CHAPITRE I :

NOTION DE FORCES

A- FORCES APPLIQUEES EN UNE PARTICULE :

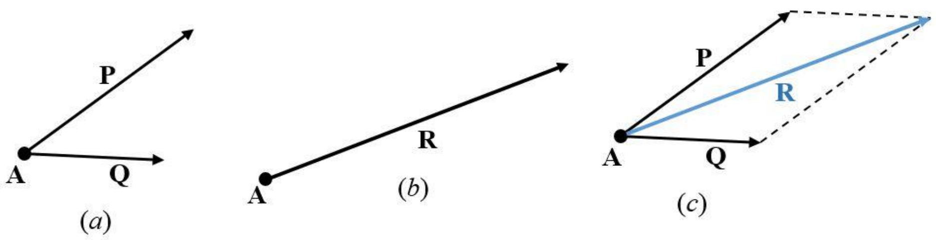
On distinguera de deux cas : les **forces coplanaires** c'est-à-dire des forces qui appartiennent au même plan et les **forces tridimensionnelles**.

I- FORCES COPLANAIRES :

1- Résultante de deux forces agissant sur une particule :

Une **force** représente l'action d'un corps sur un autre corps et est généralement caractérisée par son **point d'application**, sa **grandeur**, sa **direction** et son **sens**. Cependant, dans le cas des particules, cas de cette partie, le point d'application est le même que la particule en elle-même. La grandeur encore appelé intensité s'exprime à l'aide d'un nombre et de ses unités. Dans le cas de la force, son unité SI sont le **Newton (N)**. Pour ce qui est de la direction, elle est définie par la **ligne d'action**, droite infinie le long de laquelle la force agit. Elle peut être repérée en fonction des **angles** bien précis dans le repère d'étude.

L'expérience montre que nous pouvons remplacer deux forces **P** et **Q** agissant sur une particule A (*voir figure a ci-contre*) par une force unique **R** produisant le même effet (*voir figure b ci-contre*) on nomme cette force équivalente **résultante des forces P et Q**. Nous pouvons déterminer **R** en construisant un parallélogramme dont les cotés adjacents correspondent à **P** et **Q** (*voir figure c ci-dessous*). ***La diagonale du parallélogramme qui passe par le point A représente la résultante:*** c'est la **méthode du parallélogramme**.

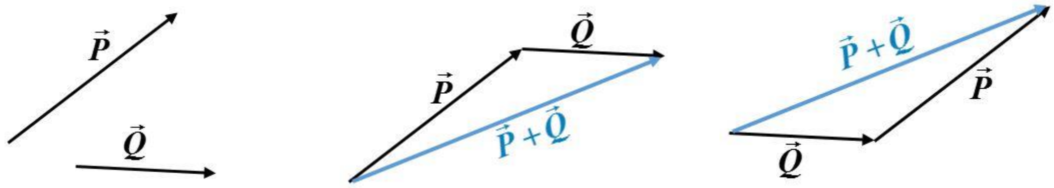


2- Les vecteurs :

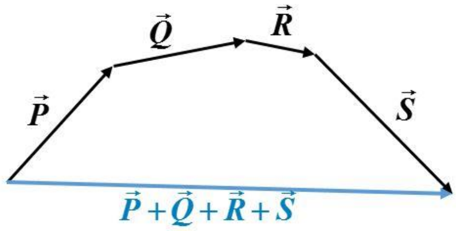
L'addition géométrique de la figure ci-dessus indique clairement que les forces n'obéissent pas aux règles d'addition de l'arithmétique ou de l'algèbre ordinaire. Par exemple, des forces de 4N et 3N faisant un angle droit entre elles donnent une résultante de 5N et non pas de 7N. D'après ce qui précède, on représente une **force** par un **vecteur** tout comme ça sera le cas du **moment de force**. Ainsi une force P sera noté $\vec{P}$.

Le point d'application d'une force agissant sur une particule est la particule elle-même. Nous parlerons alors d'un **vecteur lié** que nous ne pouvons déplacer sans modifier les conditions du problème. Par contre, nous pouvons déplacer librement dans l'espace les vecteurs de certaines quantités physiques (les couples par exemple) ; nous parlons dans ce cas de **vecteurs libres**. Deux vecteurs sont **équipollents** s'ils ont la même grandeur, la même direction et le même sens, quel que soit leurs point d'application. On peut identifier des vecteurs équipollents par le même symbole. Le **vecteur opposé** à $\vec{P}$, note $-\vec{P}$, a la même grandeur que $\vec{P}$ mais il est de sens opposé.

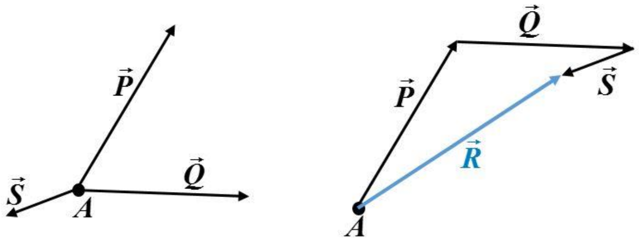
Une autre technique de faire une somme géométrique de deux vecteurs $\vec{P}$ et $\vec{Q}$, autre que la méthode du parallélogramme précédente, consiste à : ***placer bout à bout les vecteurs $\vec{P}$ et $\vec{Q}$, l'origine du second joignant l'extrémité du premier et à tracer ensuite la résultante en reliant l'origine du premier à l'extrémité du second :*** c'est la **méthode du triangle** (*voir figure ci-dessous*).



Il en est de même pour la somme de plus de deux vecteurs coplanaires. En considérant quatre vecteurs coplanaires $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ et $\vec{S}$, la somme de ces quatre vecteurs s'obtient en plaçant bout à bout les trois vecteurs et en joignant l'origine du premier et l'extrémité du dernier (*voir figure ci-contre*).



Considérons une situation où un point **A** est soumis à trois forces $\vec{P}$, $\vec{Q}$ et $\vec{S}$ (on dit qu'elles sont concourantes), la résultante $\vec{R}$ peut être



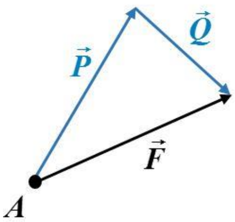
obtenue graphiquement :

3- <u>Décomposition d'un vecteur force :</u>

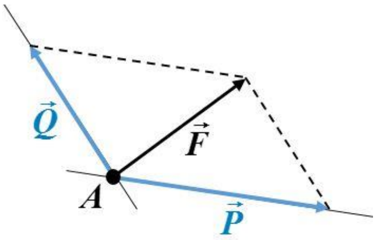
Nous avons vu qu'il est possible de remplacer deux ou plusieurs forces agissant sur une particule par leur résultante, une force unique produisant le même effet que l'ensemble. À l'inverse, nous pouvons remplacer une force $\vec{F}$ appliquée à une particule par deux ou plusieurs forces dont l'action globale produira le même effet que $\vec{F}$ sur la particule. Nous parlons alors des **composantes** de la force initiale $\vec{F}$ et nous les obtenons en décomposant le vecteur $\vec{F}$.

Un vecteur $\vec{F}$ donné peut être décomposé de mille et une façons. En pratique, les ensembles de *deux composantes* $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ sont les plus intéressants. Nous retiendrons deux cas intéressants :

- ***L'une des composantes, $\vec{P}$, est connue.*** Nous devons déterminer la seconde composante $\vec{Q}$. en appliquant la méthode du triangle, c'est-il-dire en plaçant l'origille du vecteur $\vec{P}$ sur celle du vecteur $\vec{F}$ (*voir figure ci-contre*); nous obtenons alors la grandeur et la direction du vecteur $\vec{Q}$ en les mesurant sur le schéma dessiné à l'échelle ou en utilisant la trigonométrie.

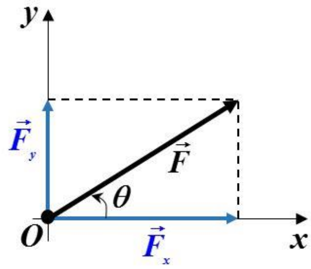


- ***La ligne d'action de chacune des composantes est connue***. La règle du parallélogramme donne la grandeur et le sens des composantes ; il s'agit de projeter l'extrémité du vecteur $\vec{F}$ en abaissant des droites parallèles aux lignes d'action (*voir figure ci-contre*), délimitant ainsi le parallélogramme. Il suffit ensuite de définir les composantes $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ en les mesurant sur le graphique ou en appliquant les formules trigonométriques.



4- <u>Composantes rectangulaires d'une force et vecteurs unitaires:</u>

La résolution de plusieurs problèmes est habituellement simplifiée si on décompose les forces en deux **composantes perpendiculaires** entre elles. La figure ci-contre montre la décomposition d'un vecteur $\vec{F}$ en ses composantes $\vec{F}_x$, le long de l'axe des *x*, et $\vec{F}_y$, orientée selon l'axe des *y*. Le parallélogramme devient alors un **rectangle** et les composantes $\vec{F}_x$ et $\vec{F}_y$ sont appelées **composantes rectangulaires**.

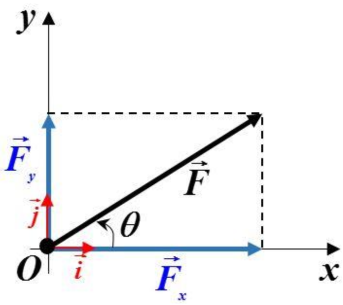


Considérons maintenant deux vecteurs de grandeur unitaire dirigés respectivement selon le sens des *x* et des *y* positifs. Ces vecteurs sont appelés **vecteurs unitaires** et représentés par les symboles $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Nous pouvons donc écrire (voir figure ci-contre) :

$$\underline{\underline{\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}}}$$

Avec

$$\underline{\underline{\vec{F}_x = F_x\vec{i}}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\vec{F}_y = F_y\vec{j}}}$$



Ainsi, F_x et F_y sont les **composantes scalaires** de la force $\vec{F}$ tandis que $\vec{F}_x$ et $\vec{F}_y$ sont les **composantes vectorielles** de la force $\vec{F}$. Si nous connaissons la force $\vec{F}$ et l'angle θ, en exploitant les relations trigonométriques (prise dans le sens trigonométrique ou sens contraire des aiguilles d'une montre), nous avons :

$$\underline{\underline{F_x = F\cos\theta}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{F_y = F\sin\theta}} \quad \text{avec } \theta \in [0, 2\pi]$$

Nous pouvons à partir de ce qui précède, avoir:

$$\underline{\underline{\tan\theta = \frac{F_y}{F_x}}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}}}$$

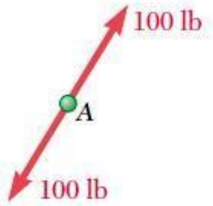
La somme de vecteurs peut également se faire en utilisant les composantes. Considérons trois vecteurs $\vec{P} = P_x\vec{i} + P_y\vec{j}$, $\vec{Q} = Q_x\vec{i} + Q_y\vec{j}$ et $\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j}$. Le vecteur somme $\vec{S}$ de $\vec{P}$, $\vec{Q}$ et $\vec{R}$ sera tel que:

$$\underline{\underline{\vec{S} = S_x\vec{i} + S_y\vec{j}}} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{S_x = P_x + Q_x + R_x}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{S_y = P_y + Q_y + R_y}}$$

5- <u>Forces et équilibre dans le plan :</u>

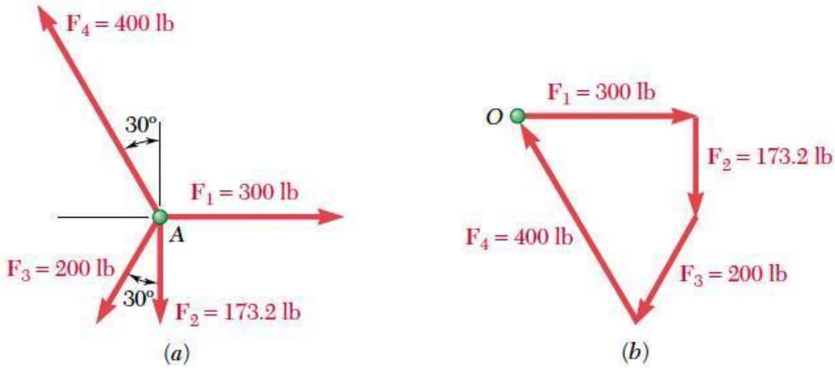
Maintenant que nous avons vu comment additionner des forces, nous pouvons procéder à un des concepts principaux dans ce cours: l'équilibre d'une particule. Le raccordement entre l'équilibre et la somme de forces est très direct: une particule est en équilibre seulement quand la somme des forces agissant sur elle est zéro.

a. Equilibre d'une particule:



« Quand la résultante de toutes les forces agissant sur une particule est nulle, la particule est dans l'équilibre ».

Une particule subissant au même instant deux forces est dans l'équilibre si les deux forces ont la même intensité et la même ligne d'action mais de sens opposés. La résultante des deux forces est alors nulle, comme montré dans la figure ci-contre.



Un autre cas d'équilibre d'une particule est représenté dans la figure *a* ci-contre où quatre forces agissent sur la particule *A.* Dans la figure *b*, nous employons la règle de polygone pour déterminer la résultante des forces données. À partir du point *O* avec $\vec{F}_1$ et arrangement des forces de mode d'incliner-à-queue, nous constatons que le bout de $\vec{F}_4$ coïncide avec le point de départ *O.* Ainsi, la **résultante** $\vec{R}$ du système de forces indiqué est nulle, et la particule est dans l'équilibre. Le polygone fermé dessiné dans la figure *b* fournit une expression graphique de l'équilibre de *A.* Pour exprimer algébriquement les conditions d'équilibre d'une particule, nous écrivons :

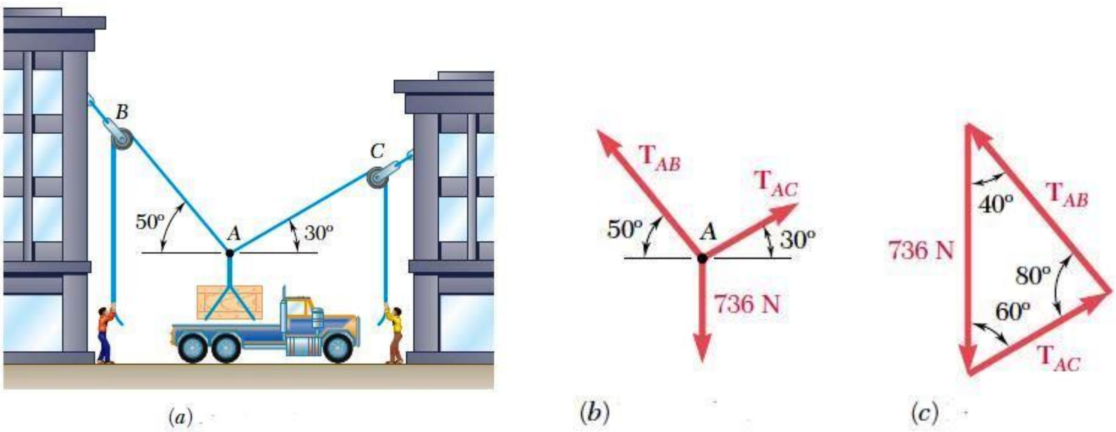
$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

b. Problèmes sur l'équilibre d'une particule : diagramme du corps libre

En pratique, les problèmes de mécanique appliquée s'inspirent des situations réelles, dont les conditions physiques sont représentées en détail sur un **schéma d'ensemble**.

Les méthodes d'analyse élaborées dans les sections précédentes s'appliquent à des systèmes de forces agissant sur une particule. Bon nombre de problèmes mettant en cause des structures réelles peuvent être ramenés à l'équilibre d'une particule localisée en un point de la structure. Nous devons choisir un point stratégique et, sur un schéma séparé, illustrer la particule correspondante avec l'ensemble des forces impliquées. Nous obtenons ainsi un **diagramme du corps libre (DCL)**, appelé aussi **schéma du corps libre**.

À titre d'exemple, considérons la caisse de 75 kg illustrée à ta figure *a* ci-dessous. Initialement posée sur le sol entre deux édifices, cette caisse est soulevée et chargée sur un camion pour être transportée. Pour l'opération, un câble vertical supporte la caisse. Le point A



est attaché à deux cordes passées dans des poulies fixées de part et d'autre, aux points B et C des édifices. Nous voulons connaître la tension dans les cordes *AB* et *AC*.

Pour résoudre ce problème, nous devons d'abord tracer un diagramme du corps libre (DCL) appliqué à une particule en équilibre. Le diagramme doit inclure au moins l'une des tensions cherchées et, idéalement, les deux. Le point *A* assimilé à une particule, s'avère ici un bon choix. La figure *b* ci-dessus montre le DCL des forces exercées sur ce point; nous y voyons les forces appliquées par le câble vertical et par les deux cordes. Le câble produit une force vers le bas, de grandeur égale au poids $W = mg = 75kg \times 9.81\ m/s^2 = 736N$ de la caisse. Nous inscrivons cette valeur sur le DCL. Les deux autres forces sont inconnues mais nous savons qu'elles correspondent aux tensions dans les cordes *AB* et *AC;* nous les nommons donc $\vec{T}_{AB}$ et $\vec{T}_{AC}$ et les traçons à partir du point A dans les directions illustrées sur le schéma d'ensemble (*figure a ci-dessus*). Le DCL ne contient pas d'autre détail.

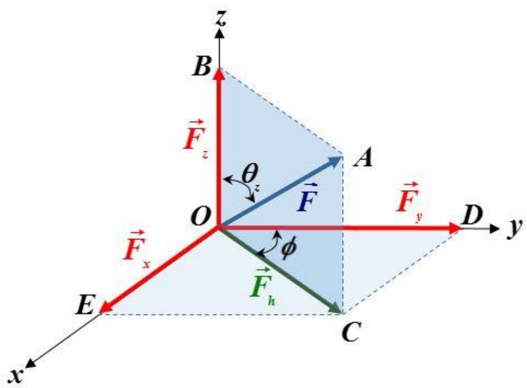
Puisque le point A est en équilibre, les vecteurs des forces placés bout à bout doivent dessiner un triangle fermé, appelé **triangle des forces** (*figure c ci-dessus*). Nous pouvons déterminer graphiquement les grandeurs T_{AB} et T_{AC} si le dessin est à l'échelle ou encore faire appel à la trigonométrie et utiliser la loi des sinus: nous avons alors

$$\frac{T_{AB}}{\sin 60°} = \frac{T_{AC}}{\sin 40°} = \frac{736N}{\sin 80°} \quad \text{soit } T_{AB} = 647N \quad \textit{et} \quad T_{AC} = 480N$$

II- FORCES DANS L'ESPACE :

1- Composantes rectangulaires dans l'espace :

Tous les cas étudiés jusqu'ici se résolvaient dans un plan faisant appel à deux dimensions seulement. Nous abordons maintenant des problèmes situés dans un espace tridimensionnel (3D).



Considérons une force $\vec{F}$ appliquée à l'origine O d'un système de coordonnées rectangulaires (cartésiennes) ***x, y, z***. Pour définir sa direction, nous traçons un plan vertical ***OBAC*** contenant le vecteur $\vec{F}$ (*voir figure ci-contre*). Ce plan passe par l'axe vertical *z* et son orientation est donnée par l'angle ϕ qu'il forme avec le plan *yOz*. L'angle θ_z, situé entre $\vec{F}$ et l'axe des ***z***, définit la direction de $\vec{F}$ dans ce plan. Les composantes scalaires correspondantes de la force $\vec{F}$ s'écrivent :

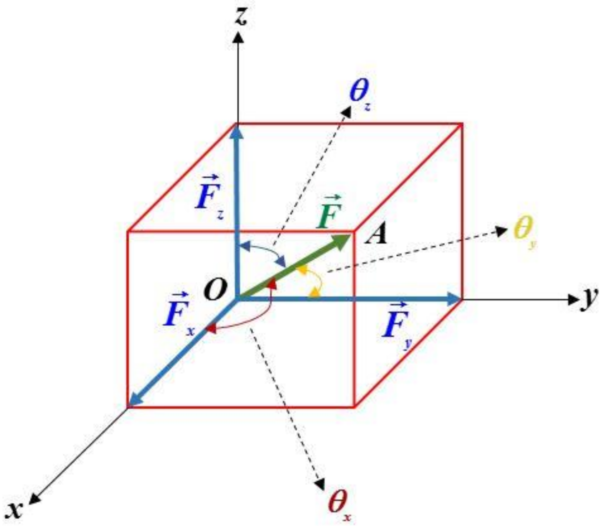
$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

Avec

$$F_x = F_h \sin\phi = F \sin\theta_z \sin\phi\ , \quad F_y = F_h \cos\phi = F \sin\theta_z \cos\phi \quad \text{et} \quad F_z = F\cos\theta_z$$

Nous visualisons plus facilement la relation entre la force F et ses composantes en représentant une boite dont les côtés correspondent à F_x, F_y et F_z (*voir figure ci-dessous*). Le vecteur $\vec{F}$ devient alors la diagonale OA de cette boite. Si nous notons θ_x, θ_y et θ_z, les angles formés par $\vec{F}$ avec les axes ***x***, ***y*** et ***z*** respectivement, nous obtenons :

$$F_x = F\cos\theta_x,$$
$$F_y = F\cos\theta_y,$$
$$F_z = F\cos\theta_z.$$

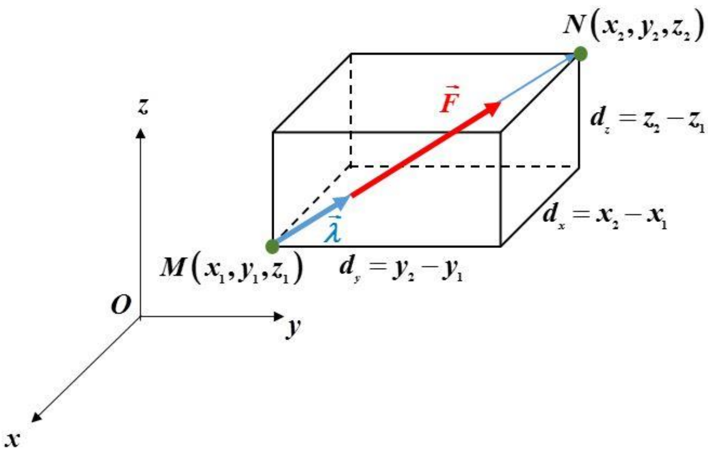


On peut donc définir un **vecteur unitaire** $\vec{\lambda}$ dont la direction est la même que celle de $\vec{F}$:

$$\vec{\lambda} = \cos\theta_x\vec{i} + \cos\theta_y\vec{j} + \cos\theta_z\vec{k}$$

2- Force définie par sa grandeur et deux points de sa ligne d'action :

Dans bien des applications, la direction d'une force $\vec{F}$ est définie par les coordonnées de deux points situés sur sa ligne d'action, nommés $M(x_1, y_1, z_1)$ et $N(x_2, y_2, z_2)$, tel que montré sur la figure ci-contre. Considérons le vecteur $\overrightarrow{MN}$ joignant M et N, dans le même sens que $\vec{F}$, dont les composantes scalaires sont notées d_x, d_y et d_z. Nous pouvons écrire :



$$\overrightarrow{MN} = d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k}$$

Nous déterminons le vecteur unitaire $\vec{\lambda}$, orienté selon la ligne d'action commune à $\vec{F}$ et $\overrightarrow{MN}$, en écrivant :

$$\vec{\lambda} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d}\left(d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k}\right) \quad \text{avec } MN = d$$

Ainsi $\vec{F} = F\vec{\lambda} = \frac{F}{d}\left(d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k}\right)$. On a donc les relations permettant de déterminer les composantes scalaires de la force, données par :

$$F_x = \frac{Fd_x}{d}, \quad F_y = \frac{Fd_y}{d} \text{ et } F_z = \frac{Fd_z}{d}$$

B- CORPS RIGIDES : SYSTEMES DE FORCES EQUIVALENTS

Dans la section **A**, nous avons considéré que les corps étaient ponctuels. Ce point de vue n'est pas toujours possible. En général, un corps est une combinaison d'un grand nombre de particules. Dans ce cas, il faut le considéré ainsi et à cet effet, les forces agissent dans différentes parties du corps et ainsi auront donc différents points d'application.

La plupart des corps considérés en mécanique de base sont rigides. Nous définissons **un corps rigide** comme étant celui qui ne déforme pas. Les structures et les machines réelles ne sont jamais absolument rigides et se déforment sous les charges auxquelles elles sont soumises. Mais bien étant parfois faibles, ces déformations sont plus étudiées dans le cadre de la résistance des matériaux. Dans le ce chapitre, nous nous limitons à l'action des forces sur les corps rigides.

I- FORCES ET MOMENTS:

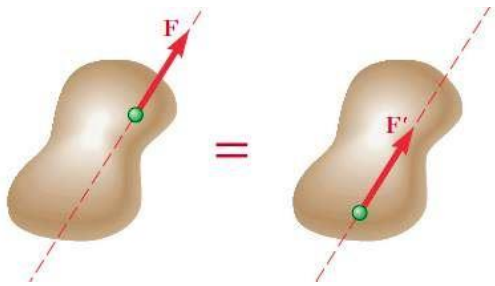
1- Forces internes et externes:

Les forces agissant sur les corps rigides peuvent être séparées dans deux groupes: **les forces externes** et **les forces internes**.

- **Les forces externes** sont exercées par d'autres corps sur le corps rigide à l'étude. Elles sont entièrement responsables du comportement externe du corps rigide, le faisant déplacer (soit par translation, soit par rotation, soit une association des deux types) ou s'assurant qu'il demeure au repos. Nous serons concernés seulement par les forces externes en ce chapitre.
- **Les forces internes** lient les particules formant le corps rigide. Si le corps rigide se compose structurellement de plusieurs pièces, les forces tenant les éléments ensemble sont également définies en tant que forces internes.

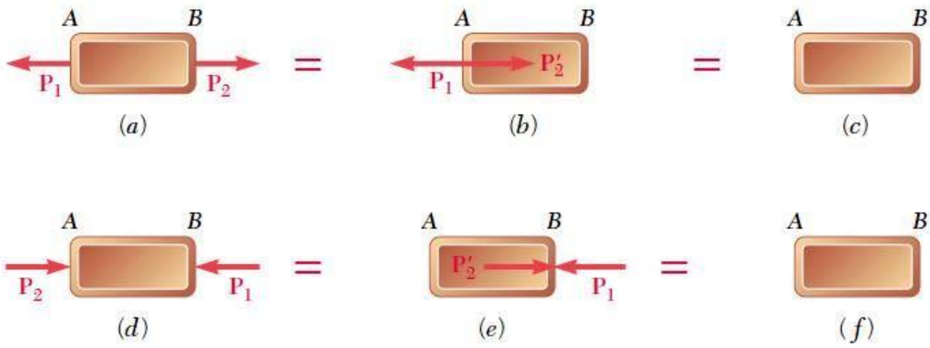
2- Principe de transmissibilité : Forces équivalentes

Le principe de transmissibilité stipule que l'équilibre ou le mouvement d'un corps rigide demeure sans changement si une force $\vec{F}$ agissant à un point donné du corps rigide est remplacée par une force $\vec{F}'$ de la même grandeur et de la même direction, mais agissant à un point différent, **à condition que les deux forces aient la même ligne de l'action** (*voir figure ci-contre*). Les deux forces $\vec{F}$ et $\vec{F}'$ ont le même effet sur le corps rigide et sont dites **équivalentes.** Ce principe, qui stipule que l'action d'une force peut **être transmise** suivant sa ligne d'action, est basé sur l'expérience.



A la section A, nous avons représenté par des vecteurs les forces agissant sur une particule. Le point d'application, la particule elle-même, restant fixe, les vecteurs sont liés. Dans le cas des corps rigides, on peut déplacer la force sur sa ligne d'action, sans conséquence sur l'effet produit. On a donc affaire à des **vecteurs glissants**.

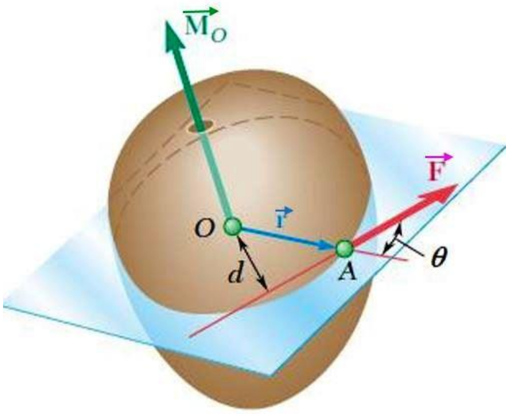
Le principe de transmissibilité et le concept des forces équivalentes ont des limites. Considérons, par exemple, une barre courte AB subissant deux forces axiales, égales et opposées $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ comme montré à la figure (*a*) ci-dessous. Selon le principe de transmissibilité, nous pouvons remplacer la force $\vec{P}_2$ par une force $\vec{P}_2'$ ayant la même intensité, la même direction, et la même ligne de l'action mais agissant *à A* au lieu *de B* (*figure* (*a*)). Les forces $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2'$ agissant sur la même particule peuvent être sommées et puisque ces forces



sont égales et opposées, leur résultante est égale à zéro. Ainsi, en termes de comportement externe, la barre est pseudo-isolée. La même analyse peut être faite en considérant les figures (*d*), (*e*) et (*f*). Cependant, les forces internes et les déformations produites par les deux cas sont clairement différentes. La barre à la figure (*a*) est dans **la traction** et, si elle n'est pas absolument rigide, elle augmente en longueur légèrement tandis que la barre à la figure (*d*) est dans **la compression** et, si elle n'est pas absolument rigide, elle diminue en longueur légèrement. Ainsi, bien que nous puissions employer le principe de transmissibilité pour déterminer les conditions du mouvement ou l'équilibre des corps rigides et pour calculer les forces externes agissant sur ces corps, elle devrait être évitée dans la détermination des forces internes et les déformations.

3- Moment d'une force par rapport à un point :

Considérons une force $\vec{F}$ agissant sur un corps rigide (*voir figure ci-dessous*). Comme nous savons, la force $\vec{F}$ est représentée par un vecteur qui définit sa grandeur et direction. Cependant, l'effet de la force sur le corps rigide dépend également de son point d'application *A*. La position de *A* peut être commodément définie par le vecteur $\vec{r}$ qui joint le point de référence fixe *O* avec *A ;* ce vecteur est appelé **vecteur position de A**. Le vecteur position $\vec{r}$ et la force $\vec{F}$ définissent un plan (*voir figure*).



Le **moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point O** est donné par :

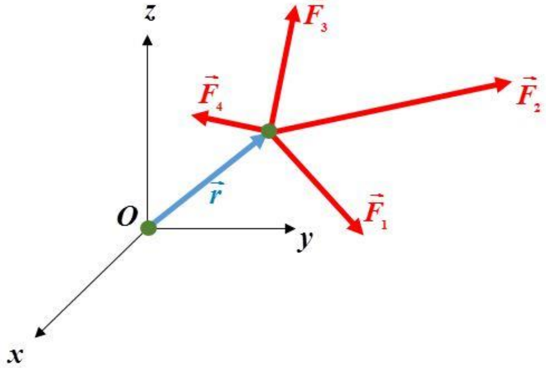
$$\vec{M}_o = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

Suivant la définition du produit vectoriel, le moment $\vec{M}_o$ est orthogonal au plan formé par le vecteur position $\vec{r}$ et la force $\vec{F}$. Le sens du moment sera choisi de telle sorte que le trièdre $\left(\vec{r}, \vec{F}, \vec{M}_o\right)$ soit **direct** (lorsque les vecteurs sont lus dans le sens trigonométrique).

Finalement, on nommant par θ l'angle entre les lignes de l'action du vecteur position $\vec{r}$ et la force $\vec{F}$, nous constatons que l'intensité du moment $\vec{M}_o$ de $\vec{F}$ par rapport au point *O* est :

$$M_o = F \cdot r \cdot \sin\theta = F \cdot d$$

Où ***d*** représente la distance perpendiculaire de *O* à la ligne d'action de $\vec{F}$. Sachant que la tendance d'une force $\vec{F}$ à faire tourner un corps rigide par rapport à un axe qui lui est perpendiculaire est fonction de sa grandeur ***F*** et de la distance qui sépare $\vec{F}$ de cet axe, on peut dire que ***la grandeur de $\vec{M}_o$ mesure la tendance de la force $\vec{F}$ à entraîner la rotation du corps rigide par rapport à un axe fixe dans la direction de $\vec{M}_o$***. Dans le système métrique, où la force se mesure en newtons (N) et la distance en mètres (m), le moment de force s'exprime en newtons-mètres (N.m).



En utilisant la propriété de distributivité du produit vectoriel pour calculer le **moment de la résultante** de plusieurs forces concourante, il vient qu'en considérant les forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots$

concourantes en A (*voir figure ci-dessus*) et en considérant $\vec{r}$ le vecteur position de $\boldsymbol{A}$, qu'on ait :

$$\vec{M}_o = \vec{r} \wedge \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ...\right) = \vec{r} \wedge \vec{F}_1 + \vec{r} \wedge \vec{F}_2 + ...$$

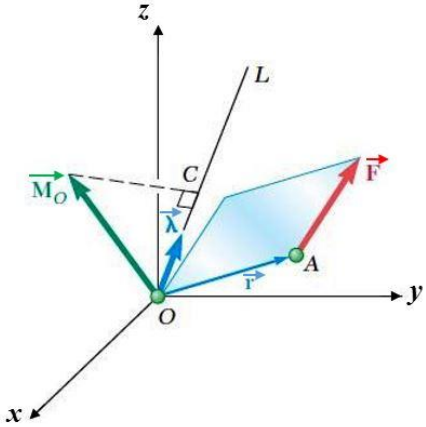
Ainsi

« Le moment de la résultante de plusieurs forces concourantes par rapport à un point O donné est égal à la somme des moments des diverses forces par rapport au même point O. »

Cette propriété aussi connue sous le nom de **théorème de Varignon**, a été établie par le mathématicien français **Pierre Varignon (1654-1722)**.

II- MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT A UN AXE:

Considérons encore une force $\vec{F}$ agissant un corps rigide et le moment $\vec{M}_o$ de cette force autour du point O (*voir figure ci-contre*). Considérons également un axe OL passant par *le point O*.



« ***Nous définissons le moment M_{OL} de $\vec{F}$ autour de l'axe OL comme projection OC du moment $\vec{M}_o$ sur l'axe OL »***.

Supposons que $\vec{\lambda}$ soit le vecteur unitaire de l'axe OL. Ainsi, on peut exprimer M_{OL} sous la forme :

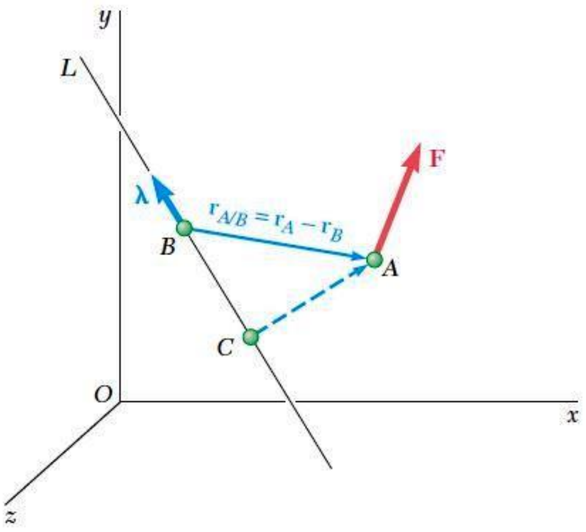
$$M_{OL} = \vec{\lambda} \cdot \vec{M}_o = \vec{\lambda} \cdot \left(\vec{r} \wedge \vec{F}\right)$$

Ceci montre que le moment M_{OL} de $\vec{F}$ par rapport à l'axe OL est un scalaire obtenu par produit mixte de $\vec{\lambda}$, $\vec{r}$ et $\vec{F}$. On peut également exprimer M_{OL} sous la forme du déterminant suivant :

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \text{ avec } \vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z \end{pmatrix}, \ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

« Le moment M_{OL} de $\vec{F}$ par rapport à l'axe OL mesure la tendance de la force $\vec{F}$ de donner au corps rigide une rotation autour de l'axe fixe OL ».

De façon générale, on peut obtenir le moment d'une force $\vec{F}$ appliquée en A par rapport à un axe qui ne passe pas par l'origine en choisissant un point arbitraire B sur l'axe en question (*voir figure ci-contre*) et déterminer la projection sur l'axe BL du moment $\vec{M}_B$ de $\vec{F}$ par rapport à B. L'équation de cette projection est donnée par :



$$M_{BL} = \vec{\lambda} \cdot \vec{M}_B = \vec{\lambda} \cdot \left(\vec{r}_{A/B} \wedge \vec{F}\right) \text{ avec}$$

$$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

Soit

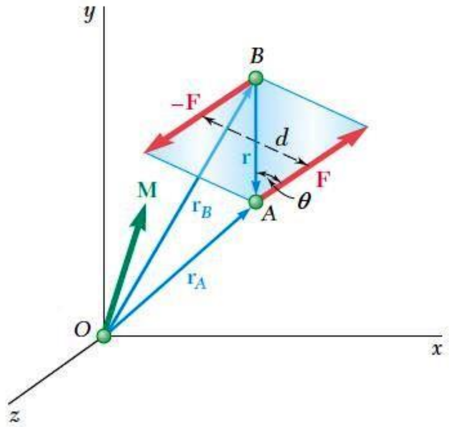
$$M_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \text{ avec}$$

$$x_{A/B} = x_A - x_B, \ y_{A/B} = y_A - y_B, \ z_{A/B} = z_A - z_B$$

III- COUPLES ET SYSTEMES FORCE-COUPLE :

Maintenant que nous avons étudié les effets des forces et des moments sur un corps rigide, il est possible de simplifier un système de forces et de moments en un **système plus simple et équivalent** sans changer leurs effets. Un des idées principales utilisées dans une telle transformation s'appelle un **couple**.

1- Le moment d'un couple:



On dit que *deux* **forces** $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ *ayant les mêmes intensités, de lignes d'action parallèles, et de sens opposé, forment* **un couple** (*voir figure ci-contre*). Clairement :

« La somme des composants des deux forces dans n'importe quelle direction est nulle tandis que la somme des moments des deux forces par rapport à un point donné, cependant, n'est pas nulle ».

Les deux forces ne causent aucun effet de translation le long de la ligne d'action sur le corps sur lequel elles agissent, mais elles tendent à la faire tourner.

Soient $\vec{r}_A$ et $\vec{r}_B$ les vecteurs positions des points d'application des forces $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ respectivement. La somme des moments des deux forces par rapport à ***O*** est :

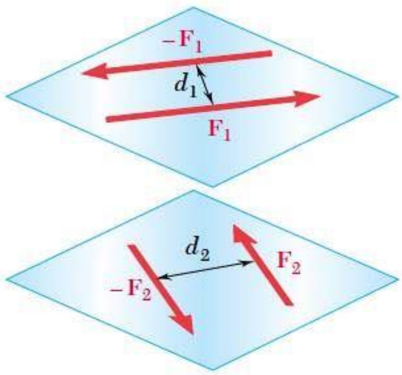
$$\vec{M} = \vec{r}_A \wedge \vec{F} + \vec{r}_B \wedge \left(-\vec{F}\right) = \left(\vec{r}_A - \vec{r}_B\right) \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad \text{avec } \vec{r} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

$\vec{M}$ est appelé moment du couple. Il est orthogonal au plan contenant les deux forces et son intensité est :

$$M = rF\sin\theta = Fd$$

Où ***d*** est distance entre les lignes d'action de $\vec{F}$ et $-\vec{F}$, θ l'angle entre $\vec{F}$ (ou $-\vec{F}$) et $\vec{r}$. On constate que :

« Le moment d'un couple ne dépend pas de l'origine choisi mais de la position relative entre les deux points d'application des deux forces ».



Partant de la définition du moment d'un couple, il vient que deux couples dont l'un consiste en des forces $\vec{F}_1$ et $-\vec{F}_1$, et l'autre en des forces $\vec{F}_2$ et $-\vec{F}_2$ ont des **moments de couples égaux** si (*voir figure ci-contre*):

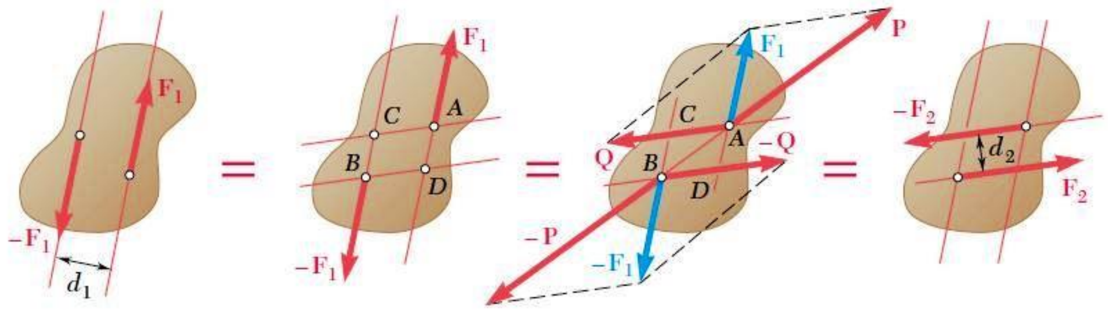
- $F_1 d_1 = F_2 d_2$;
- ***Les deux couples de forces $\left(\vec{F}_1, -\vec{F}_1\right)$ et $\left(\vec{F}_2, -\vec{F}_2\right)$ sont dans des plans identiques ou parallèles.***

2- Couples équivalents :

Deux systèmes des forces sont équivalents (c'est-à-dire qu'ils ont le même effet sur un corps rigide) **si nous pouvons transformer un d'eux en l'autre au moyen d'un ou plusieurs des opérations suivantes : (1)** En *remplaçant les deux forces agissant sur la même particule par leur résultante*; **(2)** En *décomposant une force en deux composants*; **(3)** *En annulant les deux forces égales et opposées agissant sur la même particule*; **(4)** *En attachant à la même particule deux forces égales et opposées*; **(5)** *En déplaçant une force suivant sa ligne d'action.*

Maintenant montrons que **deux couples ayant le même moment M sont équivalents** Considérons d'abord deux couples contenus dans le même plan, et supposons que ce plan coïncide avec le plan de la figure (*figure ci-dessous*). Le premier couple comprend les forces $\vec{F}_1$ et $-\vec{F}_1$ de grandeur F_1 situés à une distance d_1 de l'un l'autre (*figure a*). Le deuxième couple comprend les forces $\vec{F}_2$ et $-\vec{F}_2$ de grandeur F_2 situés à une distance d_2 de l'un l'autre (*figure d*). Puisque les deux couples ont le même moment $\vec{M}$ qui est perpendiculaire au plan de la figure, ils doivent avoir le même sens (assumé ici pour être dans le sens trigonométrique), et la relation $F_1d_1 = F_2d_2$ doit être satisfaite. Pour montrer qu'ils sont équivalents, nous prouverons que le premier couple peut être transformé au second au moyen des opérations énumérées précédemment.

Notons par *A, B, C,* et *D* les points d'intersection des lignes de l'action des deux couples. Nous glissons d'abord les forces $\vec{F}_1$ et $-\vec{F}_1$ jusqu'à ce qu'ils soient attachés, respectivement, à *A* et à *B* comme montré dans figure *b*. Nous décomposons alors la force $\vec{F}_1$ en composant $\vec{P}$



(*a*) (*b*) (*c*) (*d*)

suivant la ligne *AB* et composant $\vec{Q}$ le long de *CA* (*figure c*). De même, nous résolvons la force $-\vec{F}_1$ en $-\vec{P}$ le long *de AB* et de $-\vec{Q}$ le long de *BD.* Les forces $\vec{P}$ et $-\vec{P}$ ont même intensité, même ligne de l'action, et de sens opposé; nous pouvons les déplacer suivant leur ligne commune d'action jusqu'à ce qu'elles soient appliquées au même point et s'annuler. Ainsi, le couple constitué par $\vec{F}_1$ et $-\vec{F}_1$ se réduit à un couple se composant de $\vec{Q}$ et de $-\vec{Q}$.

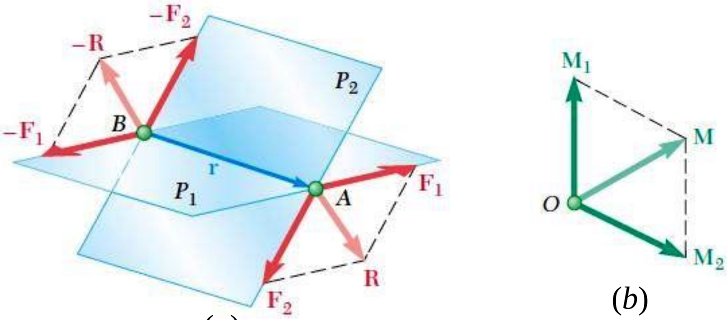
Nous montrons maintenant que les forces $\vec{Q}$ et $-\vec{Q}$ sont respectivement égales aux forces $\vec{F}_2$ et $-\vec{F}_2$. Nous obtenons le moment des couples constitués par $\vec{Q}$ et $-\vec{Q}$ en calculant le moment de $\vec{Q}$ par rapport à *B.* De même, le moment des couples constitués par $\vec{F}_1$ et $-\vec{F}_1$ est le moment de $\vec{F}_1$ par rapport à *B.* Cependant, par le théorème de Varignon, le moment de $\vec{F}_1$ est égal à la somme des moments de ses composants $\vec{P}$ et $\vec{Q}$. Comme le moment de $\vec{P}$ par rapport à *B* est nul, le moment des couples constitués par $\vec{Q}$ et $-\vec{Q}$ est égal au moment des couples constitués par $\vec{F}_1$ et $-\vec{F}_1$. Nous avons alors :

$$Qd_2 = F_1d_1 = F_2d_2 \text{ et } Q = F_2$$

Ainsi, les forces $\vec{Q}$ et $-\vec{Q}$ sont respectivement égales aux forces $-\vec{F}_2$ et $\vec{F}_2$, et le couple de la figure *a* est équivalent au couple de la figure *d*. On peut donc conclure que :

« Deux couples ayant le même moment $\vec{M}$ sont équivalents, s'ils sont contenus dans le même plan ou dans des plans parallèles ».

3- Addition des couples:



(*a*) (*b*)

Considérez deux plans sécants P_1 et P_2 et deux couples agissant respectivement dans P_1 et P_2. Nous pouvons supposer, sans n'importe quelle perte de généralité, que le couple dans P_1 se compose de deux forces **perpendiculaire** $\vec{F}_1$ et $-\vec{F}_1$, chacune orthogonale à la ligne de l'intersection des deux plans et agissant respectivement en *A* et en *B* (*voir figure a ci-dessus*). De même, nous pouvons supposer que le couple dans P_2 se compose de deux forces $\vec{F}_2$ et $-\vec{F}_2$, perpendiculaire à AB et agissant respectivement en *A* et en *B*. Il est clair que la **résultante** $\vec{R}$ **de** $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ et la **résultante** $-\vec{R}$ **de** $-\vec{F}_1$ et $-\vec{F}_2$ forme un couple. En posant $\vec{r} = \overrightarrow{BA}$, nous exprimons le moment $\vec{M}$ des couples résultants comme:

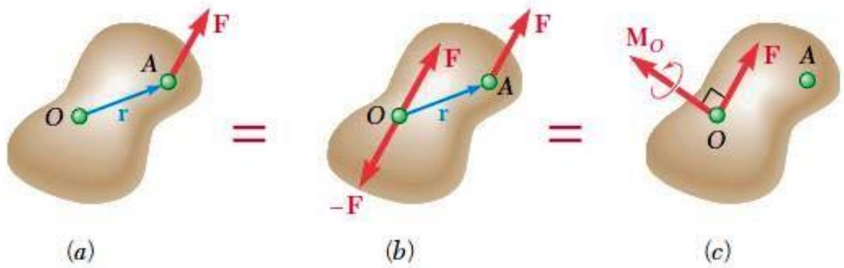
$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{R} = \vec{r} \wedge \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) = \vec{r} \wedge \vec{F}_1 + \vec{r} \wedge \vec{F}_2 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

Où $\vec{M}_1$ est le moment du couple $\left(\vec{F}_1, -\vec{F}_1\right)$ dans le plan P_1 et $\vec{M}_2$ est le moment du couple $\left(\vec{F}_2, -\vec{F}_2\right)$ dans le plan P_2 (*voir figure b ci-dessus*). On peut étendre cette conclusion à n'importe quel nombre de couples à la formule suivante :

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r} \wedge \vec{F}_i$$

4- Décomposition d'une force donnée en une force et en couple :

Considérons une force $\vec{F}$ agissant sur un corps rigide en un point *A* défini par le vecteur de position $\vec{r}$ (*figure a ci-dessous*). Supposons que pour des raisons de simplicité, il est préférable que cette force soit appliquée en O. Bien que nous puissions déplacer $\vec{F}$ suivant sa ligne de l'action (principe de transmissibilité), nous ne pouvons pas la déplacer jusqu'au point *O* qui ne se trouve pas sur la ligne d'action originale, sans modifier l'action de $\vec{F}$ sur le corps rigide.

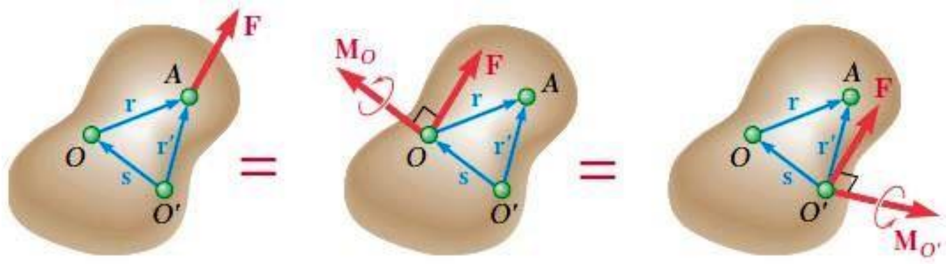


Nous pouvons, cependant, attacher deux forces au point *O* une égale à $\vec{F}$ et à l'autre égale à $-\vec{F}$ sans modifier l'action de la force originale sur le corps rigide (*figure b ci-dessus*). En raison de cette transformation, nous avons maintenant une force $\vec{F}$ appliquée en *O* les deux autres forces forment un couple de moment $\vec{M}_o = \vec{r} \wedge \vec{F}$. Ainsi :

« N'importe quelle force $\vec{F}$ agissant sur un corps rigide peut être déplacée à un point arbitraire O à condition que nous ajoutions un couple dont le moment est égal au moment de $\vec{F}$ par rapport à O ».

Le couple tend à donner au corps rigide le même mouvement de rotation autour de *O* que la force $\vec{F}$ aurait donné au corps rigide avant le transfert de $\vec{F}$ en *O*. Nous représentons le couple par un le moment $\vec{M}_o$ du couple $\left(\vec{F},-\vec{F}\right)$ qui est perpendiculaire au plan contenant $\vec{r}$ et $\vec{F}$. Cette combinaison de la force $\vec{F}$ et du moment $\vec{M}_o$ du couple (encore appelé **vecteur couple**) est désigné sous le nom **d'un système force-couples** (*figure c ci-dessus*).

Si nous déplaçons la force $\vec{F}$ de *A* à un point différent *O'* (*voir figure ci-dessous*), nous devons calculer le moment $\vec{M}_{o'} = \vec{r}' \wedge \vec{F}$ de $\vec{F}$ par rapport à *O'* et ajouter un nouveau système



(*a*) (*b*) (*c*)

de force-couple se composant de $\vec{F}$ et du vecteur couple $\vec{M}_{o'}$ en *O'*. Nous pouvons obtenir la relation entre les moments de $\vec{F}$ par rapport à *O* et à *O'* donnée par :

$$\vec{M}_{o'} = \vec{r}' \wedge \vec{F} = \left(\vec{r}+\vec{s}\right) \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F} + \vec{s} \wedge \vec{F} \text{ avec } \vec{s} = \overrightarrow{O'O}.$$

$$\text{Soit } \quad \underline{\underline{\vec{M}_{o'} = \vec{M}_o + \vec{s} \wedge \vec{F}}}$$

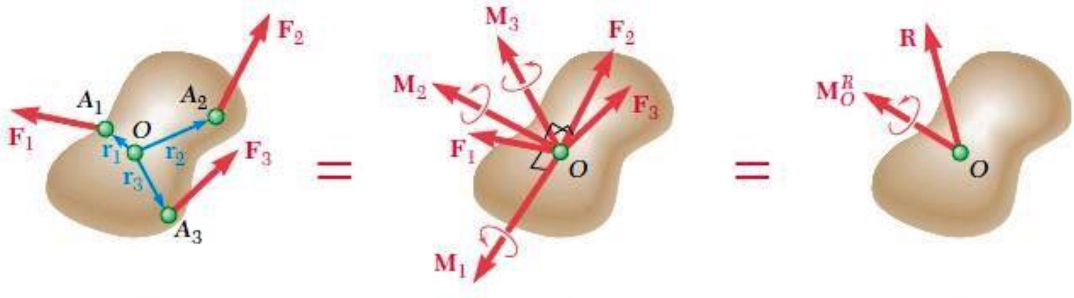
IV- SIMPLIFICATION DES SYSTEMES DE FORCES :

Nous avons vu dans la section précédente que nous pouvons remplacer une force agissant sur un corps rigide par un système force-couple qui est plus facile à analyser. Cependant, la vraie valeur d'un système force-couple est que nous pouvons l'employer pour ne pas remplacer simplement une force mais un système des forces pour simplifier l'analyse et les calculs.

1- Réduction d'un système de forces en un système force-couple:

Considérons un système de forces $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ \vec{F}_3,\ ...,$ agissant sur un corps rigide aux points $A_1,\ A_2,\ A_3,\ ...,$ défini par la position dirige $\vec{r}_1,\ \vec{r}_2,\ \vec{r}_3,\ etc.$ (*voir figure a ci-dessous*). Comme vu dans la section précédente, nous pouvons déplacer $\vec{F}_1$ de A_1 à un point donné *O* si nous ajoutons le moment couple $\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_1$ de $\vec{F}_1$ par rapport à *O*. En répétant ce procédé avec $\vec{F}_2, \vec{F}_3, ...,$ nous obtenons le système montré à la figure *b* ci-dessous, qui comprend les forces originales, maintenant agissant en *O* et les vecteurs couples $\left(\vec{M}_1, \vec{M}_2, \vec{M}_3, ...\right)$ supplémentaires. Puisque les forces sont maintenant concourantes, elles peuvent être additionnées et remplacées par leur **résultante** $\vec{R}$. De même, les vecteurs couples $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \vec{M}_3, ...$ peuvent être additionnés et remplacés par un unique vecteur couple $\vec{M}_o^R$ appelé **moment résultant.** Ainsi :

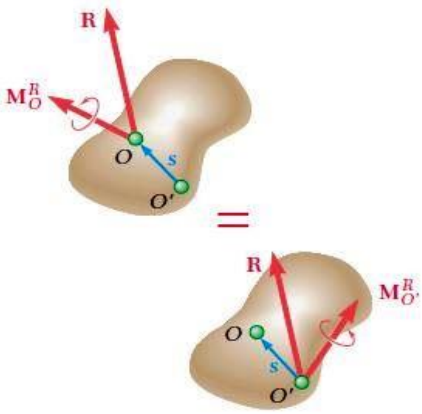
« Nous pouvons ramener n'importe quel système des forces à un système force-couple équivalent agissant en un point donné O ».



(a) (b) (c)

Alors on a : $\underline{\underline{\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i \ \text{ et } \ \vec{M}_o^R = \sum_i \vec{M}_{i/o} = \sum_i \left(\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i\right)}}$

Une fois que nous avons ramené un système donné des forces à une force et un couple à un point $\boldsymbol{O}$ nous pouvons le remplacer par une force et un couple à un autre point $\boldsymbol{O'}$. La force résultante $\vec{R}$ demeurera sans changement, tandis que le nouveau moment résultant $\vec{M}_{o'}^R$ sera égal à la somme du moment $\vec{M}_o^R$ et du moment par rapport à $\boldsymbol{O'}$ de la force $\vec{R}$ attachée *à* $\boldsymbol{O}$ (*voir figure ci-contre*). Nous avons :



$$\underline{\underline{\vec{M}_{o'}^R = \vec{M}_o^R + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{R} = \vec{M}_o^R + \vec{s} \wedge \vec{R}}}$$

2- <u>Systèmes de forces équivalents et équipollents :</u>

Nous avons vu que n'importe quel système de forces agissant sur un corps rigide peut être réduit à un système force-couple en un point donné *O*. Ce système équivalent force-couple caractérise complètement l'effet du système de forces donné sur le corps rigide.

« Deux systèmes de forces sont équivalents s'ils peuvent être réduits au même système force-couple en un point donné O. »

« Deux systèmes des forces, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ..., et $\vec{F}_1'$, $\vec{F}_2'$, $\vec{F}_3'$, ..., qui agissent sur le même corps rigide sont équivalents si, et seulement si, les sommes des forces et les sommes des moments par rapport à un point indiqué O sont, respectivement, égales ».

Mathématiquement, les conditions nécessaires et **suffisantes pour que les deux systèmes de forces soient équivalents** sont :

$$\underline{\underline{\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i' \ \text{ et } \ \sum_i \vec{M}_{i/o} = \sum_i \vec{M}_{i/o}'}}$$

« Si deux systèmes de forces agissant sur un corps rigide sont équivalents, ils sont également équipollents ».

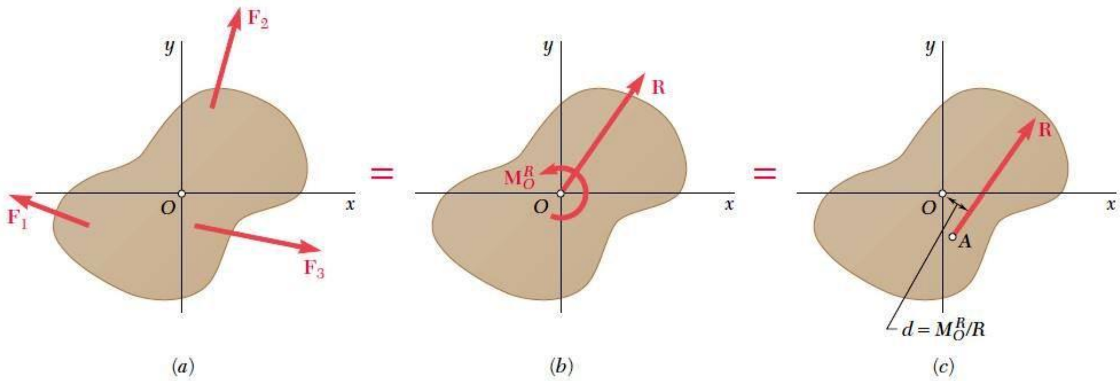
3- <u>Autre réduction d'un système de forces :</u>

Nous avons maintenant vu que n'importe quel système de forces donné agissant sur un corps rigide peut être réduit à un système force-couple équivalent en *O*, se composant d'une force $\vec{R}$ égale à la somme des forces du système, et un vecteur couple $\vec{M}_o^R$ égale au moment résultant du système.

Quand $\vec{R} = \vec{0}$, le système force-couple se réduit au vecteur couple $\vec{M}_o^R$. Le système de forces donné peut alors être réduit à un simple couple appelé **couple résultant** du système.

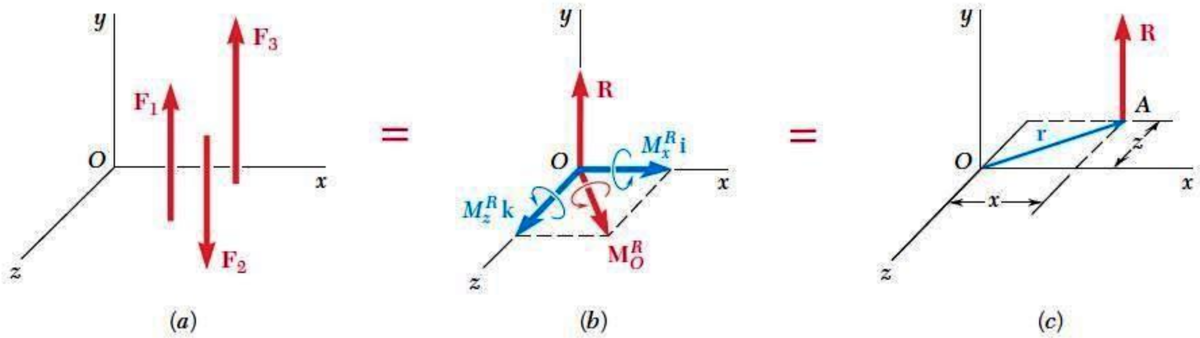
Quelles sont les conditions dans lesquelles un système de forces donné peut être réduit en une unique force? Il découle de la section précédente que nous pouvons remplacer le système force-couple en *O* par une unique force $\vec{R}$ agissant suivant une nouvelle ligne d'action si $\vec{R}$ et $\vec{M}_o^R$ sont mutuellement perpendiculaires. Les systèmes des forces qui peuvent être réduites à une force simple, ou résultante sont donc les systèmes pour lesquels la force $\vec{R}$ et le vecteur couple $\vec{M}_o^R$ sont mutuellement perpendiculaires. Cette condition **n'est pas généralement satisfaite** par des systèmes des forces dans l'espace, mais elle **est satisfaite** par des systèmes se composant **des forces de concourantes**, **des forces coplanaires**, ou **des forces parallèles**. Analysons chaque cas séparément.

a. **Les forces de concourantes** agissent au même point ; nous pouvons donc les additionner directement pour obtenir leur **résultante** $\vec{R}$. Ainsi, ils se réduisent toujours à une unique force.



b. **Les forces coplanaires** agissent dans le même plan, que nous supposons être le plan de la figure (*figure a ci-dessous*). La somme $\vec{R}$ des forces du système se situe également dans le plan de la figure, tandis que le moment de chaque force par rapport à un point *O* du plan et le moment résultant $\vec{M}_o^R$ *sont* ainsi perpendiculaire à ce plan. Le système force-couple en *O* consiste, donc, en une force $\vec{R}$ et un vecteur couple $\vec{M}_o^R$ qui sont mutuellement la perpendiculaire (*figure b ci-dessus*). Nous pouvons les ramener en une unique force $\vec{R}$ en déplaçant $\vec{R}$ dans le plan de la figure jusqu'à ce que son moment par rapport à *O* devienne égal à $\vec{M}_o^R$. La distance de *O* à la ligne de l'action de $\vec{R}$ est $d = M_o^R / R$ (*figure c ci-dessus*).

c. **Les forces parallèles** ont les lignes d'action parallèles et peuvent ou peuvent ne pas avoir le même sens. Nous assumant ici que les forces sont parallèles à l'axe des *y* (*figure a ci-dessous*), notons que leur somme $\vec{R}$ est également parallèle à l'axe des *y*.
D' autre part, comme le moment d'une force donnée doit être perpendiculaire à cette

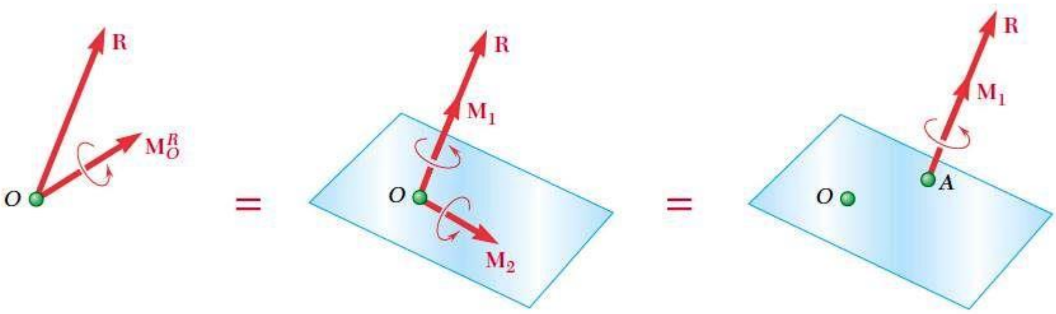


force, le moment par rapport à *O* de chaque force du système et donc le moment résultant

$\vec{M}_o^R$ sont dans le plan *xOz*. Le système force-couple en *O* consiste, donc, en une force $\vec{R}$ et un vecteur couple $\vec{M}_o^R$ qui sont mutuellement perpendiculaires (*figure b ci-dessus*). Nous pouvons les ramener à une force $\vec{R}$ (*figure c ci-dessus*).

4- Réduction d'un système de forces en un torseur :

Dans le cas général d'un système de forces dans l'espace, le système force-couple équivalent en *O* se compose d'une force $\vec{R}$ et un vecteur couple $\vec{M}_o^R$ qui sont non-nuls et non perpendiculaire (*figure a ci-dessous*). Ce système de forces ne peut pas être réduit à une unique



(*a*) (*b*) (*c*)

force simple ou à un unique couple. Cependant, nous avons toujours une manière de simplifier ce système.

La méthode de simplification consiste à remplacer d'abord le vecteur couple par deux autres vecteurs couples qui sont obtenus décomposition de $\vec{M}_o^R$ en une composante $\vec{M}_1$ le long de $\vec{R}$ et en une composante $\vec{M}_2$ dans un plan perpendiculaire à **R** (*figure b ci-dessus*). Alors nous pouvons remplacer le vecteur couple $\vec{M}_2$ et la force $\vec{R}$ par une unique force $\vec{R}$ agissant suivant une nouvelle ligne d'action. Le système de forces original se réduit ainsi à $\vec{R}$ et au vecteur couple $\vec{M}_1$ (*figure c ci-dessus*), c'est-à-dire, à une force $\vec{R}$ et à un couple agissant dans le plan perpendiculaire à $\vec{R}$.

Ce système force-couple particulier s'appelle **un torseur** parce que la combinaison de la poussée et de la rotation correspond à une torsion. La ligne d'action de $\vec{R}$ est connue comme **axe du torseur**, et le rapport $p = M_1/R$ s'appelle **pas du torseur**. Un torseur se compose donc de deux vecteurs situés sur la même droite: une force $\vec{R}$ et un vecteur couple :

$$\vec{M}_1 = p\vec{R}$$

$\vec{M}_1$ étant la projection de $\vec{M}_o^R$ sur la ligne d'action de $\vec{R}$, on peut écrire donc que :

$$M_1 = \frac{\vec{R}\cdot\vec{M}_o^R}{R} \quad \textbf{et} \quad p = \frac{M_1}{R} = \frac{\vec{R}\cdot\vec{M}_o^R}{R^2}$$