$e(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e^{-(2-\tau)/2} & 0 \\ 0 & e^{-(2-\tau)/8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26,91 & -9,76 \\ -9,76 & 3,70 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soit :

$$e(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 44,06 e^{-(2-\tau)/2} \\ -15,82 e^{-(2-\tau)/8} \end{pmatrix}$$

d'où :

$$e(\tau) = 44,06 e^{(\tau-2)/2} - 31,64 e^{(\tau-2)/8}$$

On peut sans peine vérifier que ce signal de commande amène bien le système dans l'état désiré au bout d'un temps  $t = 2$  s. La forme générale de la solution de l'équation d'état a pour expression :

$$\mathbf{x}(t) = e^{[\mathbf{A}]t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{[\mathbf{A}](t-\tau)} (\mathbf{B}) e(\tau) d\tau$$

On a ici :

$$\mathbf{x}(2) = \int_0^2 \begin{bmatrix} e^{-(2-\tau)/2} & 0 \\ 0 & e^{-(2-\tau)/8} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} [44,06 e^{(\tau-2)/2} - 31,64 e^{(\tau-2)/8}] d\tau$$

soit :

$$\mathbf{x}(2) = \begin{pmatrix} \int_0^2 e^{(\tau-2)/2} [44,06 e^{(\tau-2)/2} - 31,64 e^{(\tau-2)/8}] d\tau \\ \int_0^2 2 e^{-(2-\tau)/8} [44,06 e^{(\tau-2)/2} - 31,64 e^{(\tau-2)/8}] d\tau \end{pmatrix}$$

En utilisant Mathematica, les commandes :

$$\text{Integrate} [44,06 e^{t-2} - 31,64 e^{5(t-2)/8}, \{t, 0, 2\}] \text{ et } \text{Integrate} [88,12 e^{5(t-2)/8} - 63,28 e^{(t-2)/4}, \{t, 0, 2\}]$$

nous donnent respectivement 1,97715 et 1,00216.

Soit :

$$\mathbf{x}(2) \approx \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**14.6** Transformons l'expression de la fonction de transfert comme cela est suggéré dans le cours :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1} = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{K\omega_n^2 p^{-2}}{1 + 2\xi\omega_n p^{-1} + \omega_n^2 p^{-2}} = \frac{S(p)}{E(p)}$$

On a donc :

$$S(p) = - \left[ 2\xi\omega_n p^{-1} + \omega_n^2 p^{-2} \right] S(p) + \left[ K\omega_n^2 p^{-2} \right] E(p)$$

soit :

$$S(p) = - \left[ 2\xi\omega_n \left( \frac{1}{p} \right) + \omega_n^2 \left( \frac{1}{p} \right)^2 \right] S(p) + \left[ K\omega_n^2 p \left( \frac{1}{p} \right)^2 \right] E(p)$$

Cette expression nous conduit à la représentation de la figure 14.10.

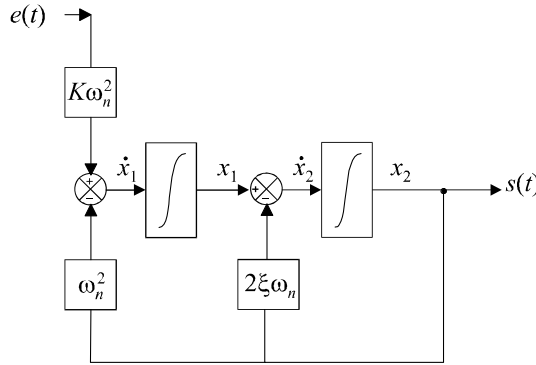


Figure 14.10 Forme compagne observable de la représentation d'état.

Les variables d'état sont ainsi clairement identifiées et les équations d'état se lisent sur la représentation schématique.

On a donc :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\omega_n^2 x_2 + K\omega_n^2 e(t) \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2\xi\omega_n x_2 \\ s(t) = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_n^2 \\ 1 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} K\omega_n^2 \\ 0 \end{pmatrix} e(t) \\ s(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Pour étudier l'observabilité de cette représentation, calculons la matrice  $[\mathbf{O}]_{(A|C)}$  :

$$[\mathbf{O}]_{(A|C)} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}[A] \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{C}[A] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_n^2 \\ 1 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix}$$

soit :

$$[\mathbf{O}]_{(A|C)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \Rightarrow \det [\mathbf{O}]_{(A|C)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2\xi\omega_n \end{vmatrix} = -1$$

La matrice d'observabilité est de rang 2 étant donné que son déterminant est non nul. Le système est donc complètement observable.

Pour étudier la commandabilité de cette représentation, calculons la matrice  $[\mathbf{C}]_{(A|B)}$  :

On a :

$$[\mathbf{C}]_{(A|B)} = [\mathbf{B} \quad A \mathbf{B}]$$

Or :

$$[A] \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_n^2 \\ 1 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} K\omega_n^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ K\omega_n^2 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$[\mathbf{C}]_{(A|B)} = \begin{bmatrix} K\omega_n^2 & 0 \\ 0 & K\omega_n^2 \end{bmatrix} \text{ et } \det [\mathbf{C}]_{(A|B)} = \begin{vmatrix} K\omega_n^2 & 0 \\ 0 & K\omega_n^2 \end{vmatrix} = K^2\omega_n^4$$

La matrice de commandabilité est de rang 2 étant donné que son déterminant est non nul. Le système est donc complètement commandable.

14.7 Comme pour l'exercice précédent, on a :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1} = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{K\omega_n^2 p^{-2}}{1 + 2\xi\omega_n p^{-1} + \omega_n^2 p^{-2}} = \frac{S(p)}{E(p)}$$

En appliquant les résultats du cours, on obtient sans problème la représentation schématique de la forme compagne commandable (figure 14.11). Les variables d'état sont ainsi clairement identifiées et les équations d'état se lisent sur la représentation schématique.

On a donc :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_n^2 x_1 - 2\xi\omega_n x_2 + e(t) \\ s(t) = K\omega_n^2 x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e(t) \\ s(t) = \begin{pmatrix} K\omega_n^2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

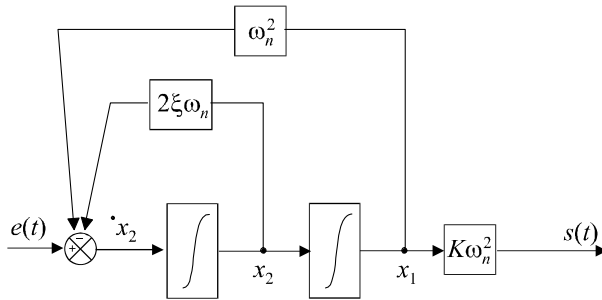


Figure 14.11 Forme compagne commandable de la représentation d'état.

Pour étudier l'observabilité de cette représentation, calculons la matrice  $[\mathbf{O}]_{(A)(C)}$  :

$$[\mathbf{O}]_{(A)(C)} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}[A] \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} K\omega_n^2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{C}[A] = \begin{pmatrix} K\omega_n^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix}$$

soit :

$$[\mathbf{O}]_{(A)(C)} = \begin{bmatrix} K\omega_n^2 & 0 \\ 0 & K\omega_n^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det [\mathbf{O}]_{(A)(C)} = K^2 \omega_n^4$$

La matrice d'observabilité est de rang 2 étant donné que son déterminant est non nul. Le système est donc complètement observable.

Pour étudier la commandabilité de cette représentation, calculons la matrice  $[\mathbf{C}]_{(A)(B)}$  :

On a :

$$[\mathbf{C}]_{(A)(B)} = [\mathbf{B} \quad A \mathbf{B}]$$

Or :

$$[\mathbf{A} \mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\xi\omega_n \end{pmatrix}$$

d'où :

$$[\mathbf{C}]_{(A)(B)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix}$$

et : 
$$\det [\mathbf{C}]_{(\mathbf{A}|\underline{\mathbf{e}})} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2\xi\omega_n \end{vmatrix} = -1$$

La matrice de commandabilité est de rang 2 étant donné que son déterminant est non nul. Le système est donc complètement commandable.

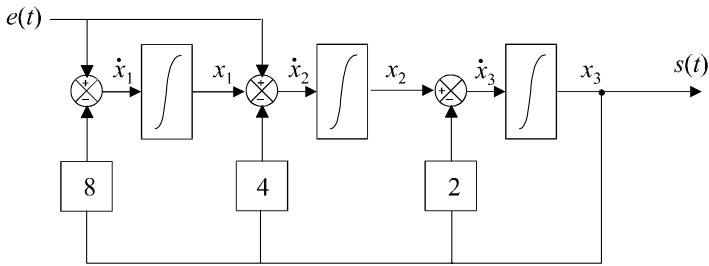
**14.8** Transformons l'expression de la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{p + 1}{p^3 + 2p^2 + 4p + 8} = \frac{p^{-2} + p^{-3}}{1 + 2p^{-1} + 4p^{-2} + 8p^{-3}} = \frac{S(p)}{E(p)}$$

On a donc : 
$$S(p) = - [2p^{-1} + 4p^{-2} + 8p^{-3}] S(p) + [p^{-2} + p^{-3}] E(p)$$

soit : 
$$S(p) = - \left[ 2 \left( \frac{1}{p} \right) + 4 \left( \frac{1}{p} \right)^2 + 8 \left( \frac{1}{p} \right)^3 \right] S(p) + \left[ \left( \frac{1}{p} \right)^2 + \left( \frac{1}{p} \right)^3 \right] E(p)$$

Cette expression nous conduit à la représentation de la figure 14.12.



**Figure 14.12** Forme compagne observable du système.

Les variables d'état sont ainsi clairement identifiées et les équations d'état se lisent sur la représentation schématique.

On a donc :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -8x_3 + e(t) \\ \dot{x}_2 = x_1 - 4x_3 + e(t) \\ \dot{x}_3 = x_2 - 2x_3 \\ s(t) = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e(t) \\ s(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

**14.9** Recherchons, par exemple, une représentation d'état du système sous forme compagne observable pour le système de fonction de transfert  $G_1(p)$  et complétons le schéma par la mise en cascade du système  $G_2(p)$ . *A priori*, deux variables d'état suffisent pour représenter le système (figure 14.13) : les sorties des deux intégrateurs.

Les équations d'état se lisent aisément sur la représentation schématique :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -bx_1 + (a - b) e(t) \\ \dot{x}_2 = x_1 - cx_2 + e(t) \\ s(t) = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} -b & 0 \\ 1 & -c \end{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}(t) + \begin{pmatrix} a - b \\ 1 \end{pmatrix} e(t) \\ s(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

Pour étudier l'observabilité de ce système, calculons la matrice  $[\mathbf{O}]_{(\mathbf{A}|\underline{\mathbf{C}})}$  :

$$[\mathbf{O}]_{(\mathbf{A}|\underline{\mathbf{C}})} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{C}} \\ \underline{\mathbf{C}}[\mathbf{A}] \end{bmatrix} \text{ avec } \underline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \underline{\mathbf{C}}[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -b & 0 \\ 1 & -c \end{bmatrix}$$

soit :

$$[\mathbf{Q}]_{(A|C)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{bmatrix} \Rightarrow \det [\mathbf{Q}]_{(A|C)} = -1$$

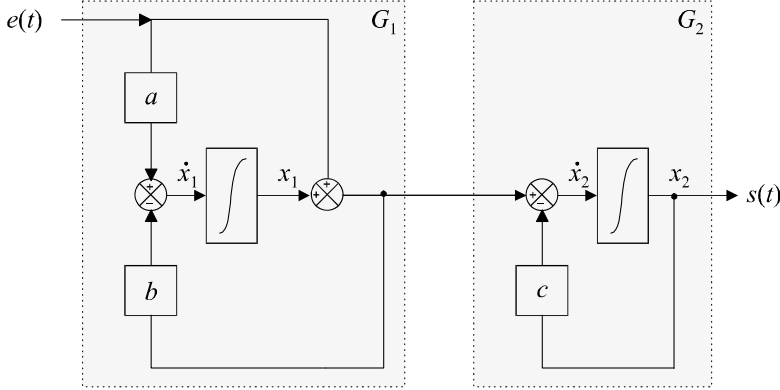


Figure 14.13 Représentation d'état du système.

La matrice d'observabilité est de rang 2 étant donné que son déterminant est non nul. Le système est donc complètement observable.

Pour étudier la commandabilité de ce système, calculons la matrice  $[\mathbf{C}]_{(A|B)}$ .

On a :

$$[\mathbf{C}]_{(A|B)} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \mathbf{B}]$$

Or :

$$[\mathbf{A}] \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -b & 0 \\ 1 & -c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a-b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(b-a) \\ a-b-c \end{pmatrix}$$

d'où :

$$[\mathbf{C}]_{(A|B)} = \begin{bmatrix} a-b & b(b-a) \\ 1 & a-b-c \end{bmatrix}$$

et :

$$\det [\mathbf{C}]_{(A|B)} = \begin{vmatrix} a-b & b(b-a) \\ 1 & a-b-c \end{vmatrix} = (a-b)(a-b-c) - b(b-a)$$

soit :

$$\det [\mathbf{C}]_{(A|B)} = (a-b)(a-c)$$

La matrice de commandabilité est de rang 2 si et seulement si on a  $a \neq b$  et  $a \neq c$ . Si ces deux conditions sont remplies, le système est complètement commandable.

**14.10** La fonction de transfert du système a pour expression :

$$G(p) = (\mathbf{C})(p\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1} (\mathbf{B})$$

On a :

$$p\mathbf{I} - [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p+2 & 4 \\ 2 & p+9 \end{bmatrix}$$

d'où :

$$(p\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1} = \frac{1}{\det(p\mathbf{I} - [\mathbf{A}])} \begin{bmatrix} p+9 & -4 \\ -2 & p+2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(p+2)(p+9) - 8} \begin{bmatrix} p+9 & -4 \\ -2 & p+2 \end{bmatrix}$$

soit :

$$(p\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1} = \frac{1}{p^2 + 11p + 10} \begin{bmatrix} p+9 & -4 \\ -2 & p+2 \end{bmatrix}$$

On a donc :

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + 11p + 10} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} p+9 & -4 \\ -2 & p+2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + 11p + 10} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ p+2 \end{pmatrix} = \frac{-4}{p^2 + 11p + 10} = \frac{-4}{(p+1)(p+10)}$$

De toute évidence, les pôles de  $G(p)$  sont  $-1$  et  $-10$ .

En injectant un échelon unité dans ce système, on obtient :

$$S(p) = \frac{-4}{p(p+1)(p+10)}$$

d'où :

$$s(t) = -\frac{4}{10} \left[ 1 + \frac{10}{1-10} e^{-t} - \frac{1}{1-10} e^{-10t} \right] = -\frac{4}{10} + \frac{4}{9} e^{-t} - \frac{4}{90} e^{-10t}$$

Nous pouvons retrouver ce résultat en résolvant les équations d'état à l'aide de Mathematica. Nous connaissons déjà la forme diagonale de la matrice de commande.

Soit :

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{[\Delta]t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-10t} \end{bmatrix}$$

Les vecteurs propres nous sont donnés par la commande :

$$\text{Eigenvectors} [\{\{-2, -4\}, \{-2, -9\}\}]$$

On en déduit :

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Puis :

$$[\mathbf{T}]^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

Calculons à présent la matrice de transition :

On a :

$$e^{[\mathbf{A}]t} = \begin{bmatrix} -4 & -\frac{1}{9} \\ 1 & -\frac{2}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-10t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & -1 \\ \frac{1}{9} & -4 \end{bmatrix}$$

Soit, avec Mathematica :

$$\{\{-4, 1\}, \{1, 2\}\} \cdot \{\{e^{-t}, 0\}, \{0, e^{-10t}\}\} \cdot \{\{-2/9, 1/9\}, \{1/9, 4/9\}\}$$

D'où :

$$e^{[\mathbf{A}]t} = \begin{bmatrix} \frac{8e^{-t}}{9} + \frac{e^{-10t}}{9} & -\frac{4e^{-t}}{9} + \frac{4e^{-10t}}{9} \\ -\frac{2e^{-t}}{9} + \frac{2e^{-10t}}{9} & \frac{e^{-t}}{9} + \frac{8e^{-10t}}{9} \end{bmatrix}$$

La forme générale de la solution de l'équation d'état a pour expression :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = e^{[\mathbf{A}]t} \underline{\mathbf{x}}(0) + \int_0^t e^{[\mathbf{A}](t-\tau)} (\mathbf{B}) e(\tau) d\tau$$

Ce système étant sollicité par un échelon, on a :  $e(\tau) = 1$ .



On a par ailleurs :

$$\underline{\mathbf{x}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \int_0^t \left\{ \begin{bmatrix} \frac{8e^{-(t-\tau)}}{9} + \frac{e^{-10(t-\tau)}}{9} & -\frac{4e^{-(t-\tau)}}{9} + \frac{4e^{-10(t-\tau)}}{9} \\ -\frac{2e^{-(t-\tau)}}{9} + \frac{2e^{-10(t-\tau)}}{9} & \frac{e^{-(t-\tau)}}{9} + \frac{8e^{-10(t-\tau)}}{9} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} d\tau$$

Soit :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \left[ \frac{4e^{-(t-\tau)}}{9} + \frac{4e^{-10(t-\tau)}}{9} \right] d\tau \\ \int_0^t \left[ \frac{e^{-(t-\tau)}}{9} + \frac{8}{9}e^{-10(t-\tau)} \right] d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{10} - \frac{4}{90}e^{-10t} + \frac{4}{9}e^{-t} \\ \frac{2}{10} - \frac{4}{45}e^{-10t} - \frac{1}{9}e^{-t} \end{pmatrix}$$

Ces expressions ont été obtenues en écrivant les commandes suivantes à l'aide de Mathematica :

$$\text{Integrate} \left[ 4/9e^{-10(t-tau)} - 4/9e^{-(t-tau)}, \{tau, 0, t\} \right]$$

$$\text{Integrate} \left[ 8/9e^{-10(t-tau)} + 1/9e^{-(t-tau)}, \{tau, 0, t\} \right]$$

Comme  $\underline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ , on a :

$$s(t) = x_1(t)$$

Soit :

$$s(t) = -\frac{4}{10} + \frac{4}{9}e^{-t} - \frac{4}{90}e^{-10t}$$

Nous retrouvons, bien évidemment, le même résultat que précédemment.

## Chapitre 15

# Représentation d'état des systèmes à temps discret

### 15.1 PRINCIPE GÉNÉRAL

Tout comme les systèmes à temps continu, les systèmes à temps discret peuvent être placés sous forme de représentation d'état. Les deux formalismes sont très voisins et les résultats démontrés au chapitre 14 restent, pour la plupart, valables. Deux approches traditionnelles sont souvent étudiées pour aborder la représentation d'état des systèmes discrets : la discrétisation des équations d'état continues et la représentation directe par analogie avec la représentation d'état en temps continu. C'est cette deuxième approche que nous avons privilégiée car elle permet de généraliser très rapidement les propriétés déjà démontrées.

#### 15.1.1 Variables d'état en temps discret

Dans la représentation d'état en temps continu, nous avons proposé des schémas fonctionnels de systèmes ne comportant que des intégrateurs et des gains et nous avons vu qu'il était possible, à partir de tels éléments, de reconstruire n'importe quelle fonction de transfert. En temps discret, il est possible de décomposer un système en utilisant des gains et des opérateurs dits de décalage, de fonctions de transfert  $z^{-1}$ . La figure 15.1 présente un exemple de système composé de tels éléments. On peut, dans un tel modèle, définir des variables d'état, que nous noterons  $x_i(k)$  et qui représentent, selon le formalisme développé dans la quatrième partie de cet ouvrage, la valeur des signaux  $x_i$  aux instants  $kT_e$ ,  $T_e$  étant la période d'échantillonnage de tous les signaux présents dans le système.

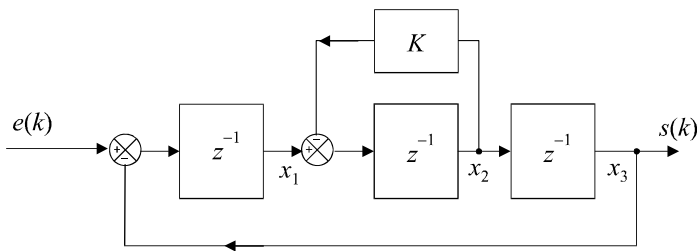


Figure 15.1 Représentation d'état en temps discret.

**Remarque :** Rappelons ici que l'équation  $X_3(z) = z^{-1}X_2(z)$  se traduit, en représentation temporelle à temps discret par la relation  $x_3(k+1) = x_2(k)$ . D'où la dénomination d'opérateur de décalage.

## 15.1.2 Modélisation du fonctionnement du système

Dans une représentation en temps discret, la possibilité d'exprimer l'état du système à un instant donné en fonction du signal d'entrée et en fonction de son « passé », autrement dit, de son état précédent, prend tout son sens. La forme générale pour un système mono-entrée et mono-sortie des équations d'état en temps discret correspond donc à :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{x}}(k+1) = [\mathbf{A}] \underline{\mathbf{x}}(k) + (\mathbf{B}) e(k) \\ s(k) = (\mathbf{C}) \underline{\mathbf{x}}(k) \end{cases}$$

La matrice de commande  $[\mathbf{A}]$  est une matrice carrée,  $(\mathbf{B})$  est un vecteur colonne et  $(\mathbf{C})$  est un vecteur ligne.

**Remarque :** pour un système d'ordre  $n$ , c'est-à-dire possédant  $n$  variables d'état, la première équation, dite de commande, correspond à un système de  $n$  équations :

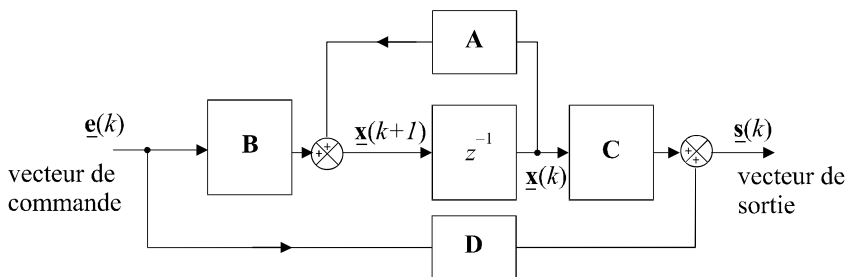
$$\begin{cases} x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + a_{12}x_2(k) + \dots + a_{1n}x_n(k) + b_1e(k) \\ x_2(k+1) = a_{21}x_1(k) + a_{22}x_2(k) + \dots + a_{2n}x_n(k) + b_2e(k) \\ \vdots \\ x_n(k+1) = a_{n1}x_1(k) + a_{n2}x_2(k) + \dots + a_{nn}x_n(k) + b_n e(k) \end{cases}$$

Si le système possède plusieurs entrées et plusieurs sorties, on retrouve une écriture similaire à ce qui a déjà été étudié au chapitre 14 : soit  $n$  le nombre de variables d'état,  $m$  le nombre d'entrées et  $p$  le nombre de sorties. Dans ces conditions, la matrice de commande est toujours une matrice  $n \times n$ ,  $[\mathbf{B}]$  est une matrice  $n \times m$  et  $[\mathbf{C}]$  est une matrice  $p \times n$ . Pour être complet, il faut tenir compte d'une possible relation directe entre entrées et sorties. La matrice  $[\mathbf{D}]$ , de dimensions  $m \times p$  représente ce lien. Signalons pour finir que les coefficients des différentes matrices peuvent aussi être variables dans le temps (c'est-à-dire s'exprimer en fonction de  $k$ ).

On a alors :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{x}}(k+1) = [\mathbf{A}(k)] \underline{\mathbf{x}}(k) + [\mathbf{B}(k)] \underline{\mathbf{e}}(k) \\ \underline{\mathbf{s}}(k) = [\mathbf{C}(k)] \underline{\mathbf{x}}(k) + [\mathbf{D}(k)] \underline{\mathbf{e}}(k) \end{cases}$$

On adopte fréquemment la représentation schématique de la figure 15.2 pour illustrer cette modélisation. Attention, dans cette représentation, les signaux sont en réalité des vecteurs de signaux à temps discret.



**Figure 15.2** Représentation schématique d'une modélisation d'état en temps discret.

Si les coefficients des différentes matrices sont constants, le système est dit invariant.

## 15.2 RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS D'ÉTAT

Nous nous limitons ici à l'étude des systèmes invariants possédant une seule entrée et une seule sortie. Formulons l'hypothèse que l'état du système à l'instant 0 est connu et que la suite d'échantillons d'entrée l'est également entre l'instant 0 et l'instant  $k_0 - 1$ . Résoudre les équations d'état revient à rechercher l'état du système à l'instant  $k_0$ . Comme cet état sera déterminé sans tenir compte de la valeur de l'échantillon d'entrée à cet instant, on parle ici de prédiction de l'état du système.

### 15.2.1 Prédiction de l'état du système à un instant quelconque

Procédons par itérations successives. On a :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{x}}(1) = [\mathbf{A}] \underline{\mathbf{x}}(0) + (\mathbf{B}) e(0) \\ \underline{\mathbf{x}}(2) = [\mathbf{A}] \underline{\mathbf{x}}(1) + (\mathbf{B}) e(1) \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{x}}(i) = [\mathbf{A}] \underline{\mathbf{x}}(i-1) + (\mathbf{B}) e(i-1) \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{x}}(k_0-1) = [\mathbf{A}] \underline{\mathbf{x}}(k_0-2) + (\mathbf{B}) e(k_0-2) \\ \underline{\mathbf{x}}(k_0) = [\mathbf{A}] \underline{\mathbf{x}}(k_0-1) + (\mathbf{B}) e(k_0-1) \end{cases}$$

soit : 
$$\underline{\mathbf{x}}(k_0) = [\mathbf{A}] \{ [\mathbf{A}] \underline{\mathbf{x}}(k_0-2) + (\mathbf{B}) e(k_0-2) \} + (\mathbf{B}) e(k_0-1)$$

d'où : 
$$\underline{\mathbf{x}}(k_0) = [\mathbf{A}]^2 \underline{\mathbf{x}}(k_0-2) + [\mathbf{A}] (\mathbf{B}) e(k_0-2) + (\mathbf{B}) e(k_0-1)$$

En remplaçant successivement les  $\underline{\mathbf{x}}(i)$ , on obtient :

$$\underline{\mathbf{x}}(k_0) = [\mathbf{A}]^{k_0} \underline{\mathbf{x}}(0) + \sum_{i=0}^{k_0-1} [\mathbf{A}]^{k_0-1-i} (\mathbf{B}) e(i)$$

**Remarque :** l'expression ainsi mise en évidence est tout à fait comparable avec celle que nous avons trouvée en temps continu. La matrice de transition est égale à  $[\mathbf{A}]^{k_0}$  et se calcule donc sans aucune difficulté.

Le principe des itérations successives est très intéressant à utiliser dans le cas où l'on recherche l'évolution de l'état du système pour tout instant sur l'intervalle  $[0, k_0]$ .

### 15.2.2 Exemple

Considérons un système régi par l'équation de commande :

$$\underline{\mathbf{x}}(k+1) = [\mathbf{A}] \underline{\mathbf{x}}(k) + (\mathbf{B}) e(k)$$

avec : 
$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } (\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Formulons l'hypothèse que ce système est sollicité par un échelon unité, soit  $e(k) = 1$  pour tout  $k \geq 0$  et cherchons la suite des 5 premiers échantillons correspondant au deux signaux du vecteur d'état, soit  $x_1(k)$  et  $x_2(k)$ . On suppose que l'état initial est caractérisé par  $\underline{\mathbf{x}}(0) = \underline{\mathbf{0}}$ .

En procédant par itérations successives, on obtient aisément la suite correspondant au vecteur d'état à chaque instant d'échantillonnage.

$$\text{On a ainsi : } \left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{x}}(1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \underline{\mathbf{x}}(2) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \underline{\mathbf{x}}(3) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \underline{\mathbf{x}}(4) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \underline{\mathbf{x}}(5) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -16 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

## 15.3 COMMANDABILITÉ D'UN SYSTÈME À TEMPS DISCRET

La commandabilité des systèmes à temps discret s'étudie exactement de la même manière que pour les systèmes à temps continu.

### 15.3.1 Accessibilité

Un système est dit accessible à l'état  $\underline{\mathbf{x}}(k_0)$  s'il est possible de déterminer une suite d'échantillons d'entrée  $e(k)$  sur l'intervalle  $[0, k_0 - 1]$  de manière à amener le système de l'état  $\underline{\mathbf{x}}(0) = \underline{\mathbf{0}}$  vers l'état  $\underline{\mathbf{x}}(k_0)$ .

Si un système est accessible quel que soit  $\underline{\mathbf{x}}(k_0)$ , il est dit complètement accessible.

*Remarque* : les notions d'accessibilité, de commandabilité et de gouvernabilité sont encore ici, généralement confondues.

### 15.3.2 Critère de commandabilité

Un système est complètement accessible et complètement commandable si et seulement si les vecteurs  $\underline{\mathbf{B}}$ ,  $[\mathbf{A}]\underline{\mathbf{B}}$ ,  $[\mathbf{A}]^2\underline{\mathbf{B}}$ , ...,  $[\mathbf{A}]^{n-1}\underline{\mathbf{B}}$  sont linéairement indépendants.

Cet énoncé peut se traduire également de la manière suivante : on définit la matrice de commandabilité ou de gouvernabilité par la matrice formée des  $n$  vecteurs colonnes  $\underline{\mathbf{B}}$ ,  $[\mathbf{A}]\underline{\mathbf{B}}$ ,  $[\mathbf{A}]^2\underline{\mathbf{B}}$ , ...,  $[\mathbf{A}]^{n-1}\underline{\mathbf{B}}$  :

$$[\mathbf{C}]_{([\mathbf{A}]\underline{\mathbf{B}})} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{B}} & [\mathbf{A}]\underline{\mathbf{B}} & [\mathbf{A}]^2\underline{\mathbf{B}} & \cdots & [\mathbf{A}]^{n-1}\underline{\mathbf{B}} \end{bmatrix}$$

La paire  $[\mathbf{A}], \underline{\mathbf{B}}$  est complètement commandable si et seulement si la matrice de commandabilité est régulière, autrement dit si son déterminant n'est pas nul.

## 15.4 OBSERVABILITÉ DE L'ÉTAT D'UN SYSTÈME

L'observabilité des systèmes à temps discret s'étudie exactement de la même manière que pour ceux à temps continu.

### 15.4.1 Définition

Un système est dit observable à un instant  $k_2 T_e$ , si la connaissance du signal d'entrée et du signal de sortie sur un intervalle de temps  $[k_1 T_e, k_2 T_e]$  permet de calculer l'état du système à l'instant  $k_2 T_e$ .

Si un système est observable quel que soit l'instant  $k_2 T_e$ , il est dit complètement observable.

### 15.4.2 Critère d'observabilité

**Attention** : le critère d'observabilité est légèrement différent pour les systèmes à temps discret.

Un système est complètement observable si et seulement si les vecteurs colonnes  $(\mathbf{C})^T$ ,  $[\mathbf{A}^T](\mathbf{C})^T$ ,  $[\mathbf{A}^T]^2(\mathbf{C})^T$ , ...,  $[\mathbf{A}^T]^{n-1}(\mathbf{C})^T$  sont linéairement indépendants.

Cet énoncé peut se traduire également de la manière suivante : on définit la matrice d'observabilité par la matrice formée des  $n$  vecteurs colonnes  $(\mathbf{C})^T$ ,  $[\mathbf{A}^T](\mathbf{C})^T$ ,  $[\mathbf{A}^T]^2(\mathbf{C})^T$ , ...,  $[\mathbf{A}^T]^{n-1}(\mathbf{C})^T$  :

$$[\mathbf{O}]_{([\mathbf{A}](\mathbf{C}))} = \begin{bmatrix} (\mathbf{C})^T & [\mathbf{A}^T](\mathbf{C})^T & [\mathbf{A}^T]^2(\mathbf{C})^T & \dots & [\mathbf{A}^T]^{n-1}(\mathbf{C})^T \end{bmatrix}$$

La paire  $[\mathbf{A}], (\mathbf{C})$  est complètement observable si et seulement si la matrice d'observabilité est régulière, autrement dit si son déterminant n'est pas nul.

### 15.4.3 Exemple

Considérons un système régi par les équations :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{A}]\mathbf{x}(k) + (\mathbf{B})e(k) \\ s(k) = (\mathbf{C})\mathbf{x}(k) \end{cases}$$

avec :

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } (\mathbf{C}) = (1 \quad -1)$$

La matrice d'observabilité est définie par :

$$[\mathbf{O}]_{([\mathbf{A}](\mathbf{C}))} = \begin{bmatrix} (\mathbf{C})^T & [\mathbf{A}^T](\mathbf{C})^T \end{bmatrix} \text{ avec } (\mathbf{C})^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } [\mathbf{A}^T] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Or :

$$[\mathbf{A}^T](\mathbf{C})^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$[\mathbf{O}]_{([\mathbf{A}](\mathbf{C}))} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det [\mathbf{O}]_{([\mathbf{A}](\mathbf{C}))} = -1$$

Le système est donc complètement observable.

## 15.5 RELATION ENTRE LA REPRÉSENTATION D'ÉTAT ET LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME

### 15.5.1 Représentation d'état à partir de la fonction de transfert

En temps discret comme en temps continu, la représentation d'état d'un système n'est pas unique. Nous présentons ici plusieurs types de représentation d'état que l'on peut obtenir à partir d'une fonction de transfert  $G(z)$ . Les principes de construction étant rigoureusement les mêmes que pour la représentation d'état en temps continu, nous nous limiterons à présenter les résultats essentiels.

#### a) Représentation modale

Ce type de représentation, encore appelée représentation parallèle, convient particulièrement bien à la représentation d'un système possédant plusieurs pôles réels distincts. Soit  $G(z)$  sa fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\alpha_1}{z - p_1} + \frac{\alpha_2}{z - p_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{z - p_n}$$

Cette écriture fait apparaître la somme de  $n$  fonctions de transfert et peut être matérialisée, sous forme de représentation d'état, par le schéma de la figure 15.3 en faisant apparaître  $n$  blocs élémentaires placés en parallèle.

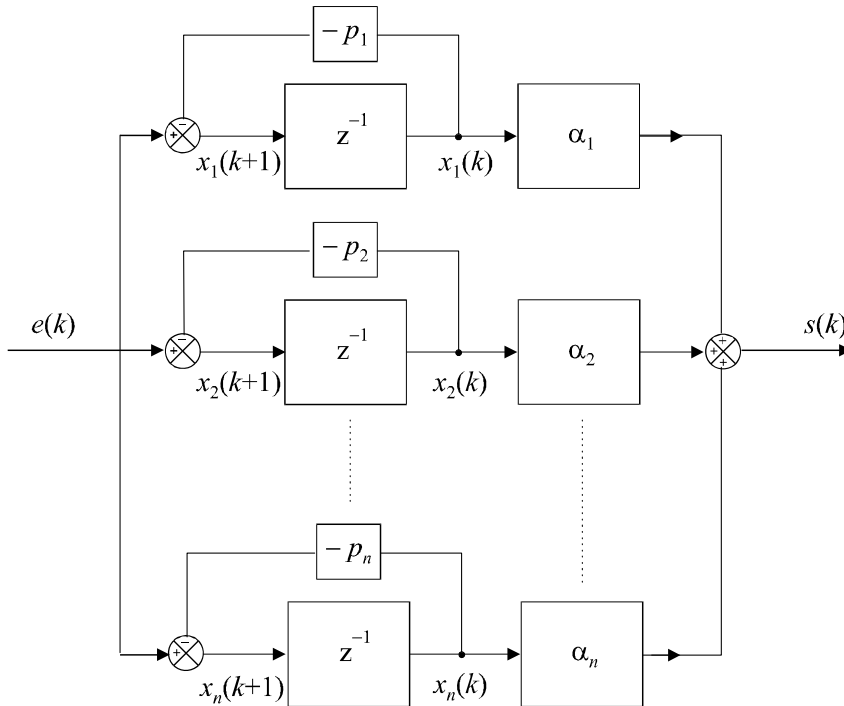


Figure 15.3 Représentation modale d'un système à temps discret.

On lit immédiatement :

$$x_i(k+1) = p_i x_i(k) + e(k)$$

d'où :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{x}}(k+1) = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p_n \end{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} e(k) \\ s(k) = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n) \underline{\mathbf{x}}(k) \end{cases}$$

La matrice de commande [A] est diagonale et ses valeurs propres sont les pôles de la fonction de transfert.

b) Représentation série

soit :

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\alpha}{(z - p_1)(z - p_2) \times \cdots \times (z - p_n)}$$

Cette écriture fait apparaître le produit de  $n$  fonctions de transfert et peut être matérialisée par la mise en cascade de  $n$  blocs élémentaires.

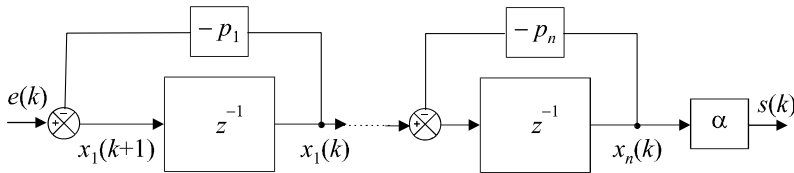


Figure 15.4 Représentation d'état d'un système discret sous forme série.

La figure 15.4 propose une représentation d'état cohérente avec cette forme en cascade de la fonction de transfert.

Dans ce cas, on a :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{x}}(k+1) = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & p_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & p_n \end{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e(k) \\ s(k) = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad \alpha) \underline{\mathbf{x}}(k) \end{cases}$$

c) Représentation compagne commandable

On suppose ici que la fonction de transfert n'est pas factorisée.

Soit :

$$G(z) = \frac{b_m z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-n-1} + \cdots + b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \cdots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}}$$

Nous pouvons immédiatement proposer la représentation de la figure 15.5 par analogie totale avec les résultats obtenus au chapitre 14 pour l'étude de la forme compagne commandable en temps continu. Il suffit en effet de remarquer la similitude complète de cette fonction de transfert en  $z$  avec la fonction  $G(p)$  qui y a été étudiée, en faisant la transformation  $p^{-1} \rightarrow z^{-1}$ .



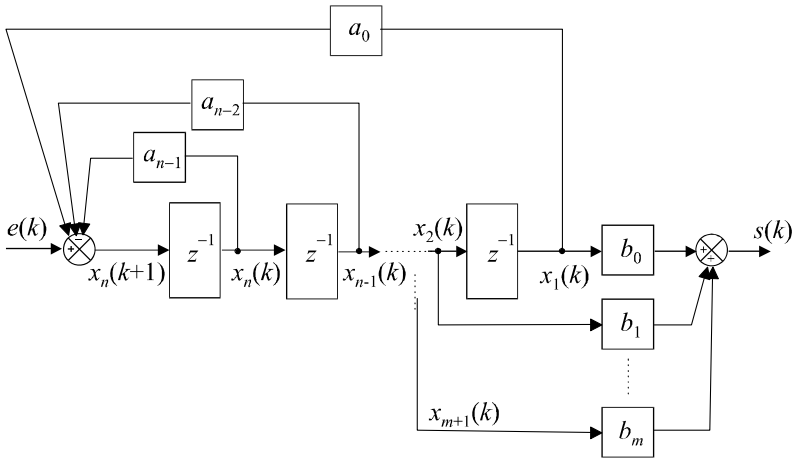


Figure 15.5 Représentation d'état sous forme compagne commandable.

Les équations d'état se déduisent naturellement de cette représentation :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) = x_n(k) \\ x_n(k+1) = -a_0x_1(k) - a_1x_2(k) - \dots - a_{n-1}x_n(k) + e(k) \\ s(k) = b_0x_1(k) + b_1x_2(k) + \dots + a_mx_{m+1}(k) \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{x}}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e(k) \\ s(k) = (b_0 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0) \underline{\mathbf{x}}(k) \end{cases}$$

d) Représentation compagne observable

La représentation compagne observable peut être mise en évidence à partir de la forme de  $G(z)$  déjà transformée dans le paragraphe précédent :

$$G(z) = \frac{b_m z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-n-1} + \dots + b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}}$$

Nous pouvons immédiatement proposer la représentation de la figure 15.6 par analogie totale avec les résultats obtenus au chapitre 14 pour l'étude de la forme compagne observable en temps continu. Il suffit à nouveau de remarquer la similitude complète de cette fonction de transfert en  $z$  avec la fonction  $G(p)$  qui y a été étudiée, en faisant la transformation  $p^{-1} \rightarrow z^{-1}$ .

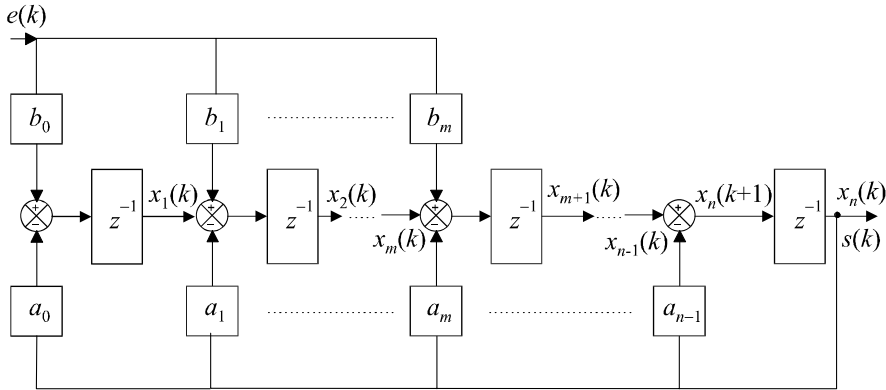


Figure 15.6 Représentation d'état du système sous forme compagne observable.

Les équations d'état se déduisent naturellement de cette représentation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{x}}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}(k) + \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e(k) \\ s(k) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{x}}(k) \end{array} \right.$$

### 15.5.2 Calcul de la fonction de transfert à partir de la représentation d'état

#### a) Transformation en $z$ des équations d'état

Si on applique la transformation en  $z$  aux équations d'état et si on suppose nulles les conditions initiales, on obtient :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{x}}(k+1) = [\mathbf{A}] \underline{\mathbf{x}}(k) + (\mathbf{B}) e(k) \\ s(k) = (\mathbf{C}) \underline{\mathbf{x}}(k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z\underline{\mathbf{X}}(z) = [\mathbf{A}] \underline{\mathbf{X}}(z) + (\mathbf{B}) E(z) \\ S(z) = (\mathbf{C}) \underline{\mathbf{X}}(z) \end{cases}$$

On a donc :

$$\underline{\mathbf{X}}(z) = (z\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1} (\mathbf{B}) E(z)$$

On tire alors l'expression de  $S(p)$  :

$$S(z) = (\mathbf{C}) (z\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1} (\mathbf{B}) E(z)$$

La fonction de transfert du système est donc :

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = (\mathbf{C})(z\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1}(\mathbf{B})$$

L'inverse d'une matrice carrée étant égale à sa matrice adjointe divisée par son déterminant, nous pouvons en déduire que les pôles de la fonction de transfert sont les valeurs de  $z$  qui sont solutions de l'équation :

$$\det(z\mathbf{I} - [\mathbf{A}]) = 0$$

Ce sont donc les valeurs propres de la matrice  $[\mathbf{A}]$ .

**Attention** : tout comme dans la représentation d'état des systèmes à temps continu, la fonction de transfert ainsi obtenue correspond uniquement à la partie observable et commandable du système.

## 15.6 COMMANDE ÉCHANTILLONNÉE D'UN SYSTÈME À TEMPS CONTINU

Tout comme nous l'avons vu dans la quatrième partie de cet ouvrage, la commande à temps discret d'un système à temps continu est une opération très fréquente. La représentation d'état ne change rien à cela. Nous avons alors affaire à des systèmes dont le schéma général correspond à la figure 15.7.

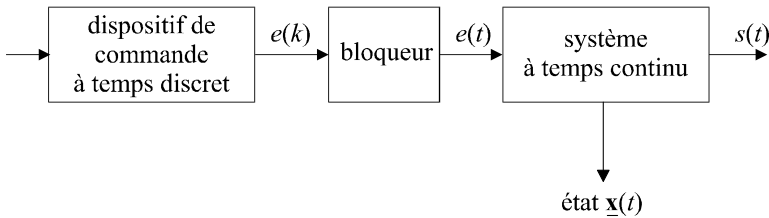


Figure 15.7 Système à temps continu commandé à temps discret.

Le bloqueur (par exemple d'ordre 0), assure au système à temps continu un signal de commande  $e(t)$  constant entre deux instants d'échantillonnage et égal à  $e(kT_e)$  entre les instants  $kT_e$  et  $(k + 1)T_e$ .

### 15.6.1 Comportement du système

Le comportement du système à temps continu est régi par ses équations d'état et son état, à un instant  $t$  quelconque, est déterminé par la relation :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = e^{[\mathbf{A}](t-t_1)} \underline{\mathbf{x}}(t_1) + \int_{t_1}^t e^{[\mathbf{A}](t-\tau)} (\mathbf{B}) e(\tau) d\tau$$

Il est possible, à partir de cette équation, de calculer l'état du système à un instant d'échantillonnage  $(k+1)T_e$  en fonction de son état précédent  $\underline{\mathbf{x}}(kT_e)$  et du signal d'entrée (constant sur cet intervalle)  $e(kT_e)$  :

$$\underline{\mathbf{x}}[(k + 1)T_e] = e^{[\mathbf{A}]T_e} \underline{\mathbf{x}}(kT_e) + \int_{kT_e}^{(k+1)T_e} e^{[\mathbf{A}]\{(k+1)T_e-\tau\}} (\mathbf{B}) e(\tau) d\tau$$

Sur l'intervalle de temps considéré, on a :

$$e(\tau) = C^{te} = e(kT_e).$$

Par conséquent :

$$\underline{\mathbf{x}}[(k+1)T_e] = e^{[\mathbf{A}]T_e} \underline{\mathbf{x}}(kT_e) + \left[ \int_{kT_e}^{(k+1)T_e} e^{[\mathbf{A}]\{(k+1)T_e-\tau\}} d\tau \right] (\underline{\mathbf{B}}) e(kT_e)$$

En posant :

$$f(T_e) = e^{[\mathbf{A}]T_e} \text{ et } g(kT_e) = \int_{kT_e}^{(k+1)T_e} e^{[\mathbf{A}]\{(k+1)T_e-\tau\}} d\tau$$

on a :

$$\underline{\mathbf{x}}[(k+1)T_e] = f(T_e)\underline{\mathbf{x}}(kT_e) + g(kT_e) (\underline{\mathbf{B}}) e(kT_e)$$

Il est également possible de connaître l'état du système entre deux instants d'échantillonnage, par exemple entre  $kT_e$  et  $(k+1)T_e$  à partir de cette équation qui est valable quel que soit l'instant  $t$ . Pour  $kT_e < t < (k+1)T_e$ , on a :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = e^{[\mathbf{A}](t-kT_e)} \underline{\mathbf{x}}(kT_e) + \left[ \int_0^{t-kT_e} e^{[\mathbf{A}]\tau} d\tau \right] (\underline{\mathbf{B}}) e(kT_e)$$

### 15.6.2 Influence de la période d'échantillonnage sur l'observabilité et la commandabilité

Le choix de la période d'échantillonnage est susceptible d'influencer l'observabilité et la commandabilité d'un système. On montre qu'un système à temps discret perd son observabilité et sa commandabilité si il existe deux valeurs propres distinctes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de la matrice  $[\mathbf{A}]$  qui possèdent la même partie réelle et dont la différence des parties imaginaires est un multiple de la pulsation d'échantillonnage  $\omega_e = \frac{2\pi}{T_e}$ .

**Remarque :** il y a donc peu de chance qu'un système à temps continu perde sa commandabilité et son observabilité si on prend soin de ne pas échantillonner à une fréquence multiple d'une de ses fréquences propres.

## EXERCICES

### 15.1 Détermination de l'état d'un système en réponse à un échelon unité

On considère un système régi par l'équation d'état :

$$\underline{\mathbf{x}}(k+1) = [\mathbf{A}] \underline{\mathbf{x}}(k) + (\underline{\mathbf{B}}) e(k) \text{ avec } [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \text{ et } (\underline{\mathbf{B}}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On suppose qu'à l'instant  $t = 0$ , le système se trouve dans l'état  $\underline{\mathbf{x}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Ce système étant soumis à une entrée en échelon unité, déterminer la valeur de son vecteur d'état  $\underline{\mathbf{x}}$  à l'instant  $4T_e$  en utilisant successivement une méthode d'itérations successives et de calcul direct.

---

### 15.2 Forme compagne commandable d'un système invariant d'ordre 2

On considère un système régi par l'équation d'état :

$$\underline{\mathbf{x}}(k+1) = [\mathbf{A}]\underline{\mathbf{x}}(k) + (\mathbf{B})e(k) \text{ avec } [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, (\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } (\mathbf{C}) = (1 \ 0)$$

Calculer la fonction de transfert de ce système. Que remarque-t-on ? Pourquoi ? Peut-on mettre ce système sous forme compagne commandable ?

---

### 15.3 Calcul du signal de commande d'un système d'ordre 2

On souhaite amener le système défini par :

$$\underline{\mathbf{x}}(k+1) = [\mathbf{A}]\underline{\mathbf{x}}(k) + (\mathbf{B})e(k) \text{ avec } [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ et } (\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d'un état initial  $\underline{\mathbf{x}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  à l'état final  $\underline{\mathbf{x}}(2T_e) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Déterminer l'expression du signal  $e(k)$  qui permet d'assurer la commande du système.

---

### 15.4 Représentation d'état observable d'une fonction de transfert d'ordre 2

On considère un système de fonction de transfert  $G(z)$  avec :

$$G(p) = \frac{Kz^{-2}}{1 + 2z^{-1} + 4z^{-2}}$$

Proposer une représentation d'état de ce système sous forme compagne observable.

---

### 15.5 Représentation d'état commandable d'une fonction de transfert d'ordre 2

On considère à nouveau le système de fonction de transfert  $G(p)$  défini dans l'exercice 15.4. Proposer cette fois ci une représentation d'état de ce système sous forme compagne commandable.

---

### 15.6 Représentation d'état observable d'un système d'ordre 3

On considère un système de fonction de transfert  $G(p)$  avec :

$$G(z) = \frac{z^{-2} + z^{-3}}{1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + z^{-3}}$$

Proposer une représentation d'état de ce système sous forme compagne observable.

## SOLUTIONS

15.1 Par le calcul direct, on a :

$$\underline{\mathbf{x}}(k_0) = [\mathbf{A}]^{k_0} \underline{\mathbf{x}}(0) + \sum_{i=0}^{k_0-1} [\mathbf{A}]^{k_0-1-i} (\mathbf{B}) e(i)$$

soit : 
$$\underline{\mathbf{x}}(4) = [\mathbf{A}]^3 (\mathbf{B}) e(0) + [\mathbf{A}]^2 (\mathbf{B}) e(1) + [\mathbf{A}]^1 (\mathbf{B}) e(2) + [\mathbf{A}]^0 (\mathbf{B}) e(3)$$

Comme  $e(i) = 1, \forall i$  :

$$\underline{\mathbf{x}}(4) = \left\{ [\mathbf{A}]^3 + [\mathbf{A}]^2 + [\mathbf{A}]^1 + \mathbf{I} \right\} (\mathbf{B})$$

Or :

$$[\mathbf{A}]^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$$

et :

$$[\mathbf{A}]^3 = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 3 \\ -12 & 12 \end{bmatrix}$$

d'où :

$$\underline{\mathbf{x}}(4) = \left\{ \begin{bmatrix} 15 & 3 \\ -12 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} (\mathbf{B})$$

soit :

$$\underline{\mathbf{x}}(4) = \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -4 & 11 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -15 \end{pmatrix}$$

En utilisant une méthode d'itérations successives, on a :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{x}}(1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \underline{\mathbf{x}}(2) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \underline{\mathbf{x}}(3) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix} \\ \underline{\mathbf{x}}(4) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -15 \end{pmatrix} \end{cases}$$

15.2 La fonction de transfert est obtenue facilement en appliquant la relation :

$$G(z) = (\mathbf{C})(z\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1} (\mathbf{B})$$

On a :

$$(z\mathbf{I} - [\mathbf{A}]) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z-1 & -2 \\ -2 & z-1 \end{bmatrix}$$

d'où :

$$(z\mathbf{I} - [\mathbf{A}])^{-1} = \frac{1}{(z-1)^2 - 4} \begin{bmatrix} z-1 & 2 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(z+1)(z-3)} \begin{bmatrix} z-1 & 2 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix}$$

On tire donc :

$$G(z) = \frac{1}{(z+1)(z-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z-1 & 2 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soit :

$$G(z) = \frac{z+1}{(z+1)(z-3)} = \frac{1}{z-3}$$

Il est surprenant de trouver ici une fonction de transfert du premier ordre. Nous nous attendions en effet à obtenir un dénominateur du second ordre avec pour pôles, les deux valeurs propres de la matrice de commande, soit 3 et  $-1$ . Cette forme doit nous laisser penser que le système n'est pas complètement commandable et qu'elle ne correspond qu'à sa partie commandable. Il est donc illusoire de vouloir placer ce système sous forme compagne commandable.

**15.3** Vérifions tout d'abord que la paire  $[\mathbf{A}]$ ,  $(\mathbf{B})$  est complètement commandable. La matrice de commandabilité est formée de deux vecteurs :

$$[\mathbf{C}]_{([\mathbf{A}](\mathbf{B}))} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}(\mathbf{B})]$$

Or :

$$[\mathbf{A}](\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$[\mathbf{C}]_{([\mathbf{A}](\mathbf{B}))} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \text{ et : } \det[\mathbf{C}]_{([\mathbf{A}](\mathbf{B}))} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -2$$

Le système est donc complètement commandable.

Comme on souhaite amener le système d'un état initial à un état final au bout d'un temps  $2T_e$ , nous avons besoin d'identifier les deux échantillons d'entrée  $e(0)$  et  $e(1)$  qui constitueront effectivement le signal de commande et qui doivent vérifier :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e(0) \\ \mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(1) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e(0) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\begin{cases} -e(0) + e(1) = 2 \\ -4e(0) + 2e(1) = 1 \end{cases}$$

On en déduit donc :

$$e(0) = \frac{3}{2} \text{ et } e(1) = \frac{7}{2}$$

**15.4** On peut appliquer directement les résultats du cours pour obtenir la représentation compagne observable présentée sur la figure 15.8.

On en déduit immédiatement :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} e(k) \\ s(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

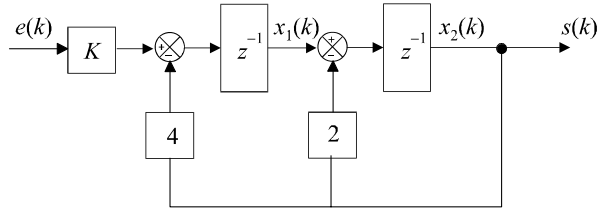


Figure 15.8 Représentation d'état du système sous forme compagne observable.

15.5 On peut appliquer directement les résultats du cours pour obtenir la représentation compagne observable présentée sur la figure 15.9.

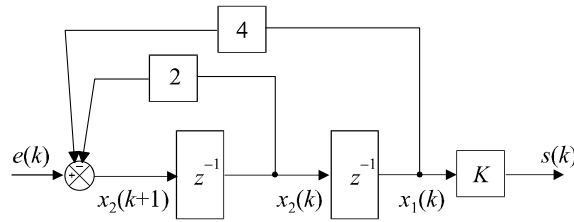


Figure 15.9 Représentation d'état sous forme compagne commandable.

On en déduit immédiatement :

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e(k) \\ s(k) = \begin{pmatrix} K & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(k) \end{cases}$$

15.6 On peut appliquer directement les résultats du cours pour obtenir la représentation compagne observable présentée sur la figure 15.10.

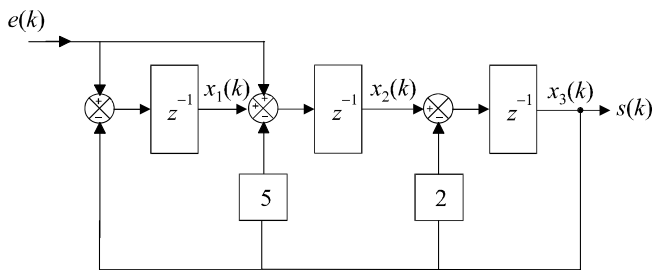


Figure 15.10 Représentation d'état du système sous forme compagne observable.

Les équations d'état se déduisent naturellement de cette représentation :

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e(k) \\ s(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}(k) \end{cases}$$



## Chapitre 16

# Commande par retour d'état Estimateurs, observateurs et prédicteurs

### 16.1 PRINCIPE GÉNÉRAL DE LA COMMANDE PAR RETOUR D'ÉTAT

La commande par retour d'état est à la commande des systèmes modélisés par leur représentation d'état, ce que la boucle fermée est aux systèmes représentés par une fonction de transfert. L'idée consiste toujours à piloter le système par un signal de consigne et à générer automatiquement le signal de commande en confrontant en permanence la valeur de la consigne et le comportement réel du système. L'écart entre consigne et comportement réel sert de base au signal de commande du système. Dans la commande par retour d'état, nous n'allons pas mesurer le signal de sortie pour le boucler sur l'entrée, mais nous allons nous servir du vecteur d'état complet pour prendre connaissance du comportement du système. La figure 16.1 présente une représentation schématique de ce concept.

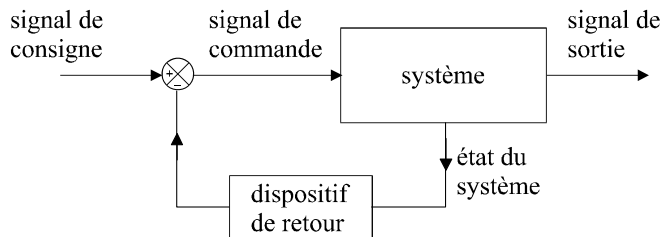


Figure 16.1 Principe du retour d'état.

#### 16.1.1 Vecteur de gain

Le vecteur d'état étant supposé connu, le signal de commande du système (autrement dit l'écart) doit être construit en soustrayant au signal de consigne un signal qui dépend du vecteur d'état. Ce vecteur d'état étant composé de  $n$  signaux  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_n(t)$ , on le multiplie par un vecteur ligne ( $\mathbf{k}$ ) appelé vecteur de gain pour pouvoir effectuer cette soustraction.

On a alors :

$$\mathbf{k} = (k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n)$$

et :

$$\varepsilon(t) = e(t) - \mathbf{(k)} \mathbf{(x)} = e(t) - \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

soit :

$$\varepsilon(t) = e(t) - k_1 x_1 - k_2 x_2 - \dots - k_n x_n$$

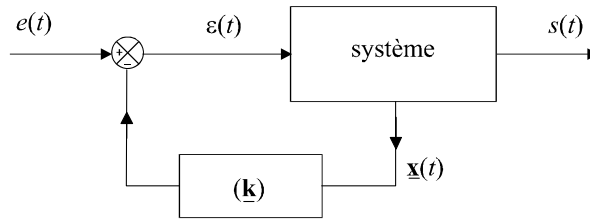


Figure 16.2 Bouclage du système par un vecteur de gain.

### 16.1.2 Fonction de transfert en boucle fermée

On peut calculer la fonction de transfert en boucle fermée du système à partir de la représentation d'état. Supposons que le système, en boucle ouverte, soit régi par les équations d'état suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{[A]} \mathbf{x}(t) + \mathbf{(B)} \varepsilon(t) \\ s(t) = \mathbf{(C)} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

On a alors :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{[A]} \mathbf{x}(t) + \mathbf{(B)} \{e(t) - \mathbf{(k)} \mathbf{x}(t)\}$$

soit :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \{\mathbf{[A]} - \mathbf{(B)} \mathbf{(k)}\} \mathbf{x}(t) + \mathbf{(B)} e(t)$$

Appliquons la transformée de Laplace aux équations d'état :

$$\begin{cases} p\mathbf{X}(p) = \{\mathbf{[A]} - \mathbf{(B)} \mathbf{(k)}\} \mathbf{X}(p) + \mathbf{(B)} E(p) \\ S(p) = \mathbf{(C)} \mathbf{X}(p) \end{cases}$$

On tire :

$$\{p\mathbf{I} - \mathbf{[A]} + \mathbf{(B)} \mathbf{(k)}\} \mathbf{X}(p) = \mathbf{(B)} E(p)$$

soit :

$$\mathbf{X}(p) = \{p\mathbf{I} - \mathbf{[A]} + \mathbf{(B)} \mathbf{(k)}\}^{-1} \mathbf{(B)} E(p)$$

d'où :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \mathbf{(C)} \{p\mathbf{I} - \mathbf{[A]} + \mathbf{(B)} \mathbf{(k)}\}^{-1} \mathbf{(B)}$$

### 16.1.3 Détermination du vecteur d'état

La commande par retour d'état suppose que l'on connaisse parfaitement le système, mais surtout, que l'on puisse accéder au vecteur d'état. Trois cas peuvent se présenter :

- tous les signaux internes composant le vecteur d'état sont accessibles à la mesure ; dans ce cas, les variables d'état sont mesurables et des capteurs judicieusement placés permettent d'accéder aux informations nécessaires au retour d'état ;
- toutes les variables d'état ne sont pas mesurables mais le système est complètement observable ; il est alors possible de reconstruire le vecteur d'état à un instant donné à partir de la connaissance du signal de sortie et du signal d'entrée du système sur un intervalle de temps précédent ; on utilise pour ce faire, un observateur d'état ;
- le système n'est pas complètement observable ; il est alors nécessaire d'estimer le vecteur d'état au moyen d'un estimateur d'état.

*Remarque :* Il arrive souvent que, par abus de langage, on confonde les notions d'observateur et d'estimateur. Cette confusion ne porte pas à conséquence, l'important étant de disposer d'un moyen de reconstruire le vecteur d'état à chaque instant pour assurer la commande par retour d'état.

## 16.2 COMMANDABILITÉ EN MODES EN TEMPS CONTINU

### 16.2.1 Définition

Nous supposons ici que le vecteur d'état est connu. L'expression de la fonction de transfert en boucle fermée nous permet d'effectuer un calcul de ses pôles.

$$\text{En effet :} \quad \{p\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + (\mathbf{B})(\mathbf{k})\}^{-1} = \frac{\text{adj}\{p\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + (\mathbf{B})(\mathbf{k})\}}{\det\{p\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + (\mathbf{B})(\mathbf{k})\}}$$

$$\text{d'où :} \quad H(p) = (\mathbf{C}) \frac{\text{adj}\{p\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + (\mathbf{B})(\mathbf{k})\}}{\det\{p\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + (\mathbf{B})(\mathbf{k})\}} (\mathbf{B})$$

*Remarque :* Rappelons simplement que l'inverse d'une matrice carrée  $[\mathbf{M}]$ , si elle existe, est égale à sa matrice adjointe (matrice des cofacteurs transposée) divisée par son déterminant.

Les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée sont donc les racines de l'équation caractéristique  $\det\{p\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + (\mathbf{B})(\mathbf{k})\} = 0$ , c'est-à-dire les valeurs propres de la matrice  $[\mathbf{A}] - (\mathbf{B})(\mathbf{k})$ . La possibilité de choisir le vecteur de gain  $(\mathbf{k})$  de manière à positionner ces pôles sur des valeurs voulues, donc de conférer au système en boucle fermée les performances que l'on souhaite lui assigner, s'appelle la commandabilité en modes du système.

### 16.2.2 Critère de commandabilité en modes

Un système est commandable en modes en boucle fermée s'il est complètement commandable en boucle ouverte.

Pour savoir s'il est possible d'assurer la commandabilité en modes du système en boucle fermée, il suffira donc de calculer la matrice de commandabilité :

$$[\mathbf{C}]_{([\mathbf{A}])(\mathbf{B})} = \begin{bmatrix} (\mathbf{B}) & [\mathbf{A}](\mathbf{B}) & [\mathbf{A}]^2(\mathbf{B}) & \cdots & [\mathbf{A}]^{n-1}(\mathbf{B}) \end{bmatrix}$$

et de vérifier si elle est de rang  $n$  autrement dit si son déterminant est non nul.

### 16.2.3 Cas des systèmes non commandables

Dans le cas où le système n'est pas complètement commandable, nous avons vu, au chapitre 14, que les équations d'état pouvaient se mettre, grâce à un changement de base approprié, sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}(t) = [\tilde{\mathbf{A}}] \tilde{\mathbf{x}}(t) + (\tilde{\mathbf{B}}) e(t) \\ s(t) = (\tilde{\mathbf{C}}) \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

avec :

$$[\tilde{\mathbf{A}}] = \begin{bmatrix} \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{11}} & \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{12}} \\ \boxed{0} & \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{22}} \end{bmatrix} \text{ et } (\tilde{\mathbf{B}}) = \begin{pmatrix} \boxed{\tilde{\mathbf{B}}_1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}$$

le sous système défini par la paire  $[\tilde{\mathbf{A}}_{11}]$ ,  $(\tilde{\mathbf{B}}_1)$  étant complètement commandable.

Le système de  $n$  équations :  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = [\tilde{\mathbf{A}}] \tilde{\mathbf{x}}(t) + (\tilde{\mathbf{B}}) \{e(t) - (\tilde{\mathbf{k}}) \tilde{\mathbf{x}}(t)\}$

devient alors :

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{11}} & \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{12}} \\ \boxed{0} & \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{22}} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \begin{pmatrix} \boxed{\tilde{\mathbf{B}}_1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} \{e(t) - (\tilde{\mathbf{k}}) \tilde{\mathbf{x}}(t)\}$$

Scindons les vecteurs  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  et  $(\tilde{\mathbf{k}})$  en deux sous-vecteurs.

On a :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{11}} & \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{12}} \\ \boxed{0} & \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{22}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{\tilde{\mathbf{B}}_1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} \left\{ e(t) - \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{k}}_1 & \tilde{\mathbf{k}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix} \right\}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{11} - \tilde{\mathbf{B}}_1 \tilde{\mathbf{k}}_1} & \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{12} - \tilde{\mathbf{B}}_1 \tilde{\mathbf{k}}_2} \\ \boxed{0} & \boxed{\tilde{\mathbf{A}}_{22}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{\tilde{\mathbf{B}}_1} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} e(t)$$

Cette expression apporte la preuve que le vecteur de gain ne peut agir que sur la partie complètement commandable du système. En revanche, les modes non commandables du système ne seront pas affectés.

De cette propriété découle un résultat fondamental concernant la stabilité en boucle fermée des systèmes non complètement commandables :

Un système non complètement commandable est stable en boucle fermée si et seulement si les modes non commandables sont stables, autrement dit si les valeurs propres qui correspondent à ces modes sont à parties réelles négatives (*i.e.* si les pôles correspondant sont à parties réelles négatives).

**Remarque :** Le problème ne se pose pas si le système est complètement commandable puisque, dans ce cas, on peut placer les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée sur n'importe quelle valeur choisie.

### 16.2.4 Exemple de placement des pôles pour un système commandable

Considérons le système défini par :  $[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$  et  $(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

Ce système, que nous avons étudié au chapitre 14, est complètement commandable. On souhaite placer ce système dans une boucle à retour d'état avec un vecteur de gain  $(\mathbf{k}) = (k_1 \quad k_2)$ , de manière à obtenir une marge de phase égale à  $60^\circ$  et un temps de montée de 3 s. Ces deux performances correspondent à une fonction de transfert du second ordre caractérisée par un facteur d'amortissement  $\xi = 0,6$  et une pulsation propre  $\omega_n = 1$  rad/s, autrement dit possédant un dénominateur  $D(p)$  tel que :

$$D(p) = \frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1 = p^2 + 1,2p + 1$$

Il ne nous reste plus alors qu'à identifier le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée avec  $D(p)$  pour déterminer le vecteur de gain :

$$\det \{p\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + (\mathbf{B})(\mathbf{k})\} = p^2 + 1,2p + 1$$

soit :

$$\begin{vmatrix} p + 2 + k_1 & 2 + k_1 \\ 1 - 2k_2 & p + 3 - 2k_2 \end{vmatrix} = p^2 + 1,2p + 1$$

$$(p + 2 + k_1)(p + 3 - 2k_2) - (1 - 2k_2)(2 + k_1) = p^2 + 1,2p + 1$$

d'où :

$$p^2 + (5 + k_1 - 2k_2)p + (4 + k_1) = p^2 + 1,2p + 1$$

On a donc :

$$\begin{cases} 4 + k_1 = 1 \\ 5 + k_1 - 2k_2 = 1,2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -3 \\ k_2 = 0,4 \end{cases}$$

Le vecteur de gain qui assure au système les performances voulues en boucle fermée est donc :

$$(\mathbf{k}) = (-3 \quad 0,4)$$

### 16.2.5 Exemple pour un système non commandable

Considérons le système défini par :  $[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$  et  $(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

La matrice de commandabilité est formée de deux vecteurs :

$$[\mathbf{C}]_{([\mathbf{A}])(\mathbf{B})} = [(\mathbf{B}) \quad [\mathbf{A}](\mathbf{B})]$$

Or :

$$[\mathbf{A}](\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$[\mathbf{C}]_{([\mathbf{A}])(\mathbf{B})} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det [\mathbf{C}]_{([\mathbf{A}])(\mathbf{B})} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Cette matrice est de rang 1, étant donné que son déterminant est nul. Le système n'est donc pas commandable. En revanche, il est possible d'effectuer un changement de base de manière à mettre en évidence un sous-système commandable. Pour un système d'ordre 2, il suffit de diagonaliser la matrice de commande pour faire apparaître cette forme. Calculons alors les valeurs propres du système :

$$\det [\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}] = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$

soit : 
$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ et } \lambda_2 = 2$$

Calculons le premier vecteur propre :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow y = x, \text{ soit : } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le second vecteur propre se calcule tout aussi facilement :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow y = 2x, \text{ soit } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On a donc : 
$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } [\mathbf{T}]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La forme recherchée est donc :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}(t) = [\tilde{\mathbf{A}}] \tilde{\mathbf{x}}(t) + (\tilde{\mathbf{B}}) e(t) \\ s(t) = (\tilde{\mathbf{C}}) \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

avec : 
$$[\tilde{\mathbf{A}}] = [\mathbf{T}][\mathbf{A}][\mathbf{T}]^{-1} \text{ et } (\tilde{\mathbf{B}}) = [\mathbf{T}]^{-1} (\mathbf{B})$$

soit : 
$$[\tilde{\mathbf{A}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } (\tilde{\mathbf{B}}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous constatons effectivement que seul le premier mode  $e^t$  est commandable. Le second ne peut pas l'être et, comme ce mode est instable, il ne sera pas possible d'assurer la stabilité du système en boucle fermée à l'aide du retour d'état au travers d'un vecteur de gain quel qu'il soit.

## 16.3 COMMANDABILITÉ EN TEMPS DISCRET : RÉPONSE PILE

### 16.3.1 Problématique

Considérons un système à temps discret défini par ses équations d'état :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{A}] \mathbf{x}(k) + (\mathbf{B}) e(k) \\ s(k) = (\mathbf{C}) \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

Le problème de la réponse pile, en temps discret, consiste à déterminer un vecteur de gain qui assure, en un temps fini, la convergence de l'état du système vers l'état  $\mathbf{0}$  à partir d'un état initial  $\mathbf{x}(0)$ . On suppose pour ce faire que le signal de consigne est nul, autrement dit que le système est autonome, soit  $e(k) = 0$  pour tout  $k$ . Soit  $nT_e$  l'instant à partir duquel la réponse du système est censée être nulle.

Il s'agit, en fait, de rechercher la suite  $\varepsilon(k)$  pour  $0 \leq k < n$  qui amène le système à  $\mathbf{0}$  en  $n$  échantillons.

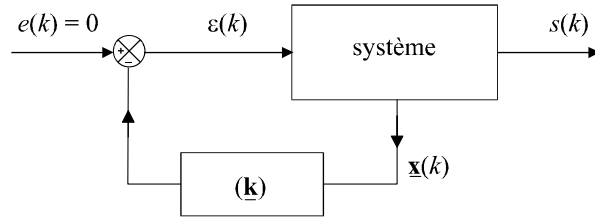


Figure 16.3 Commande par retour d'état d'un système à temps discret.

### 16.3.2 Résolution du problème

Appliquons l'équation d'état à chaque instant entre les instants 1 et  $n$  :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{x}}(1) = [\mathbf{A}] \underline{\mathbf{x}}(0) + [\mathbf{B}] \varepsilon(0) \\ \underline{\mathbf{x}}(2) = [\mathbf{A}] \underline{\mathbf{x}}(1) + [\mathbf{B}] \varepsilon(1) \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{x}}(n) = [\mathbf{A}] \underline{\mathbf{x}}(n-1) + [\mathbf{B}] \varepsilon(n-1) \end{cases}$$

En combinant ces équations, on obtient :

$$[\mathbf{A}]^{-n} \underline{\mathbf{x}}(n) = \underline{\mathbf{x}}(0) + \begin{bmatrix} [\mathbf{A}]^{-1} [\mathbf{B}] & [\mathbf{A}]^{-2} [\mathbf{B}] & \dots & [\mathbf{A}]^{-n} [\mathbf{B}] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon(0) \\ \vdots \\ \varepsilon(n-1) \end{pmatrix}$$

Si le système est commandable, la matrice  $\begin{bmatrix} [\mathbf{A}]^{-1} [\mathbf{B}] & \dots & [\mathbf{A}]^{-n} [\mathbf{B}] \end{bmatrix}$  est inversible. Par ailleurs, nous souhaitons obtenir  $\underline{\mathbf{x}}(n) = \mathbf{0}$ . On peut donc écrire :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon(0) \\ \vdots \\ \varepsilon(n-1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}]^{-1} [\mathbf{B}] & [\mathbf{A}]^{-2} [\mathbf{B}] & \dots & [\mathbf{A}]^{-n} [\mathbf{B}] \end{bmatrix}^{-1} \{-\underline{\mathbf{x}}(0)\}$$

Cette équation nous donne la suite d'échantillons qui doit être introduite à l'entrée du système pour apporter la solution au problème posé à savoir la convergence du système vers l'état  $\mathbf{0}$ . Or, si cette équation est valable pour l'instant  $k = 0$ , elle doit l'être pour tous les instants d'échantillonnage ultérieurs. On a donc, quel que soit  $k > 0$  :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon(k) \\ \vdots \\ \varepsilon(k+n-1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}]^{-1} [\mathbf{B}] & [\mathbf{A}]^{-2} [\mathbf{B}] & \dots & [\mathbf{A}]^{-n} [\mathbf{B}] \end{bmatrix}^{-1} \{-\underline{\mathbf{x}}(k)\}$$

Dans cette nouvelle équation vectorielle, appelons  $(\underline{\mathbf{g}}_1)$  le vecteur ligne correspondant à la première ligne de la matrice.

On a donc :

$$\varepsilon(k) = - \left( \underline{\mathbf{g}}_1 \right) \underline{\mathbf{x}}(k)$$

Un rapide coup d'œil sur le schéma de la figure 16.3 nous montre que le vecteur de gain qu'il nous faut choisir n'est autre que ce vecteur ligne  $\left( \underline{\mathbf{g}}_1 \right)$  correspondant à la première ligne de l'inverse de la matrice :

$$\left[ [\mathbf{A}]^{-1} (\mathbf{B}) \quad \dots \quad [\mathbf{A}]^{-n} (\mathbf{B}) \right]$$

## 16.4 OBSERVATEURS ET ESTIMATEURS D'ÉTAT

L'étude que nous venons de mener supposait connu l'état du système pour pouvoir effectuer le retour d'état. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour reconstruire l'état du système.

### 16.4.1 Observateur asymptotique en temps continu

#### a) Principe général

Rappelons tout d'abord que le principe de base de l'observabilité d'un système consiste à proposer la reconstruction du vecteur d'état à partir de la connaissance des signaux d'entrée et de sortie du système sur un intervalle de temps donné.

Considérons le système quelconque présenté sur la figure 16.4 et régi par les équations d'états :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}] \underline{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{B}) \varepsilon(t) \\ s(t) = (\mathbf{C}) \underline{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

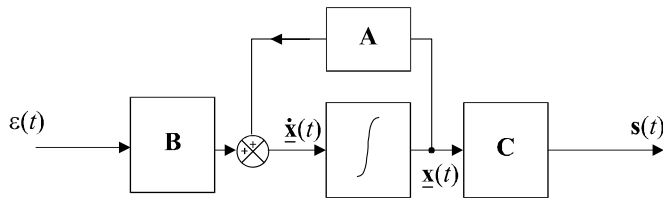


Figure 16.4 Représentation schématique d'une modélisation d'état.

Si le système est parfaitement connu, une première idée consiste à « dupliquer » le système, ou tout du moins, la représentation théorique de son équation de commande. On obtient alors, par calcul, un vecteur  $\hat{\underline{\mathbf{x}}}(t)$  appelé estimation de l'état (figure 16.5).

Rien n'assure, toutefois, que le vecteur d'état estimé corresponde exactement à l'état réel du système : les approximations de modélisation ou les perturbations auxquelles est soumis le système sont autant de raisons qui peuvent générer ce qu'on appelle des erreurs d'estimation. Il n'est donc pas acceptable de laisser le dispositif en l'état. Pour parfaire l'estimation, on recalcule, à partir de  $\hat{\underline{\mathbf{x}}}(t)$ , une « sortie estimée »  $\hat{s}(t)$  que l'on va soustraire de la sortie réelle mesurée pour obtenir un signal d'erreur d'estimation en sortie. Après multiplication de ce signal d'erreur par un vecteur colonne  $(\underline{\mathbf{v}})$ , on réinjecte cette erreur à l'entrée dans le calcul de  $\hat{\underline{\mathbf{x}}}(t)$  (figure 16.6).



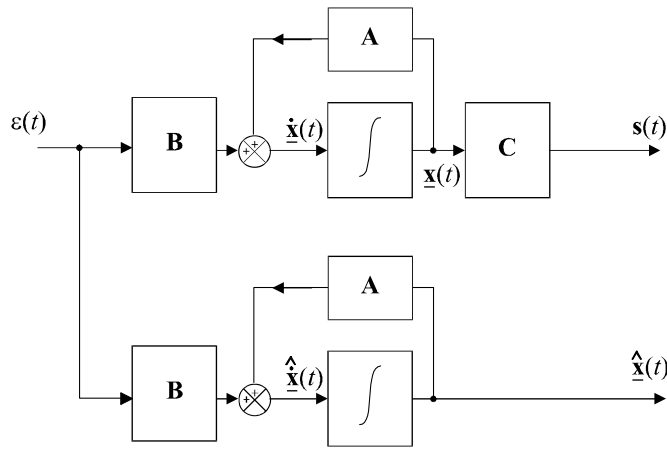


Figure 16.5 Construction d'une estimation de l'état du système.

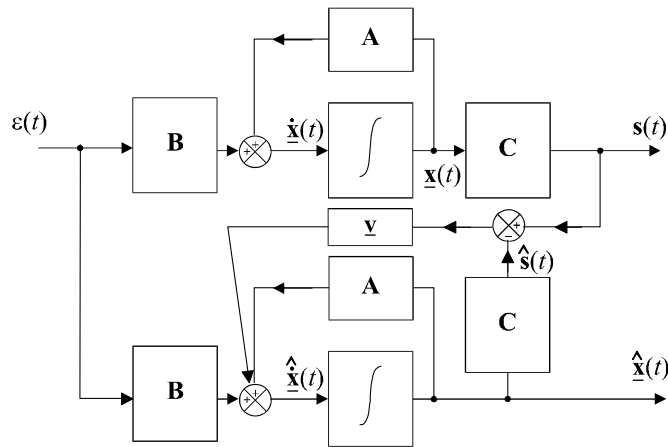


Figure 16.6 Schéma de principe de l'observateur asymptotique.

**Remarque :** On notera que le schéma proposé fait clairement apparaître que l'état est estimé à partir de la connaissance du système, de son signal d'entrée et de son signal de sortie, ce qui est conforme à notre attente, en particulier, à la définition de la notion d'observabilité.

On définit l'erreur d'estimation ( $\underline{\delta}$ ) par la différence entre l'état estimé et l'état réel du système :

$$\underline{\delta}(t) = \underline{\hat{x}}(t) - \underline{x}(t)$$

L'objectif consiste à faire converger ce vecteur vers un vecteur constant le plus faible possible (idéalement  $\underline{0}$ ) et ce, le plus rapidement possible. La vitesse de convergence de cette erreur d'estimation vers une valeur finie est appelée vitesse d'observation.

b) Mise en équation

La figure 16.6 nous conduit rapidement à l'équation suivante :

$$\underline{\hat{x}}(t) = [\mathbf{A}] \underline{\hat{x}}(t) + (\mathbf{v}) [s(t) - (\mathbf{C}) \underline{\hat{x}}(t)] + (\mathbf{B}) \varepsilon(t)$$

$$\text{soit :} \quad \hat{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}] - (\mathbf{v})(\mathbf{C}) \hat{\underline{\mathbf{x}}}(t) + (\mathbf{v})s(t) + (\mathbf{B})\varepsilon(t)$$

$$\text{Or :} \quad \begin{cases} \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}]\underline{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{B})\varepsilon(t) \\ s(t) = (\mathbf{C})\underline{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

$$\text{d'où :} \quad \hat{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}] - (\mathbf{v})(\mathbf{C}) \hat{\underline{\mathbf{x}}}(t) + (\mathbf{v})(\mathbf{C})\underline{\mathbf{x}}(t) + \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) - [\mathbf{A}]\underline{\mathbf{x}}(t)$$

$$\hat{\underline{\mathbf{x}}}(t) - \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}] - (\mathbf{v})(\mathbf{C}) \{\hat{\underline{\mathbf{x}}}(t) - \underline{\mathbf{x}}(t)\}$$

$$\text{On a donc :} \quad \underline{\hat{\delta}}(t) = [\mathbf{A}] - (\mathbf{v})(\mathbf{C}) \underline{\hat{\delta}}(t)$$

Cette équation permet d'étudier la convergence de  $\underline{\hat{\delta}}(t)$  : nous sommes en effet ramenés à un problème d'étude de la dynamique du système régi par cette équation. Nous pouvons, par une méthode de placement des pôles, déterminer la rapidité de convergence de  $\underline{\hat{\delta}}(t)$  en choisissant correctement le vecteur  $(\mathbf{v})$ .

**Remarque :** On confère en général à l'observateur une rapidité nettement plus importante que la rapidité du système observé, même si cela peut, dans certains cas, poser des problèmes d'immunité aux bruits de hautes fréquences. On choisit alors des temps de montée, pour l'observateur, entre 3 et 10 fois plus faibles que le temps de montée du système.

### c) Exemple

Considérons un système quelconque en supposant que la représentation est donnée sous une forme observable (dont on comprendra ici tout l'intérêt) :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}]\underline{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{B})\varepsilon(t) \\ s(t) = (\mathbf{C})\underline{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad \text{avec } [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{et } (\mathbf{C}) = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Les pôles de la fonction de transfert qui détermine la dynamique de l'estimation se calculent immédiatement en fonction des composantes du vecteur  $(\mathbf{v})$  :

$$[\mathbf{A}] - (\mathbf{v})(\mathbf{C}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} (0 \quad 0 \quad 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 - v_1 \\ 1 & 0 & -3 - v_2 \\ 0 & 1 & -2 - v_3 \end{bmatrix}$$

Ces pôles sont respectivement  $-1 - v_1$ ,  $-3 - v_2$  et  $-2 - v_3$  que nous pouvons, en choisissant  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$ , placer absolument où on le souhaite en fonction d'un cahier des charges donné.

## 16.4.2 Prédicteur en temps discret

### a) Principe général

Le principe général est tout à fait similaire à ce qui a été présenté pour le temps continu. La figure 16.7 présente le schéma fonctionnel de ce qu'on appelle un prédicteur d'état d'ordre  $n$ . On utilise ici le terme de prédicteur car l'objectif consiste à estimer l'état  $\underline{\mathbf{x}}(n+1)$  à partir de la connaissance des signaux d'entrée et de sortie à l'instant précédent  $n$ .

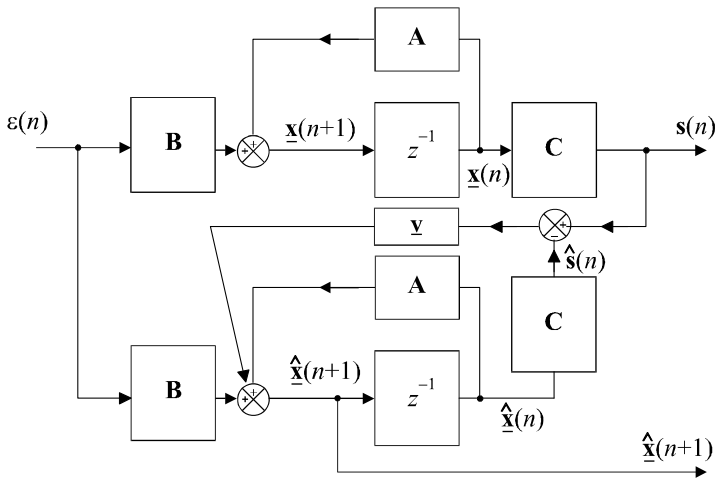


Figure 16.7 Schéma de principe du prédictor d'état en temps discret.

b) Mise en équation

La mise en équation est analogue à ce qui a été fait pour l'observateur asymptotique en temps continu :

$$\hat{\underline{x}}(n+1) - \underline{x}(n+1) = [[\mathbf{A}] - (\mathbf{v})(\mathbf{C})] \{ \hat{\underline{x}}(n) - \underline{x}(n) \}$$

En définissant l'erreur de prédiction sur l'instant  $n + 1$  par :

$$\underline{\hat{\delta}}(n+1) = \hat{\underline{x}}(n+1) - \underline{x}(n+1)$$

on a :

$$\underline{\hat{\delta}}(n+1) = [[\mathbf{A}] - (\mathbf{v})(\mathbf{C})] \underline{\hat{\delta}}(n)$$

Les méthodes exposées pour définir et étudier les conditions de convergence de l'estimation en temps continu restent donc valables pour étudier la dynamique de la prédiction en temps discret.

## EXERCICES

### 16.1 Prévisions des performances dynamiques d'un système complètement commandable d'ordre 2 commandé par retour d'état

On considère un système régi par l'équation d'état :

$$\dot{\underline{x}}(t) = [\mathbf{A}] \underline{x}(t) + (\mathbf{B}) e(t) \quad \text{avec} \quad [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad (\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que ce système est commandable en modes et déterminer les performances dynamiques du système (temps de montée et dépassement), dans le cas d'une commande par retour d'état avec un vecteur de gain  $(\mathbf{k}) = (-55 \quad -168)$  et un signal de consigne en échelon unité.

### 16.2 Commande par retour d'état avec cahier des charges de performances en boucle fermée

On considère un système régi par l'équation d'état :

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}] \underline{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{B}) e(t) \text{ avec } [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} \text{ et } (\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Étudier la commandabilité en modes de ce système et calculer le vecteur de gain ( $\mathbf{k}$ ) à introduire dans une boucle de retour d'état pour que le système, en boucle fermée et soumis à un échelon unitaire de consigne, soit caractérisé par une marge de phase de  $45^\circ$  et par un temps de montée  $t_m = 0,4$  s.

### 16.3 Commande par retour d'état d'un système non commandable

On considère un système régi par l'équation d'état :

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}] \underline{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{B}) e(t) \text{ avec } [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } (\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que ce système n'est pas commandable. Déterminer l'expression du mode non commandable de ce système et étudier la possibilité de commander ce système par un retour d'état.

### 16.4 Réponse pile d'un système d'ordre 2 à temps discret

On considère un système à temps discret régi par les équations d'état :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{x}}(k+1) = [\mathbf{A}] \underline{\mathbf{x}}(k) + (\mathbf{B}) e(k) \\ s(k) = (\mathbf{C}) \underline{\mathbf{x}}(k) \end{cases} \text{ avec } [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } (\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer le vecteur de gain qui assure à ce système, pour une commande à retour d'état et pour un signal de consigne nul, la réponse pile à l'état  $\mathbf{0}$  à partir de n'importe quel état  $\underline{\mathbf{x}}(0)$  et ce, en un temps égal à 2 fois la période d'échantillonnage.

Simuler le fonctionnement du système en boucle fermée à partir d'un vecteur d'état initial  $\underline{\mathbf{x}}(0)$  quelconque pour vérifier la réponse pile à l'état  $\underline{\mathbf{x}}(2) = \mathbf{0}$ .

### 16.5 Évaluation des performances d'un estimateur asymptotique

On considère un système régi par ses équations d'état :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{A}] \underline{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{B}) e(t) \\ s(t) = (\mathbf{C}) \underline{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \text{ avec } [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, (\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } (\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On associe à ce système un observateur asymptotique tel que celui défini sur la figure 16.6 avec  $(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Calculer le temps de montée et le facteur d'amortissement de la dynamique d'estimation de cet observateur.

### 16.6 Construction d'un observateur pour la commande par retour d'état d'un système d'ordre 2 à temps continu

On considère un système régi par l'équation d'état :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A}] \mathbf{x}(t) + (\mathbf{B}) e(t) \text{ avec } [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, (\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } (\mathbf{C}) = (0 \quad 1)$$

On souhaite commander ce système par retour d'état de sorte qu'il soit caractérisé par une réponse indicielle, en boucle fermée, présentant un dépassement de 20 % et un temps de montée de 0,5 s.

Établir le schéma fonctionnel complet du système auquel on associera un observateur asymptotique possédant un temps de montée de 0,1 s et un facteur d'amortissement égal à 1.

## SOLUTIONS

**16.1** La commandabilité en modes se vérifie en calculant la matrice de commandabilité et en vérifiant qu'elle est bien de rang 2, autrement dit que son déterminant est non nul :

On a :

$$[\mathbf{C}]_{(I\mathbf{A})(\mathbf{B})} = [(\mathbf{B}) \quad [\mathbf{A}] (\mathbf{B})]$$

Or :

$$[\mathbf{A}] (\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$[\mathbf{C}]_{(I\mathbf{A})(\mathbf{B})} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \det [\mathbf{C}]_{(I\mathbf{A})(\mathbf{B})} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

Dans le cas d'une commande par retour d'état avec un vecteur de gain  $(\mathbf{k})$ , la fonction de transfert en boucle fermée a pour expression :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = (\mathbf{C}) \{p\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + (\mathbf{B})(\mathbf{k})\}^{-1} (\mathbf{B})$$

Le dénominateur de cette fonction de transfert détermine complètement les caractéristiques dynamiques du système.

Or :

$$D(p) = \det \{p\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + (\mathbf{B})(\mathbf{k})\}$$

soit :

$$D(p) = \det \left\{ \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -55 & -168 \end{pmatrix} \right\}$$

$$D(p) = \det \left\{ \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 165 & 504 \\ -55 & -168 \end{bmatrix} \right\}$$

d'où :

$$D(p) = \begin{vmatrix} p + 166 & 506 \\ -54 & p - 164 \end{vmatrix} = p^2 + 2p + 100 = 100 \left( \frac{p^2}{100} + 0,02p + 1 \right)$$

Identifions alors ce dénominateur avec celui d'un système classique du second ordre :

$$D(p) = \frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1 = \frac{p^2}{100} + 0,02p + 1$$

On a :  $\omega_n^2 = 100 \Rightarrow \omega_n = 10 \text{ rad/s} \Rightarrow t_m \approx \frac{3}{\omega_n} = 0,3 \text{ s}$

et :  $\frac{2\xi}{\omega_n} = 0,02 \Rightarrow \xi = 0,1$

D'après l'abaque des réponses indicielles d'un système du second ordre (annexe 2), on en déduit la valeur du dépassement, soit environ 75 %.

**16.2** La commandabilité en modes se vérifie en calculant la matrice de commandabilité et en vérifiant qu'elle est bien de rang 2, autrement dit que son déterminant est non nul :

On a :  $[\mathbf{C}]_{([\mathbf{A}|\mathbf{B}])} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \mathbf{B}]$

Or :  $[\mathbf{A}] \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \end{pmatrix}$

d'où :  $[\mathbf{C}]_{([\mathbf{A}|\mathbf{B}])} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 16 \end{bmatrix}$  et  $\det [\mathbf{C}]_{([\mathbf{A}|\mathbf{B}])} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 16 \end{vmatrix} = 73$

Dans le cas d'une commande par retour d'état avec un vecteur de gain ( $\mathbf{k}$ ), la fonction de transfert en boucle fermée a pour expression :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = (\mathbf{C}) \{p\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + (\mathbf{B}) (\mathbf{k})\}^{-1} (\mathbf{B})$$

Calculons le dénominateur de cette fonction de transfert :

$$D(p) = \det \{p\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + (\mathbf{B}) (\mathbf{k})\}$$

Soit :  $D(p) = \det \left\{ \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \right\}$

$$D(p) = \det \left\{ \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k_1 & 4k_2 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \right\}$$

d'où :  $D(p) = \begin{vmatrix} p+1+4k_1 & 5+4k_2 \\ -2-k_1 & p+8-k_2 \end{vmatrix} = p^2 + (9+4k_1-k_2)p + 18-7k_2+37k_1$

Compte tenu des performances que l'on souhaite obtenir, nous devons identifier ce dénominateur avec :

$$D(p) = \frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1 = \frac{p^2}{56,25} + 0,12p + 1 = \frac{1}{56,25} (p^2 + 6,75p + 56,25)$$

En effet :  $t_m = 0,4 \text{ s} \Rightarrow \omega_n \approx \frac{3}{t_m} = 7,5 \text{ rad/s}$  et  $\xi \approx \frac{\Delta\varphi}{100} = 0,45$

On a donc : 
$$\begin{cases} 9 + 4k_1 - k_2 = 6,75 \\ 18 - 7k_2 + 37k_1 = 56,25 \end{cases}$$

soit : 
$$\begin{cases} k_1 = 6 \\ k_2 = 26,25 \end{cases}$$

**16.3** Calculons la matrice de commandabilité du système :

On a :

$$[\mathbf{C}]_{(\mathbf{A})(\mathbf{B})} = [(\mathbf{B}) \quad (\mathbf{A})(\mathbf{B})]$$

Or :

$$[\mathbf{A})(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$[\mathbf{C}]_{(\mathbf{A})(\mathbf{B})} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \text{ et } \det [\mathbf{C}]_{(\mathbf{A})(\mathbf{B})} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Cette matrice est de rang 1, étant donné que son déterminant est nul. Le système n'est donc pas commandable. En revanche, il est possible d'effectuer un changement de base de manière à mettre en évidence un sous-système commandable. Pour un système d'ordre 2, il suffit de diagonaliser la matrice de commande pour faire apparaître cette forme. Calculons alors les valeurs propres du système :

$$\det [\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}] = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

soit :

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3 \text{ et } \lambda_2 = -2$$

Calculons le premier vecteur propre :

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow x = -2y, \text{ soit } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le second vecteur propre se calcule tout aussi facilement :

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow y = 2x, \text{ soit } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } [\mathbf{T}]^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

La forme recherchée est donc :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}(t) = [\tilde{\mathbf{A}}] \tilde{\mathbf{x}}(t) + (\tilde{\mathbf{B}}) e(t) \\ s(t) = (\tilde{\mathbf{C}}) \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

avec :

$$[\tilde{\mathbf{A}}] = [\mathbf{T}][\mathbf{A}][\mathbf{T}]^{-1} \text{ et } (\tilde{\mathbf{B}}) = [\mathbf{T}]^{-1} (\mathbf{B})$$

soit :

$$[\tilde{\mathbf{A}}] = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ et } (\tilde{\mathbf{B}}) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous constatons effectivement que seul le second mode  $e^{3t}$  est commandable. Le second ne peut pas l'être mais comme ce mode est stable, il est tout à fait possible d'assurer la stabilité du système en boucle fermée à l'aide du retour d'état au travers d'un vecteur de gain approprié.

**16.4** Vérifions tout d'abord que le système est complètement commandable :

$$\text{On a : } [\mathbf{C}]_{([\mathbf{A}](\mathbf{B}))} = [\mathbf{B} \quad [\mathbf{A}](\mathbf{B})]$$

$$\text{Or : } [\mathbf{A}](\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où : } [\mathbf{C}]_{([\mathbf{A}](\mathbf{B}))} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \det [\mathbf{C}]_{([\mathbf{A}](\mathbf{B}))} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

La matrice de commandabilité étant de rang 2, le système est complètement commandable. Cherchons à présent la suite  $\varepsilon(k)$  pour  $0 \leq k < 2$  qui amène le système à  $\mathbf{0}$  en 2 échantillons.

$$\text{On a : } [\mathbf{A}]^{-2} \mathbf{x}(2) = \mathbf{x}(0) + \begin{bmatrix} [\mathbf{A}]^{-1}(\mathbf{B}) & [\mathbf{A}]^{-2}(\mathbf{B}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon(0) \\ \varepsilon(1) \end{pmatrix}$$

$$\text{soit : } \begin{pmatrix} \varepsilon(0) \\ \varepsilon(1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}]^{-1}(\mathbf{B}) & [\mathbf{A}]^{-2}(\mathbf{B}) \end{bmatrix}^{-1} \{-\mathbf{x}(0)\}$$

Nous savons que le vecteur de gain du retour d'état est la première ligne de la matrice :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{A}]^{-1}(\mathbf{B}) & [\mathbf{A}]^{-2}(\mathbf{B}) \end{bmatrix}^{-1}$$

Calculons tout d'abord  $[\mathbf{A}]^{-1}$  :

$$[\mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{\det[\mathbf{A}]} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{A}]^{-1}(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{On tire alors : } [\mathbf{A}]^{-2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{Par conséquent : } [\mathbf{A}]^{-2}(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où : } \begin{bmatrix} [\mathbf{A}]^{-1}(\mathbf{B}) & [\mathbf{A}]^{-2}(\mathbf{B}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} [\mathbf{A}]^{-1}(\mathbf{B}) & [\mathbf{A}]^{-2}(\mathbf{B}) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur de gain qui assure la réponse pile est donc constitué de la première ligne de cette matrice, soit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Simulons le fonctionnement du système pour les premiers échantillons à partir de l'état initial proposé.

$$\text{On a : } \mathbf{x}(1) = [\mathbf{A}]\mathbf{x}(0) + (\mathbf{B})\varepsilon(0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(0)$$



soit :

$$\begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

puis :

$$\underline{\mathbf{x}}(2) = [\mathbf{A}]\underline{\mathbf{x}}(1) + (\mathbf{B})\varepsilon(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (\underline{\mathbf{g}}_1)\underline{\mathbf{x}}(1)$$

$$\begin{pmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bien évidemment,  $\underline{\mathbf{x}}(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  pour tout  $k > 2$ .

**16.5** La dynamique de l'estimateur est définie par le dénominateur de la fonction de transfert associée à l'équation :

$$\underline{\hat{\mathbf{d}}}(t) = [[\mathbf{A}] - (\mathbf{v})(\mathbf{C})] \underline{\hat{\mathbf{d}}}(t)$$

Soit :

$$D(p) = \det \{p\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + (\mathbf{v})(\mathbf{C})\}$$

On a :

$$D(p) = \det \left\{ \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

d'où :

$$D(p) = \begin{vmatrix} p+1 & 0 \\ -1 & p+\frac{3}{2} \end{vmatrix} = p^2 + \frac{5}{2}p + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \left( \frac{2p^2}{3} + \frac{5p}{3} + 1 \right)$$

Identifions cette expression avec le dénominateur d'un système du second ordre.

On a :

$$D(p) = \frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1 = \frac{2p^2}{3} + \frac{5p}{3} + 1$$

d'où :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ rad/s} = 1,22 \text{ rad/s} \Rightarrow t_m \approx \frac{3}{\omega_n} = 2,46 \text{ s et } \xi \approx 1$$

L'estimateur répond donc avec un temps de montée de 2,46 s et fonctionne pratiquement en régime critique (pas de dépassement et convergence très rapide).

**16.6** Traduisons le fonctionnement du système en schéma fonctionnel. La figure 16.8 présente le système complet avec sa commande par retour d'état et son observateur asymptotique.

Notre objectif consiste à déterminer les vecteurs  $(\mathbf{k})$  et  $(\mathbf{v})$  en fonction du cahier des charges. Le vecteur  $(\mathbf{k})$  doit être déterminé en fonction des caractéristiques dynamiques souhaitées pour la réponse indicielle du système, tandis que le vecteur  $(\mathbf{v})$  doit être déterminé en fonction de la dynamique d'estimation imposée. Ces deux vecteurs peuvent bien sûr être déterminés de manière complètement indépendante étant donné que l'on impose à l'observateur une rapidité largement supérieure à celle du système. Intéressons-nous donc tout d'abord au calcul de  $(\mathbf{k})$ .

La commandabilité en modes se vérifie en calculant la matrice de commandabilité et en vérifiant qu'elle est bien de rang 2, autrement dit que son déterminant est non nul :

On a :

$$[\mathbf{C}]_{([\mathbf{A}](\mathbf{B}))} = [(\mathbf{B}) \quad [\mathbf{A}](\mathbf{B})]$$

Or :

$$[\mathbf{A}](\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$[C]_{(I|B)} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ et } \det [C]_{(I|B)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1$$

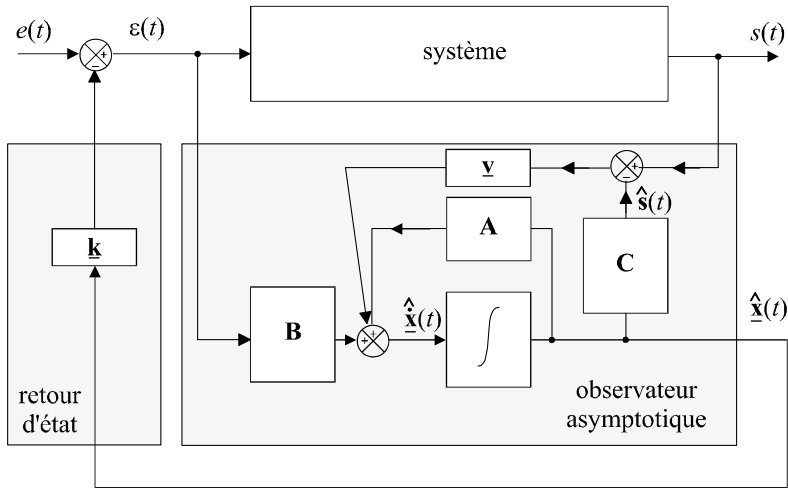


Figure 16.8 Schéma fonctionnel du système.

Dans le cas d'une commande par retour d'état avec un vecteur de gain  $\underline{k}$ , la fonction de transfert en boucle fermée a pour expression :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = (\underline{C}) \{p\mathbf{I} - [\underline{A}] + (\underline{B})(\underline{k})\}^{-1} (\underline{B})$$

Calculons le dénominateur de cette fonction de transfert :

$$D(p) = \det \{p\mathbf{I} - [\underline{A}] + (\underline{B})(\underline{k})\}$$

soit :

$$D(p) = \det \left\{ \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$D(p) = \det \left\{ \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right\}$$

d'où :

$$D(p) = \begin{vmatrix} p + k_1 & 2 + k_2 \\ -1 + k_1 & p + 4 + k_2 \end{vmatrix} = p^2 + (4 + k_2 + k_1)p + 2k_1 + 2 + k_2$$

Compte tenu des performances que l'on souhaite obtenir, nous devons identifier ce dénominateur avec :

$$D(p) = \frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1 = \frac{p^2}{36} + 0,15p + 1 = \frac{1}{36} (p^2 + 5,4p + 36)$$

En effet :  $t_m = 0,5 \text{ s} \Rightarrow \omega_n \approx \frac{3}{t_m} = 6 \text{ rad/s}$  et  $\text{dep} = 20 \% \Rightarrow \xi \approx 0,45$

On a donc :

$$\begin{cases} 4 + k_2 + k_1 = 5,4 \\ 2k_1 + 2 + k_2 = 36 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} k_1 = 32,6 \\ k_2 = -31,2 \end{cases}$$

Calculons à présent le vecteur  $(\mathbf{y})$  pour régler les performances dynamiques de l'observateur. La dynamique de l'estimateur est définie par le dénominateur de la fonction de transfert associée à l'équation :

$$\dot{\hat{\mathbf{d}}}(t) = [[\mathbf{A}] - (\mathbf{y})(\mathbf{C})] \hat{\mathbf{d}}(t)$$

Soit :

$$D(p) = \det \{p\mathbf{I} - [\mathbf{A}] + (\mathbf{y})(\mathbf{C})\}$$

On a :

$$D(p) = \det \left\{ \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

d'où :

$$D(p) = \begin{vmatrix} p & 2 + v_1 \\ -1 & p + 4 + v_2 \end{vmatrix} = p^2 + (4 + v_2)p + 2 + v_1$$

Compte tenu de la dynamique d'estimation que l'on souhaite obtenir, nous devons identifier ce dénominateur avec :

$$D(p) = \frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1 = \frac{p^2}{900} + 0,067p + 1 = \frac{1}{900} (p^2 + 60p + 900)$$

En effet :

$$t_m = 0,1 \text{ s} \Rightarrow \omega_n \approx \frac{3}{t_m} = 30 \text{ rad/s et } \xi = 1 \text{ est imposé.}$$

On a donc :

$$\begin{cases} 4 + v_2 = 60 \\ 2 + v_1 = 900 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} v_1 = 898 \\ v_2 = 56 \end{cases}$$

## Chapitre 17

# Systèmes à événements discrets, le modèle GRAFCET

### 17.1 DÉFINITION

#### 17.1.1 Les systèmes à événements discrets

Les systèmes à événements discrets, qu'il ne faut surtout pas confondre avec les systèmes à temps discret, sont des dispositifs dont l'évolution est soumise à des événements ponctuels survenant à des instants non prévisibles comme par exemple l'arrivée d'un signal particulier, l'attente d'un événement extérieur, etc.

De tels systèmes sont légion dans les chaînes de production, dans les outils de télécommunication ou encore dans les dispositifs fonctionnant en réseaux.

#### 17.1.2 Le modèle GRAFCET

Le GRAFCET (GRAphe Fonctionnel de Commande Étape Transition) est un langage graphique de modélisation destiné à représenter le fonctionnement d'automatismes séquentiels dont les informations sont de type logique (vrai ou faux). On parle également de diagramme séquentiel fonctionnel. On l'utilise en général pour représenter ou spécifier les systèmes de commande de ces dispositifs, pour définir les cahiers des charges des automatismes séquentiels ou pour programmer des systèmes aptes à les piloter comme par exemple des automates programmables.

Pour considérer un exemple simple qui nous permettra de cibler le type de systèmes concernés par notre propos, imaginons une chaîne de remplissage très simple qui consiste à remplir des pots de peinture initialement vides et défilant sur un tapis roulant (figure 17.1).

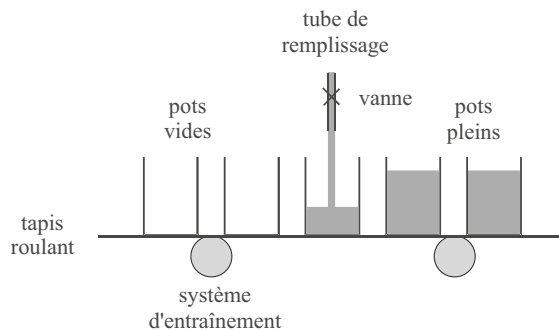


Figure 17.1 Système de remplissage

### 17.1.3 Analyse du système

Une première analyse rapide de ce système fait nettement apparaître son caractère séquentiel, autrement dit son fonctionnement devant obéir à une certaine séquence d'opérations. Ces opérations, au cours desquelles un certain nombre d'actions doivent être réalisées, peuvent être considérées comme des étapes élémentaires. Ici, trois actions élémentaires peuvent être identifiées : avance du tapis roulant sur une distance prédéfinie, ouverture de la vanne et fermeture de la vanne.

Pour que notre système fonctionne correctement, il convient également, sans aucun doute, de disposer de capteurs permettant de détecter un certain nombre d'événements qui peuvent s'avérer déterminants : un capteur de présence d'un pot vide en dessous du tube de remplissage et un capteur permettant de détecter que le pot en cours de remplissage est devenu plein. Ce sont effectivement ces événements qui sont à même de valider le passage à l'action suivante ou pas.

La transition d'une étape à une autre ne peut donc se faire qu'en fonction des informations délivrées par ces capteurs. On notera bien que ces informations, tout comme les ordres de commande, d'ailleurs, sont bien d'ordre logique (ou booléen ou encore « tout ou rien ») ce qui est conforme à nos attentes.

La figure 17.2 reprend le schéma original de notre dispositif en faisant apparaître les informations qui commandent le fonctionnement du système et celles que le système « envoie » par l'intermédiaire des capteurs. C'est ce qu'on appelle la partie opérative du système. Vu la simplicité du dispositif, il est relativement facile d'en établir la séquence de fonctionnement et de montrer comment les différentes étapes s'enchaînent en fonction des informations délivrées par les capteurs (tableau de la figure 17.3). On ne peut ainsi passer d'une étape à l'autre que lorsqu'une condition est remplie, la transition étant en quelque sorte, conditionnée par une information logique.

Nous venons clairement de mettre en évidence, dans le fonctionnement séquentiel de cette chaîne de remplissage, des notions d'étapes et de transitions, deux mots clés *a priori* important dans le concept de GRAFCET. Si l'on considère le GRAFCET comme un langage descriptif, même s'il se représente graphiquement de manière très simple, il convient d'en connaître l'ensemble du vocabulaire ainsi que, en quelque sorte, les règles de syntaxe. C'est ce que le prochain paragraphe se propose de détailler.

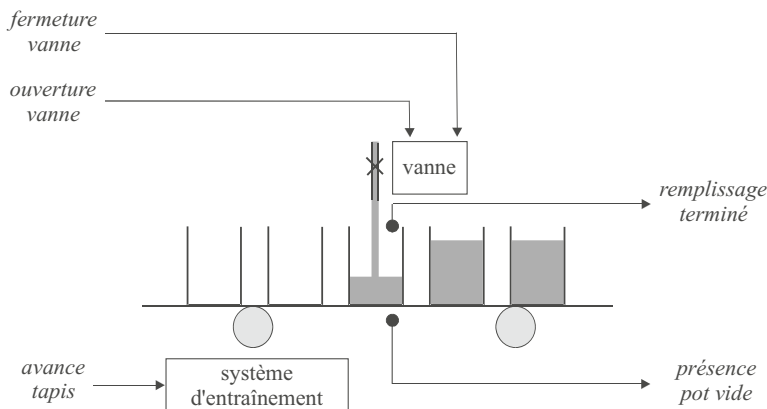


Figure 17.2 Informations essentielles du système

### 17.1.4 Notions d'entrées et de sorties

Le schéma de la figure 17.2 ne représente en réalité que la partie dite opérative du système. La gestion des informations, quant à elle, sera dévolue à ce qu'il est convenu d'appeler la partie commande. Les deux sont liées par le double flux d'informations, envoyées par la partie opérative par l'intermédiaire des capteurs et

étape 1	avance tapis
	<i>présence pot vide</i>
étape 2	ouverture vanne
	<i>remplissage terminé</i>
étape 3	fermeture vanne

Figure 17.3 Étapes de fonctionnement du système

reçues par cette même partie opérative par les organes appelés actionneurs et qui transforment les ordres en actions. Vu de la partie opérative, on parle alors respectivement de sorties et d'entrées.

## 17.2 PRINCIPES DE REPRÉSENTATION

### 17.2.1 Notion d'étape et de liaison

Une étape correspond, d'une manière générale à un état donné du système. Elle peut être associée à une action ou encore à un comportement particulier dans l'organisation générale de sa séquence ; elle peut être active ou inactive. Dans le fonctionnement séquentiel d'un système, les étapes ont vocation à être successivement actives et inactives au fur et à mesure du déroulement du processus. On associe à chaque étape une variable logique d'étape qui est considérée à 1 lorsque l'étape est active et à 0 dans le cas contraire.

Dans la représentation GRAFCET, on représente une étape par un carré ou un rectangle auquel on associe un numéro et parfois une étiquette qui indique, le cas échéant, l'action réalisée par l'étape. La figure 17.4 illustre cette représentation. Si le déroulement de la séquence fait intervenir une étape initiale, celle-ci n'est en général associée à aucune action particulière et on la représente symboliquement par un carré à trait double.

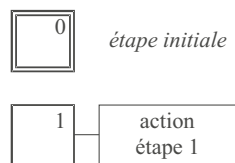


Figure 17.4 Représentation des étapes

L'enchaînement entre deux étapes successives est représenté par une liaison qui n'est rien d'autre qu'un trait (ou un arc) liant une étape à l'étape suivante. L'usage consiste à considérer que la lecture d'une liaison se fait de haut en bas ou de gauche à droite. Dans le cas contraire ou en cas d'ambiguïté, on peut orienter l'arc par une flèche pour préciser le sens d'évolution de la séquence (figure 17.5). Lorsqu'on représente l'état du système à un instant donné, on indique la ou les étape(s) active(s) en plaçant un « jeton », autrement dit un petit cercle noir à l'intérieur de celles-ci.

### 17.2.2 Notion de transition

Le passage d'une étape à une autre, s'il est schématisé par un trait ou par un arc, est en général conditionné par une condition (ou réceptivité) : c'est la notion de transition que l'on représente par une petite barre au travers de cet arc. Il se peut qu'une transition ne soit associée à aucune condition. On dit alors que la réceptivité de la transition est toujours vraie. C'est le cas où deux étapes s'enchaînent sans condition particulière.

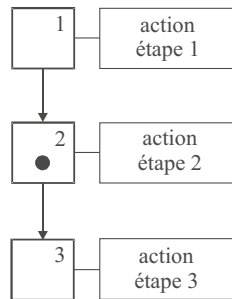


Figure 17.5 Représentation de l'évolution d'une séquence

### 17.2.3 Exemple

Reprenons l'exemple développé au paragraphe 17.1 à propos de la chaîne de remplissage et aidons-nous du tableau de la figure 17.3 pour en modéliser le GRAFCET (figure 17.6). Chaque étape est matérialisée par un carré et les deux transitions principales sont caractérisées par leur réceptivité, autrement dit, respectivement par les conditions « présence pot vide » et « remplissage terminé ». On notera qu'une fois le remplissage d'un pot terminé, la vanne d'alimentation est fermée et comme nous supposons cette action instantanée, une transition inconditionnelle nous ramène à l'étape 1 pour faire avancer un nouveau pot vide.

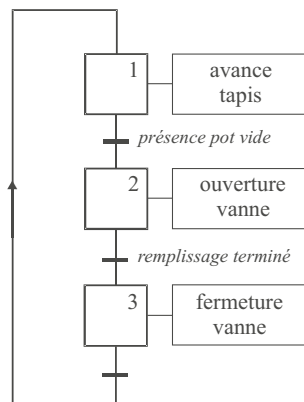


Figure 17.6 GRAFCET de la chaîne de remplissage

### 17.2.4 Règles de construction d'un GRAFCET

Le système de remplissage dont nous venons d'établir un GRAFCET somme toute très simplifié a certes valeur d'exemple mais dans la réalité industrielle, les dispositifs séquentiels sont souvent plus complexes et les GRAFCETs associés le sont également. Ainsi, plusieurs étapes peuvent être reliées à une seule transition ou inversement.

Dans le cas de la figure 17.7, nous avons effectivement deux étapes reliées à une seule transition. On trace alors un double trait horizontal qui symbolise ce qu'on appelle la « convergence en ET » ou synchronisation amont. Dans ce cas, les deux étapes situées en amont de la transition devront être actives et la condition de transition devra être validée pour que la transition puisse être franchie vers l'étape suivante.

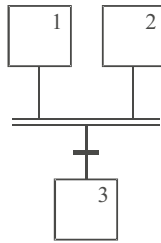


Figure 17.7 Convergence en ET

Sur la figure 17.8, plusieurs étapes amont sont reliées à une étape « aval » par l'intermédiaire de trois transitions. Ici, il s'agit de symboliser le fait qu'une seule de ces transitions suffit pour activer l'étape suivante. C'est la « convergence en OU ».

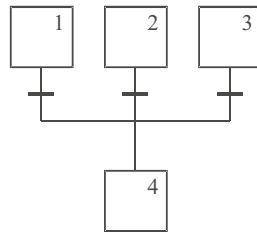


Figure 17.8 Convergence en OU

La divergence en ET correspond à la synchronisation du démarrage simultané de plusieurs étapes qui seront actives en même temps. Lorsque la condition de la transition est vraie, les trois étapes représentées sur la figure 17.9 deviennent actives.

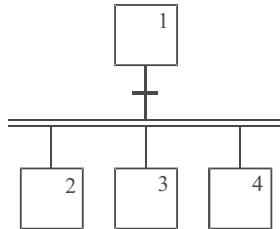


Figure 17.9 Divergence en ET

Pour finir, la figure 17.10 représente la divergence en OU qui correspond à l'activation conditionnelle de plusieurs étapes « aval » possédant chacune leur propre condition d'activation.

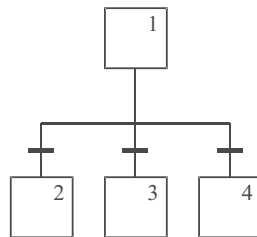


Figure 17.10 Divergence en OU



## 17.3 DIFFÉRENTS TYPES D'ACTION

L'activation d'une étape a en général pour objet de déclencher une action particulière sur le système. Ces actions peuvent être de différents ordres.

### 17.3.1 Actions continues

Une action est dite continue si elle est effectuée pendant toute la durée d'activation de l'étape correspondante. Il peut s'agir, par exemple, de mettre en marche un indicateur lumineux tant que l'étape est active.

### 17.3.2 Actions mémorisées

Une action mémorisée correspond à une opération déclenchée lorsque l'étape est activée, sans que la désactivation de l'étape n'interrompe l'action. Il peut s'agir d'une opération qui sera interrompue naturellement une fois sa tâche terminée (par exemple l'ordre de fermeture d'une vanne, une fois reçu par l'actionneur correspondant, déclenche l'action requise qui ne s'interrompra qu'une fois la vanne fermée) ou encore d'une opération qui sera arrêtée par une étape ultérieure.

### 17.3.3 Actions conditionnelles

Une action conditionnelle est une tâche effectuée lorsque l'étape est active si de surcroît une condition particulière est vérifiée.

### 17.3.4 Actions temporisées

Une action temporisée n'est déclenchée qu'après un certain délai après l'activation de l'étape correspondante. Elle peut être continue ou mémorisée.

## 17.4 ÉVOLUTION D'UN GRAFCET

### 17.4.1 État initial d'un système

Les étapes initiales sont celles qui sont actives au début du fonctionnement du système, en quelque sorte, lors de sa mise sous tension ou de son démarrage. Nous avons déjà évoqué leur symbole (carré aux traits doublés) et il peut y en avoir plusieurs au sein d'un même système. À l'instant 0 du fonctionnement du système, des jetons sont placés dans toutes ses étapes actives (exemple figure 17.11).

### 17.4.2 Règles de franchissement des transitions

Pour qu'une transition soit franchie, elle doit être validée en réunissant les deux conditions suivantes :

- les étapes immédiatement précédentes doivent être actives,
- sa réceptivité (c'est-à-dire sa condition intrinsèque) doit être vraie.

Dans ce cas, les étapes suivantes sont automatiquement activées et les étapes précédentes désactivées. Dans l'exemple de la figure 17.11, l'appui sur le bouton marche/arrêt rend vraie la réceptivité de la transition  $T_1$  (que l'on supposera rester vraie en permanence). Comme l'étape 1 était active, cette action active l'étape 2 et désactive l'étape 1. Le jeton placé initialement dans l'étape 1 « descend » donc dans l'étape 2 (figure 17.12).

L'étape 2 est suivie d'une divergence en OU. Plusieurs cas de figure peuvent alors se produire. Si une seule des réceptivités  $T_2$  ou  $T_3$  est vraie (par exemple  $T_3$ ), alors l'étape 2 est désactivée et c'est l'étape 4 qui s'active (figure 17.13). On notera que l'étape 3 ne peut donc plus devenir active. Pour que les deux étapes

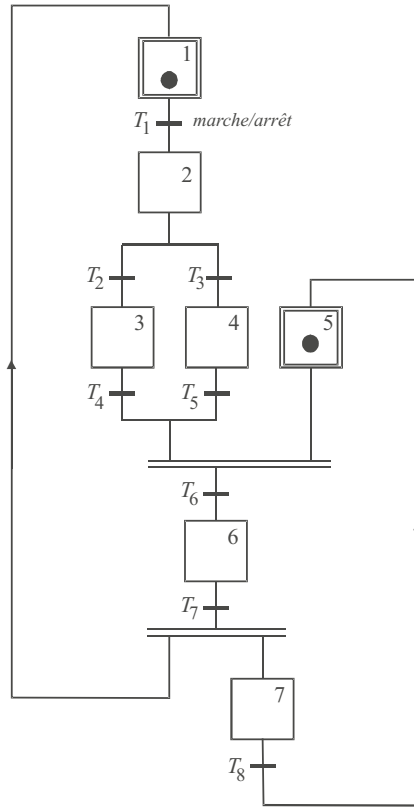


Figure 17.11 Illustration des règles de franchissement des étapes

3 et 4 puissent s’activer en même temps, il faudrait que les deux réceptivités  $T_2$  et  $T_3$  soit vraies avant que l’étape 2 ne s’active.

Une convergence en OU est placée immédiatement après les étapes 3 et 4. Puisque l’étape 4 a été validée, il faudra attendre que la transition  $T_5$  soit validée pour atteindre la convergence en ET. Dès que la réceptivité  $T_6$  sera vraie, l’étape 6 deviendra active et les étapes 4 et 5 seront désactivées (figure 17.14).

Lorsque la réceptivité  $T_7$  devient vraie, le GRAFCET évolue selon une divergence en ET : les étapes 1 et 7 s’activent et comme nous avons supposé que la transition  $T_1$  restait vraie en permanence, l’étape 2 s’active immédiatement.

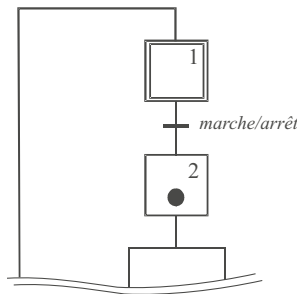


Figure 17.12 Déplacement du jeton

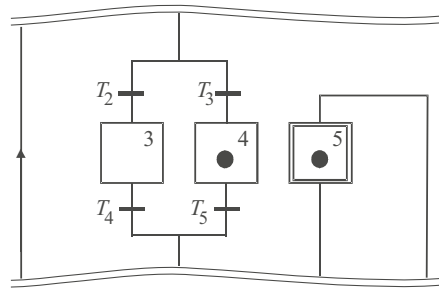


Figure 17.13 Activation d'étape

On peut continuer à simuler ainsi à l'infini l'évolution de ce GRAFCET. On notera par exemple que tant que la transition  $T_8$  n'est pas validée, le jeton se trouvant, le cas échéant, dans l'étape 7, ne peut revenir dans l'étape 5. Dans ces conditions, la convergence en ET se trouvant au-dessus de la transition  $T_6$  ne peut plus (momentanément) être franchie, même si, entre-temps, l'évolution du système a activé l'étape 3 ou l'étape 4.

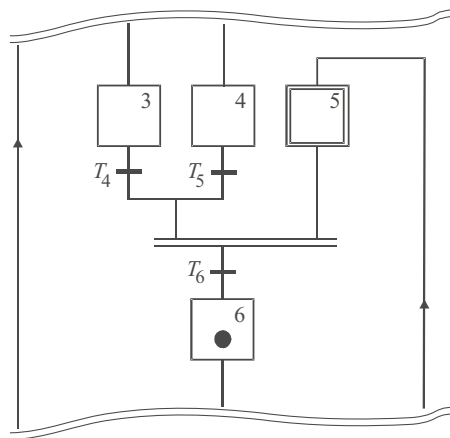


Figure 17.14 Désactivation d'étapes

### 17.4.3 Notion d'évolution fugace

On dit que le GRAFCET d'un système subit une évolution fugace lorsque plusieurs transitions qui s'enchaînent dans une séquence possèdent des réceptivités vraies (figure 17.15).

Dans ce cas, le jeton d'activation d'étape va progresser de manière très rapide (pour ne pas dire instantanée) le long de la séquence jusqu'à s'immobiliser sur une étape dont la transition aval ne sera pas encore franchissable (l'étape 4 dans notre exemple). Le terme d'évolution fugace évoque bien cette notion de parcours au cours duquel un certain nombre d'étapes ne vont rester actives qu'un très court laps de temps. Si des actions continues sont associées à ces étapes, elles ne seront pas réalisées. En revanche, s'il s'agit d'actions mémorisées, elles le seront.

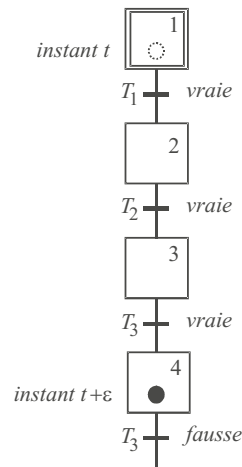


Figure 17.15 Évolution fugace

## 17.5 ÉTUDE DE CAS

Le schéma de la figure 17.16 représente en vue de dessus, un système de tri de caisses. Il s'agit ici de trier les petites caisses et les grosses qui sont amenées par le tapis roulant 1 en acheminant les unes vers le tapis 2 et les autres, vers le tapis 3.

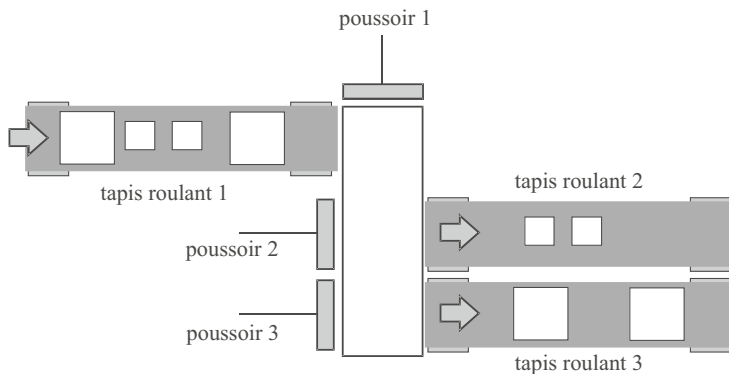


Figure 17.16 Système de tri de caisses

Pour ce faire, un capteur placé à proximité du poussoir 1 détecte le type de caisse qui se présente devant lui. S'il s'agit d'une petite caisse, le poussoir 1 la pousse devant le poussoir 2 qui, à son tour, la pousse sur le tapis roulant 2. S'il s'agit d'une grosse caisse, le poussoir 1 la pousse devant le poussoir 3 qui lui, la pousse vers le tapis roulant 3.

On supposera que les tapis roulants 2 et 3 fonctionnent en continu, tandis que le tapis roulant 1 doit bien évidemment s'arrêter quand une caisse est engagée dans le dispositif de tri.

Pour établir le GRAFCET de la partie opérative de ce système, il convient tout d'abord de définir les actions nécessaires ainsi que les capteurs qui fourniront les informations dont nous avons besoin. En ce qui concerne les actions, on aura :

- avance tapis roulant 1 (que nous nommerons AV TR1), cette action étant supposée continue (le tapis est entraîné tant que AV TR1 est active et est arrêté dans le cas contraire)

- avance poussoir 1 en position 2, AV P1/2 (position intermédiaire juste avant la zone poussée par le poussoir 2 de manière à placer l'objet en situation d'être poussé par le poussoir 2)
- avance poussoir 1 en position 3, AV P1/3 (poussoir 1 sorti complètement devant la zone poussée par le poussoir 3)
- retrait poussoir 1 (R P1), poussoir 1 rentrant à sa position d'origine
- avance poussoir 2, AV P2 (le poussoir 2 fait glisser l'objet sur le tapis roulant 2)
- retrait poussoir 2, R P2
- avance poussoir 3, AV P3 (le poussoir 3 fait glisser l'objet sur le tapis roulant 3)
- retrait poussoir 3, R P3

Côté capteurs, faisons le bilan des informations logiques requises pour assurer le fonctionnement du système. Pour ne rien oublier, raisonnons en cherchant quelles sont les données qu'il faut détecter pour être capable de prendre les décisions. Il faut bien sûr que soit placé, au niveau du poussoir P1, un dispositif de détection du type de caisse. Nous supposons que ce dispositif délivre deux variables logiques GC (pour grosse caisse) et PC (petite caisse) étant respectivement à 1 lorsque l'un des types de caisses se présente devant P1. Pour gérer correctement les mouvements des poussoirs, il faut par ailleurs être capable de repérer leur position (entré ou sorti, et même sorti en position intermédiaire pour P1). En résumé :

- détection d'une grosse caisse : GC
- détection d'une petite caisse : PC
- détection du poussoir 1 rentrée complètement : P10
- détection du poussoir 1 sorti en position intermédiaire : P12
- détection du poussoir 1 sorti complètement : P13
- détection du poussoir 2 rentré : P20
- détection du poussoir 2 sorti : P21
- détection du poussoir 3 rentré : P30
- détection du poussoir 3 sorti : P31

Toutes ces détections, bien sûr, sont associées aux transitions qui régleront l'évolution du GRAFCET du système.

Pour établir le GRAFCET d'un système simple, il est possible d'imaginer pas à pas la séquence d'opérations nécessaires pour effectuer un cycle complet. Nous supposons qu'au démarrage du système, tous les poussoirs se trouvent rentrés, que le tapis roulant 1 avance et que des caisses sont en route vers le dispositif de tri. L'étape AV TR 1 est donc l'étape active au démarrage et la seule, puisque les autres actionneurs sont au repos.

Le premier événement qui inactivera cette première étape est l'arrivée d'une caisse (transition GC ou PC). C'est donc une divergence en OU qui sera placée en aval de cette première étape. Le GRAFCET se sépare donc en quelque sorte en deux branches, chacune des deux branches correspondant au traitement d'un des deux types de caisse. Les deux branches auront une structure analogue ; considérons pour commencer le cas où c'est une grosse caisse qui est détectée. Le poussoir 1 doit être amenée en position 3 : cette étape est associée à l'action AV P1/3. Lorsque la caisse est placée en face du poussoir 3 (réceptivité P13 vraie), P1 se retire « et » P3 avance. En aval de la transition P13, une divergence en ET déclenche ces deux opérations, l'avance de P3 étant immédiatement suivie de son retrait dès que l'on détecte qu'il est sorti complètement (donc que la caisse est engagée sur le tapis roulant 3). On considérera que le cycle est terminé dès lors que les deux poussoirs 1 et 3 seront tous deux rentrés. Autrement dit, les transitions P10 et P30 sont l'objet d'une convergence en ET qui sera franchie lorsque le dispositif de tri sera à nouveau apte à traiter une caisse, c'est-à-dire à procéder à l'avance du tapis roulant.

La seconde branche (traitement d'une petite caisse) est pratiquement identique à la première à ceci près que le poussoir 1 se place en position intermédiaire (AV P1/2) et que c'est le poussoir 2 qui opère à la place du poussoir 3.

La figure 17.17 présente le GRAFCET de la partie opérative du système. On notera la présence d'une boucle qui relie les deux dernières convergences en ET à l'étape d'activation du tapis roulant 1. Dès lors qu'un jeton franchit l'une de ces deux convergences en ET, il revient bien activer l'étape initiale.

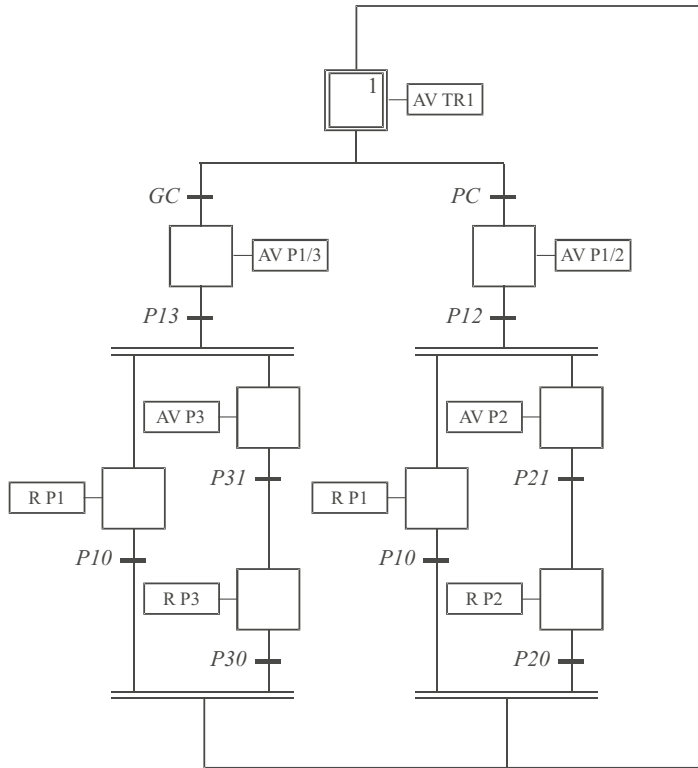


Figure 17.17 GRAFCET du système de tri

## EXERCICES

### 17.1 Système de forage automatisé

La figure 17.18 représente un système de forage automatisé capable de percer des trous dans des pièces métalliques qui défilent sur un tapis roulant. Chaque pièce est acheminée sous la perceuse par un tapis roulant et doit recevoir un trou sur sa face supérieure. On supposera qu'un capteur approprié est capable de détecter la présence d'une pièce prête à être percée.

Établir la liste des actions et des capteurs nécessaires pour assurer le fonctionnement du système puis son GRAFCET.

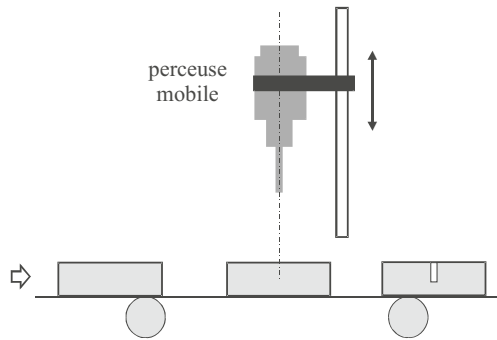


Figure 17.18 Système de forage

### 17.2 Automatisation d'une machine à café

La figure 17.19 représente (très schématiquement) une machine à café disposant d'une part d'une réserve de grain et d'un moulin et d'autre part d'une réserve d'eau associée à un chauffe-eau. Un panneau de contrôle est équipé d'un bouton-poussoir par lequel on commande le café et des voyants suivants :

- Confirmation de la commande
- Attestation de la présence de café
- Demande de remplissage de la réserve de café
- Demande de remplissage de la réserve d'eau

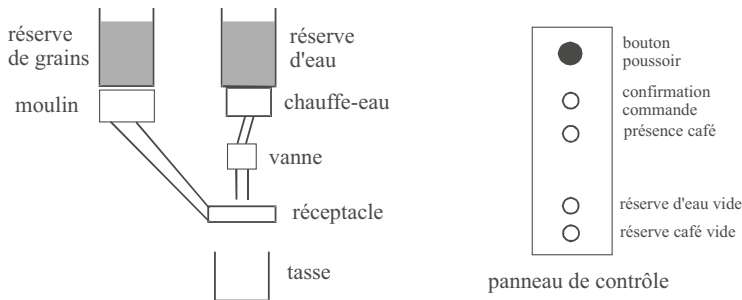


Figure 17.19 Schéma de principe de la machine à café

Il s'agit ici d'étudier la séquence des opérations destinées à préparer un café lorsque l'on appuie sur le bouton-poussoir en s'assurant que la machine est caractérisée par un fonctionnement fiable, à savoir qu'elle doit prévenir l'utilisateur si la réserve de grains ou la réserve d'eau sont vides. Le café, une fois moulu, est introduit dans un réceptacle sur lequel coule l'eau chaude.

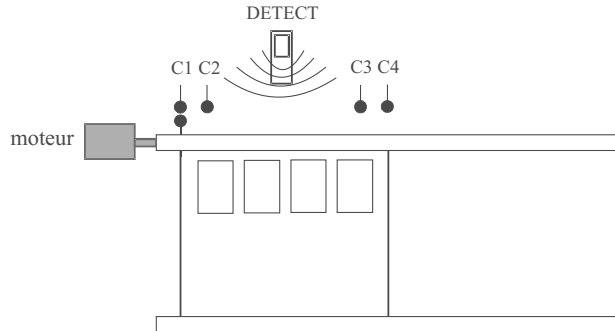
Établir la liste des actions et des capteurs nécessaires pour assurer le fonctionnement du système puis son GRAFCET.

### 17.3 Étude d'une porte coulissante automatique

La figure 17.20 représente une porte coulissante à ouverture automatique. Un capteur DETECT permet de détecter la présence d'une personne devant la porte et ainsi, de commander son ouverture. Quatre capteurs

C1, C2, C3 et C4 permettent de localiser la position de la porte. C1 correspond à la porte fermée. C4 correspond à la porte ouverte. C2 et C3 sont deux capteurs situés à 10 cm respectivement de C1 et C4 et seront utilisés, le premier pour gérer la phase finale de la fermeture et le second pour gérer la phase finale de l'ouverture. En effet, le moteur qui commande la porte possède deux vitesses : l'une normale,  $V_{max}$  et l'autre faible,  $V_{min}$ . Il s'agit de déplacer la porte à vitesse normale la plupart du temps, sauf à l'approche des phases finales d'ouverture et de fermeture.

La porte ne se referme qu'après une certaine temporisation, à condition que le capteur de présence ne détecte personne dans son champ de visée.



**Figure 17.20** Schéma de principe de la porte coulissante automatique

Établir la liste des actions permettant d'assurer le fonctionnement du système (détection, ouverture et fermeture), puis son GRAFCET.

## SOLUTIONS

**17.1** Pour établir le GRAFCET de la partie opérative de ce système, il convient tout d'abord de définir les actions nécessaires ainsi que les capteurs qui fourniront les informations dont nous avons besoin. En ce qui concerne les actions, on aura :

- avance tapis roulant (que nous nommerons AV TR), cette action étant supposée continue (le tapis est entraîné tant que AV TR est active et est arrêté dans le cas contraire)
- rotation perceuse (que nous nommerons RP), cette action étant également supposée continue
- descente perceuse (DP), action continue
- montée perceuse (MP), action continue également

Côté capteurs, nous avons besoin de détecter la présence d'une pièce prête à être percée, de détecter les positions extrêmes de la perceuse (soit en position haute, soit en position basse correspondant à la profondeur du trou à percer). Soit :

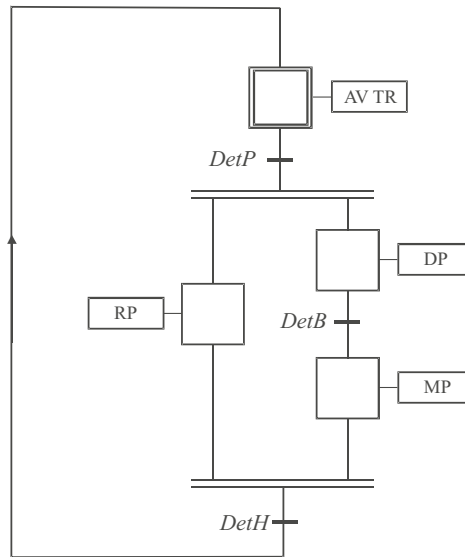
- détection de la pièce : DetP
- détection perceuse en position haute : DetH
- détection perceuse en position basse (trou terminé) : DetB

Nous supposons qu'au démarrage du système la perceuse se trouve inactive (position haute et moteur à l'arrêt) et que le tapis roulant est activé.

Le premier événement qui inactivera cette première étape est l'arrivée d'une pièce en position de perçage (transition DetP). La perceuse doit alors se mettre en route et descendre. C'est une divergence en ET qui doit activer ces deux étapes. Quand le trou est percé (transition DetB), la perceuse doit remonter et s'arrêtera de tourner lorsqu'elle aura rejoint sa position haute (transition DetH). C'est aussi à ce moment-là que le tapis roulant peut avancer à nouveau.



La figure 17.21 présente le GRAFCET du système.



**Figure 17.21** GRAFCET du système de forage

**17.2** Les actions nécessaires au fonctionnement de la machine sont les suivantes :

- Afficher confirmation de commande (CONF)
- Afficher présence café (PC)
- Afficher absence café (AC)
- Afficher absence eau (AE)
- Moudre café (MC)
- Introduction café moulu (INTRO)
- Chauffer eau (CHAUFF)
- Ouvrir vanne (OUV)
- Fermer vanne (FEV)

En ce qui concerne les capteurs, il nous faut détecter :

- l'appui sur le bouton-poussoir (START)
- la présence ou l'absence de grains (CAFE et /CAFE resp.)
- la présence ou l'absence d'eau (EAU et /EAU resp.)
- la fin de la mouture du café (MOULU)
- la mise en place du café moulu dans le réceptacle (PRET)
- la fin du chauffage de l'eau (CHAUD)
- la fin du remplissage de la tasse (FINI)

Nous supposons qu'au démarrage du système la machine se trouve en attente d'appui sur le bouton-poussoir. Dès que START est détecté, cette étape d'attente est désactivée et la confirmation de la commande est affichée. Il convient à présent de vérifier la présence de grains. Si la transition /CAFE est vraie (absence de café), le voyant correspondant s'allume (étape AC) et la machine retourne en position d'attente. Dans le cas contraire, le voyant présence de café s'allume et on peut alors vérifier la présence de l'eau. Les deux séquences commandées respectivement par l'absence ou la présence de café correspondent à une divergence en OU.

Le même principe est appliqué pour la détection de l'eau : si la transition /EAU est vraie (cuve d'eau vide), le voyant d'absence d'eau s'allume et la machine retourne en position d'attente. Dans le cas contraire, on peut alors mouliner le café (étape MC). Ceci étant fait (transition MOULU), le café est introduit dans le réceptacle (étape INTRO puis transition PRET). De l'eau est chauffée (étape CHAUFF) et dès que l'eau est à bonne température (transition CHAUD), on ouvre la vanne et on la referme lorsque la tasse est pleine.

On notera la présence d'une transition toujours vraie à chaque endroit du schéma redirigé vers l'étape initiale. Ces transitions permettent de proposer un schéma normé dans lequel deux étapes ne peuvent se succéder que si elles sont séparées par une transition.

La figure 17.22 présente le GRAFCET du système.

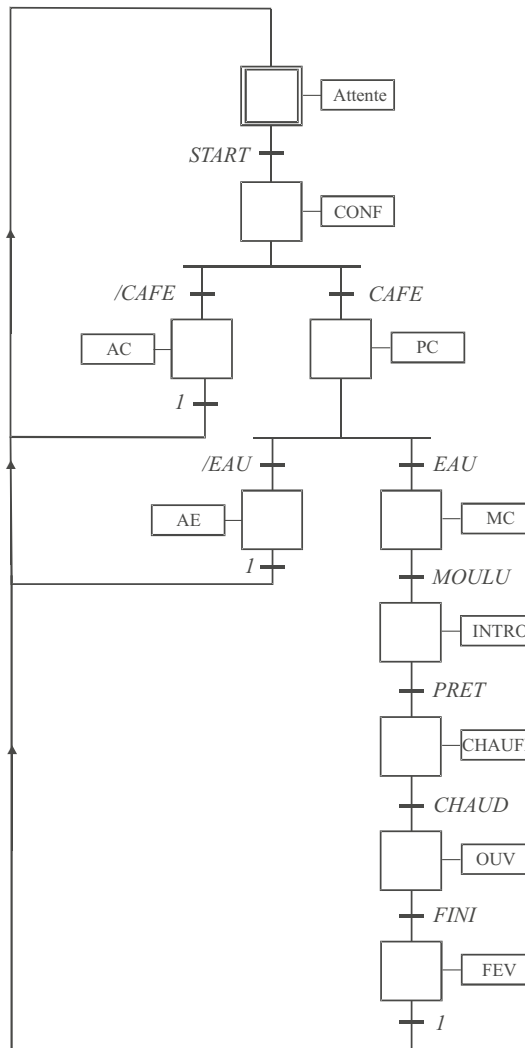


Figure 17.22 GRAFCET de la machine à café

17.3 Cinq actions concernent directement la commande du moteur :

- Ouverture à vitesse normale (OUV MAX)
- Ouverture à vitesse faible (OUV MIN)

- Fermeture à vitesse normale (FERM MAX)
- Fermeture à vitesse faible (FERM MIN)
- Arrêt moteur (ARRET)

Une action de temporisation sera également nécessaire : TEMPO.

La liste des capteurs nécessaires est déjà explicitée dans l'énoncé. Nous noterons toutefois /DETECT la transition correspondant à l'absence de détection d'utilisateur par le capteur de présence.

Nous supposons qu'au démarrage du système la porte se trouve fermée. Dès que la transition DETECT est vraie, cette étape d'attente est désactivée et la porte s'ouvre à vitesse normale (étape OUV MAX) jusqu'à la transition C3 qui active l'étape OUV MIN. La transition C4, correspondant à l'ouverture maximale de la porte, active l'arrêt du moteur (ARRET). Si plus personne ne se trouve dans le champ du détecteur de présence (transition /DETECT), l'étape TEMPO est activée. À la fin de l'étape de temporisation, il convient de vérifier à nouveau que personne ne se trouve dans le champ de détection avant de refermer la porte. Si tel n'est pas le cas, on reboucle sur un cycle de temporisation. La figure 17.23 présente le GRAFCET du système.

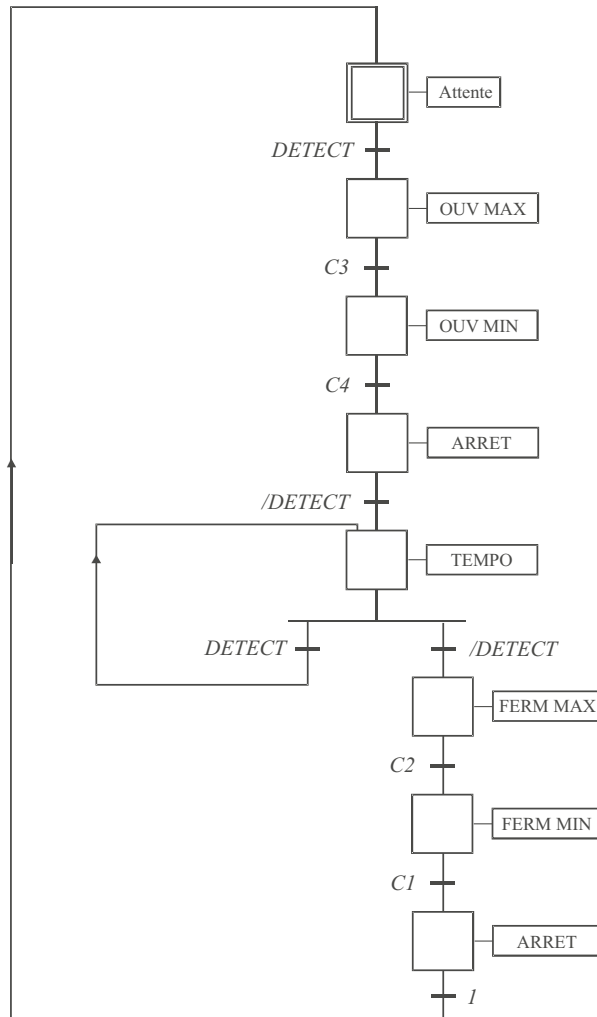


Figure 17.23 GRAFCET de la porte coulissante automatique

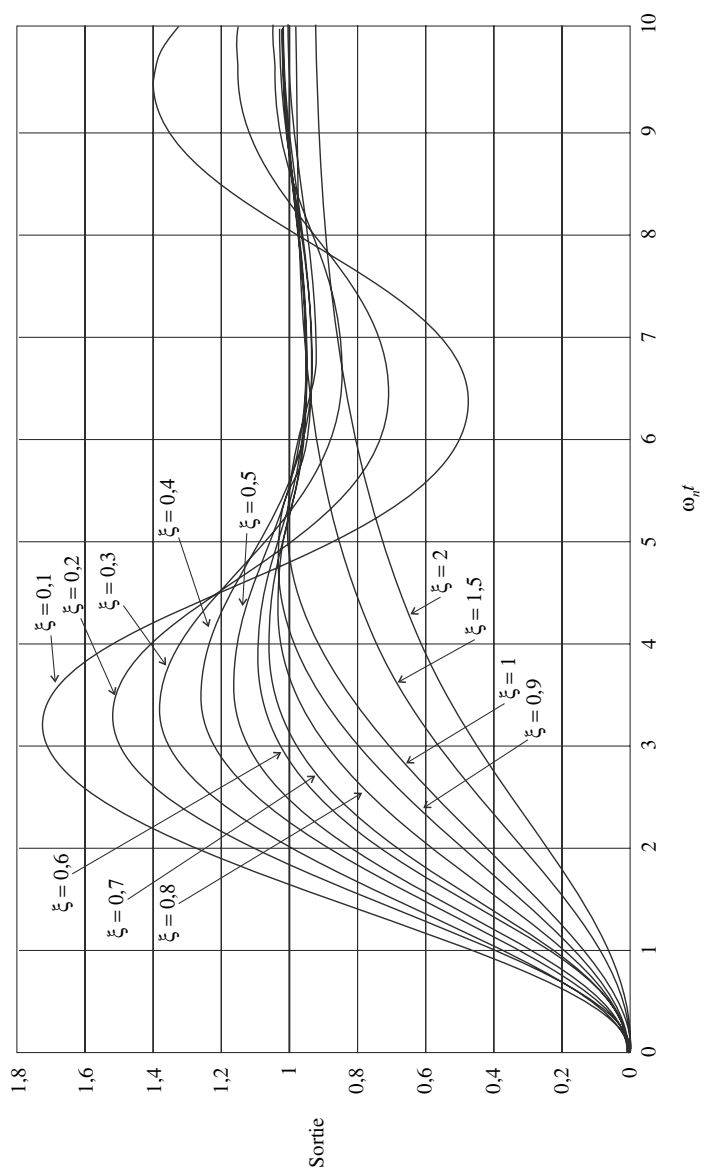
## ANNEXE A

# Table des transformées de Laplace

Fonctions temporelles	Transformées de Laplace
$u(t) = 1$	$U(p) = \frac{1}{p}$
$v(t) = kt$	$V(p) = \frac{k}{p^2}$
$s(t) = t^n$	$S(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$
$s(t) = e^{-at}$	$S(p) = \frac{1}{p+a}$
$s(t) = t e^{-at}$	$S(p) = \frac{1}{(p+a)^2}$
$s(t) = 1 - e^{-at}$	$S(p) = \frac{a}{p(p+a)}$
$s(t) = e^{-at} - e^{-bt}$	$S(p) = \frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$
$s(t) = t - \frac{1}{a} + \frac{e^{-at}}{a}$	$S(p) = \frac{1}{p^2(p+a)}$
$s(t) = 1 + \frac{b}{a-b} e^{-at} - \frac{a}{a-b} e^{-bt}$	$S(p) = \frac{ab}{p(p+a)(p+b)}$
$s(t) = 1 - e^{-at} - at e^{-at}$	$S(p) = \frac{a^2}{p(p+a)^2}$
$s(t) = \sin \omega t$	$S(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$s(t) = \cos \omega t$	$S(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$s(t) = e^{-at} \sin \omega t$	$S(p) = \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$s(t) = e^{-at} \cos \omega t$	$S(p) = \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$

## ANNEXE B

# Abaque des réponses indicielles d'un système du second ordre



## ANNEXE C

### Table des transformées en $z$

Fonctions temporelles	Transformées en $z$
$\delta(t)$	$\Delta(z) = 1$
$u(t) = 1$	$U(z) = \frac{z}{z-1}$
$v(t) = kt$	$V(z) = \frac{zT_e}{(z-1)^2}$
$s(t) = t^2$	$S(z) = \frac{z(z+1)T_e^2}{(z-1)^3}$
$s(t) = e^{-at}$	$S(z) = \frac{z}{z - e^{-aT_e}}$
$s(t) = t e^{-at}$	$S(z) = \frac{zT_e e^{-aT_e}}{(z - e^{-aT_e})^2}$
$s(t) = 1 - e^{-at}$	$S(z) = \frac{z(1 - e^{-aT_e})}{(z-1)(z - e^{-aT_e})}$
$s(t) = e^{-at} - e^{-bt}$	$S(z) = \frac{z}{z - e^{-aT_e}} - \frac{z}{z - e^{-bT_e}}$
$s(t) = t - \frac{1}{a} + \frac{e^{-at}}{a}$	$S(z) = \frac{zT_e}{(z-1)^2} - \frac{z(1 - e^{-aT_e})}{a(z-1)(z - e^{-aT_e})}$
$s(t) = 1 + \frac{b}{a-b} e^{-at} - \frac{a}{a-b} e^{-bt}$	$S(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{bz}{(a-b)(z - e^{-aT_e})} - \frac{az}{(a-b)(z - e^{-bT_e})}$

$s(t) = 1 - e^{-at} - at e^{-at}$	$S(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT_e}} - \frac{zaT_e e^{-aT_e}}{(z-e^{-aT_e})^2}$
$s(t) = \sin \omega t$	$S(z) = \frac{z \sin \omega T_e}{z^2 - 2z \cos \omega T_e + 1}$
$s(t) = \cos \omega t$	$S(z) = \frac{z(z - \cos \omega T_e)}{z^2 - 2z \cos \omega T_e + 1}$
$s(t) = e^{-at} \sin \omega t$	$S(z) = \frac{z e^{-aT_e} \sin \omega T_e}{z^2 - 2z e^{-aT_e} \cos \omega T_e + e^{-2aT_e}}$
$s(t) = e^{-at} \cos \omega t$	$S(z) = \frac{z^2 - z e^{-aT_e} \cos \omega T_e}{z^2 - 2z e^{-aT_e} \cos \omega T_e + e^{-2aT_e}}$

## ANNEXE D

# Équivalence entre fonctions de transfert en temps continu et en temps discret

Il n'existe pas, à proprement parler, d'équivalents exacts entre une fonction de transfert en temps continu, de type Laplace et une fonction de transfert en temps discret en  $z$ . Les équivalents proposés sont plus ou moins précis, plus ou moins efficaces et plus ou moins délicats à manipuler. Le choix d'un type d'équivalent est susceptible d'influencer la validité des résultats en termes de réponse temporelle ou de représentation fréquentielle.

Équivalence à la dérivation :

$$p \leftrightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e}$$

Équivalence à l'intégration :

$$p \leftrightarrow \frac{2(1 - z^{-1})}{T_e(1 + z^{-1})}$$

Équivalence modale :

$$p - p_i \leftrightarrow z - e^{p_i T_e}$$

La table ci-dessous propose quelques équivalents basés sur l'équivalence à la réponse impulsionnelle et justifiés, pour les plus simples, par l'équivalence modale. Ils sont spécifiquement adaptés pour conserver le gain statique du système. Ces équivalents peuvent être obtenus par la relation :

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \times Z \left[ \frac{G(p)}{p} \right] = \frac{z-1}{z} \times Z \left[ \int g(t) dt \right]$$

où  $G(p)$  est la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle du système à temps continu.



Fonction de transfert en temps continu	Fonction de transfert en temps discret
$G(p) = \frac{1}{p}$	$G(z) = \frac{T_e}{z - 1}$
$G(p) = \frac{1}{p + a}$	$G(z) = \frac{1 - e^{-aT_e}}{a(z - e^{-aT_e})}$
$G(p) = \frac{1}{(p + a)(p + b)}$	$G(z) = \frac{(1 - e^{-aT_e})(1 - e^{-bT_e})}{ab(z - e^{-aT_e})(z - e^{-bT_e})}$
$G(p) = \frac{1}{p(p + a)}$	$G(z) = \frac{T_e}{a(z - 1)} - \frac{(1 - e^{-aT_e})}{a^2(z - e^{-aT_e})}$

## ANNEXE E

# Formulaire

### ► Trigonométrie

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
- $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$
- $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\tan(\pi + x) = \tan x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$
- $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\tan(-x) = -\tan x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\tan(\pi - x) = \tan x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$
- $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$
- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$
- $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$
- $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$

### ► Nombres complexes

- $z = a + jb$
- $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$
- $(z_1 z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|z^*| = |z|$
- $z^* z = |z|^2$
- $e^{jx} = \cos x + j \sin x$
- $(\cos x + j \sin x)^n = \cos nx + j \sin nx$
- $z^* = a - jb$
- $(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*$
- $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- $\arg z = \arctan \frac{b}{a}$
- $\arg z^* = -\arg z$
- $z = |z| e^{j \arg z}$
- $(\rho e^{j\theta})^* = \rho e^{-j\theta}$

### ► Dérivées

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- $(u^n)' = nu^{n-1}u'$
- $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
- $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $(u[v(x)])' = [u \circ v(x)]' = u'[v(x)] \cdot v'(x)$
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

### ► Infiniments petits (x voisin de 0)

- $(1 + x)^n \approx 1 + nx$
- $\frac{1}{1 + x} \approx 1 - x$
- $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{2}$
- $\ln(1 + x) \approx x$
- $\sin x \approx x$  (x en rad)
- $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$  (x en rad)
- $(1 - x)^n \approx 1 - nx$
- $\frac{1}{1 - x} \approx 1 + x$
- $\sqrt{1 - x} \approx 1 - \frac{x}{2}$
- $e^x \approx 1 + x$
- $\tan x \approx x$  (x en rad)

## ► Primitives

$$\bullet \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C^{\text{te}}$$

$$\bullet \int \sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a} + C^{\text{te}}$$

$$\bullet \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C^{\text{te}}$$

$$\bullet \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C^{\text{te}}$$

$$\bullet \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C^{\text{te}}$$

$$\bullet \int \cos ax dx = \frac{\sin ax}{a} + C^{\text{te}}$$

$$\bullet \int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C^{\text{te}}$$

$$\bullet \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C^{\text{te}}$$

$$\bullet \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C^{\text{te}}$$

$$\bullet \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C^{\text{te}}$$

## ANNEXE F

# Memento de calcul matriciel

### ► Addition de matrices

On ne peut additionner que des matrices de mêmes dimensions  $n \times m$  :

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{A}] + [\mathbf{B}] \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

### ► Multiplications de matrices

On ne peut multiplier une matrice  $[\mathbf{A}]$  de dimension  $n \times m$  ( $n$  lignes et  $m$  colonnes) que par une matrice  $[\mathbf{B}]$  de dimension  $m \times p$ , le résultat donnant une matrice  $[\mathbf{C}]$  de dimension  $n \times p$ . La multiplication n'est pas commutative. Dans l'écriture qui suit,  $[\mathbf{A}]$  est multipliée à droite par  $[\mathbf{B}]$ .

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{A}][\mathbf{B}] \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$$

Le produit d'une matrice ligne, à droite par une matrice colonne, les deux matrices étant respectivement de dimensions  $1 \times m$  et  $m \times 1$  donne donc un scalaire. En revanche, la multiplication d'une matrice colonne, à droite par une matrice ligne, les deux matrices étant respectivement de dimensions  $n \times 1$  et  $1 \times p$  donne une matrice de dimension  $n \times p$ .

### ► Matrice nilpotente

Une matrice est dite nilpotente s'il existe un entier  $k$  tel que  $[\mathbf{A}]^k = [\mathbf{0}]$  (matrice nulle). Toutes les puissances de  $[\mathbf{A}]$  supérieures à  $k$  sont nulles également.

### ► Transposée d'une matrice

La transposée  $[\mathbf{A}]^T$  d'une matrice  $n \times m$   $[\mathbf{A}]$  ( $n$  lignes et  $m$  colonnes) est la matrice  $m \times n$  obtenue en permutant les lignes et les colonnes de  $[\mathbf{A}]$ .

► Déterminant d'une matrice carrée de dimension  $n$

$$\det [\mathbf{A}] = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det [\mathbf{M}_{ij}], \text{ quelle que soit la valeur de } j$$

$[\mathbf{M}_{ij}]$  est la matrice extraite de  $[\mathbf{A}]$  en supprimant la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne.

$(-1)^{i+j} \det [\mathbf{M}_{ij}]$  est le cofacteur de  $a_{ij}$ .

► Adjointe d'une matrice carrée de dimension  $n$

La matrice adjointe d'une matrice  $[\mathbf{A}]$  est la matrice  $\text{adj} [\mathbf{A}]$  obtenue en transposant la matrice des cofacteurs.

► Inverse d'une matrice carrée de dimension  $n$

La matrice inverse d'une matrice  $[\mathbf{A}]$  est la matrice  $[\mathbf{A}]^{-1}$  telle que :

$$[\mathbf{A}] [\mathbf{A}]^{-1} = [\mathbf{A}]^{-1} [\mathbf{A}] = \mathbf{I}$$

La matrice  $[\mathbf{A}]^{-1}$  est égale à la matrice adjointe de  $[\mathbf{A}]$  divisée par son déterminant :

$$[\mathbf{A}]^{-1} = \frac{\text{adj} [\mathbf{A}]}{\det [\mathbf{A}]}$$

Une matrice est dite régulière si elle est inversible, autrement dit, si son déterminant est non nul. Dans le cas contraire, elle est dite singulière.

► Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice est la dimension du plus grand déterminant non nul que l'on peut extraire d'une matrice en supprimant lignes ou colonnes. Une matrice carrée régulière est toujours de rang  $n$ .

► Matrice carrée diagonale de dimension  $n$

Une matrice carrée est dite diagonale si tous ses éléments  $a_{ij}$  avec  $i \neq j$  sont nuls. Seule la diagonale  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  contient des éléments non nuls.

► Matrice identité de dimension  $n$

La matrice identité est la matrice diagonale notée  $\mathbf{I}$  dont les éléments de la diagonale sont tous égaux à 1.

► Équation caractéristique d'une matrice carrée de dimension  $n$

L'équation caractéristique est formée à partir du polynôme caractéristique de la matrice. Les solutions de l'équation caractéristique sont les valeurs propres  $\lambda_i$  de  $[\mathbf{A}]$ .

$$\det [\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}] = 0$$

► Vecteurs propres d'une matrice carrée de dimension  $n$

Les vecteurs propres d'une matrice carrée  $[\mathbf{A}]$  sont les vecteurs  $(\underline{\mathbf{v}}_i)$  tels que :

$$[\mathbf{A}] (\underline{\mathbf{v}}_i) = \lambda_i (\underline{\mathbf{v}}_i) \text{ avec } (\underline{\mathbf{v}}_i) \neq (\underline{\mathbf{0}})$$

Il existe une infinité de vecteurs propres pour une matrice : toute combinaison linéaire de vecteurs propres est aussi un vecteur propre. Toute matrice  $[\mathbf{T}]$  formée de  $n$  vecteurs propres linéairement indépendants est appelée matrice modale de  $[\mathbf{A}]$ .

► Diagonalisation d'une matrice carrée de dimension  $n$

La transformation  $[\mathbf{T}]^{-1} [\mathbf{A}] [\mathbf{T}]$ , où  $[\mathbf{T}]$  est une matrice modale de  $[\mathbf{A}]$ , donne une matrice diagonale  $[\mathbf{\Delta}]$  formée des valeurs propres de  $[\mathbf{A}]$ .





# Index

- A**
- accessibilité 307, 335
  - action
    - conditionnelle 371
    - mémorisée 371
    - temporisée 371
  - asservissements
    - échantillonnés 239
    - non linéaires séparables 179
  - automates programmables 366
  - automatismes séquentiels 366
- B**
- bloqueur 247
    - d'ordre 0 248
  - boucle
    - à retour unitaire 93
    - de régulation 91
    - de retour 91
- C**
- chaîne
    - de commande 91
    - de retour 91
    - directe 91
  - changement d'échelle 7
  - cols 197
  - commandabilité 307
    - complète 308
    - des systèmes à temps discret 335
    - en modes 349
  - commande
    - en boucle fermée 90
    - en boucle ouverte 89
    - par retour d'état 347
  - consigne 90
  - constante de temps 65
  - construction de Kalman 309
  - contour de Nyquist 108
  - convergence
    - en ET 369
    - en OU 370
  - conversion analogique numérique 205
  - correcteur 148
    - à action dérivée 150
    - à avance de phase 156
    - à retard de phase 153
    - intégral 149
    - numérique équivalent 285
    - proportionnel 148
  - correction numérique 275
  - critère
    - algébrique de Jury 243
    - algébrique de Routh 106
    - d'observabilité 312, 336
    - de commandabilité 308, 335
    - de commandabilité en modes 349
    - de Kalman 308
    - de Nyquist 110
    - du revers 113
    - mathématique de stabilité 104, 241
- D**
- décomposition en série de Fourier 25
  - dépassement 135
  - diagonalisation de la matrice de transition 301
  - diagramme de Nyquist 50
  - discrétisation d'un correcteur continu 283
  - dispositifs de type
    - ARMA 214
    - MA en temps différé 214
    - MA en temps réel 214
  - divergence
    - en ET 370
    - en OU 370
  - domaine de linéarité 173
- E**
- écart 91
  - échantillonnage 205
  - échelon
    - de vitesse 9
    - unité 9
  - unité échantillonné 209

égalité de Parseval 30  
entrées canoniques 64  
équation  
  d'observation 299  
  de commande 299  
équivalence  
  à l'intégration 223  
  à la dérivation 221  
  modale 223  
équivalent asymptotique 44  
erreur  
  d'estimation 354  
  de position 128, 249  
  de prédiction 357  
  de traînage 130  
  de vitesse 130, 250  
  statique 128  
estimateur d'état 349  
estimation de l'état 354  
étape 367  
état du système 297  
évolution fugace 373  
excursion du signal de sortie 174

## F

facteur  
  d'amortissement 70  
  de résonance 78  
fonction de transfert 11  
  en  $z$  215  
  en boucle fermée 93  
  en boucle ouverte 93  
  en fréquence 219  
  généralisée 189  
foyers 197  
fréquence fondamentale 25

## G

gain  
  complexe équivalent 181  
  réel 41, 219  
  statique 68  
gouvernabilité 308, 335  
GRAFCET 366

## H

harmoniques 25

## I

impulsion  
  de Dirac 10  
  unité échantillonnée 208  
  unitaire 10  
intégrale de Mellin-Fourier 223  
isoclines 195

## J

jeton 368

## L

liaison 368  
lieu  
  critique 182  
  de Cypkin 192

## M

marge  
  de gain 114  
  de phase 116  
  de stabilité 113  
matrice  
  d'observabilité 312, 336  
  de commandabilité 308, 335  
  de commande 298, 333  
  de transition 300, 334  
méthode  
  de Cayley-Hamilton 303  
  de Cypkin 183  
  du plan de phase 195  
  du premier harmonique 181  
  polynomiale 287  
modes  
  commandables 311  
  du système 303

## N

nœuds 197  
non linéarités de type relais 178

## O

observabilité 311  
  des systèmes à temps discret 336  
observateur  
  asymptotique 354  
  d'état 349  
opérateurs de décalage 332  
original 8  
  d'une fonction de transfert 12

oscillations autonomes 192

## P

performances 94  
 période d'échantillonnage 206  
 perturbations 90  
 point critique 110  
 pôles de la fonction de transfert 11  
 pompage 191  
 précision d'un système asservi 128  
 prédiction de l'état 334  
 principe de causalité 4  
 pseudo-période 72  
 pseudo-pulsation 72  
 pulsation  
   de coupure à 0 dB 67  
   de résonance 78  
   propre 70

## R

raie 24  
 rampe 9  
 rapidité des systèmes régulés 131  
 réceptivité 371  
 régime  
   amorti 72  
   critique 72  
   oscillatoire amorti 72  
 réponse  
   impulsionnelle 64  
   indicielle 64  
   pile 352  
 représentation  
   compagne commandable 315, 338  
   compagne observable 318, 339  
   d'état 297  
   fréquentielle 23  
   modale 313, 337  
   série 314, 338  
 résonance 77

## S

saturation 174  
 seuil de convergence 5  
 signal 4  
 signaux  
   non périodiques à énergie finie 28  
   périodiques 25

sommets 197  
 spectre 24, 207  
   du signal échantillonné 217  
 stabilité 93, 189, 241  
 synchronisation amont 369  
 systèmes  
   à événements discrets 366  
   à hystérésis 178  
   linéaires 5  
   non commandables 311  
   non observables 312  
   tout ou rien 177

## T

table des transformées de Laplace 11, 382  
 temps  
   de montée 132  
   de réponse 66, 131  
 théorème  
   de Cauchy 108  
   de la valeur finale 8, 212  
   de la valeur initiale 8  
   de Shannon 208  
   des résidus 223  
   du retard 7, 212  
 trajectoires de phase 195  
 transformation  
   bilinéaire 223  
   de Laplace 5  
 transformée  
   de Fourier 28  
   de Fourier à temps discret 217  
   de Laplace d'une dérivée 6  
   de Laplace d'une primitive 6  
   de Laplace inverse 8  
   en  $z$  210  
 transition 367, 368

## V

variables d'état 297  
   en temps discret 332  
 vecteur  
   d'état 298  
   de gain 347  
 vitesse d'observation 355

## Z

zéros de la fonction de transfert 11





Pour l'éditeur, le principe est d'utiliser des papiers composés de fibres naturelles, renouvelables, recyclables et fabriquées à partir de bois issus de forêts qui adoptent un système d'aménagement durable.

En outre, l'éditeur attend de ses fournisseurs de papier qu'ils s'inscrivent dans une démarche de certification environnementale reconnue.

