

Asservissement des systèmes linéaires à temps continu

Cours et Exercices

FORMATION D'INGÉNIEURS EN PARTENARIAT – 1^{ÈRE} ANNÉE
ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE DE STRASBOURG
UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Edouard Laroche (laroche@unistra.fr)
Houssem Halalchi (Houssem.Halalchi@lsiit.u-strasbg.fr)

<http://eavr.u-strasbg.fr/~laroche/student>

2009–2010

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduction | 7 |
| 1.1 | Notion de système | 7 |
| 1.2 | Propriétés des systèmes | 7 |
| 1.3 | Systèmes élémentaires | 8 |
| 1.3.1 | Système du premier ordre | 8 |
| 1.3.2 | Système du deuxième ordre | 9 |
| 1.4 | Objectif de l'asservissement | 12 |
| | | |
| 2 | Modélisation | 15 |
| 2.1 | Transformée de Laplace, fonctions de transfert | 15 |
| 2.1.1 | Transformée de Laplace | 15 |
| 2.1.2 | Fonction de transfert | 17 |
| 2.2 | Propriétés des systèmes dynamiques | 20 |
| 2.2.1 | Stabilité | 20 |
| 2.2.2 | Gain | 23 |
| 2.2.3 | Dépassement | 23 |
| 2.2.4 | Rapidité | 24 |
| 2.3 | Analyse fréquentielle | 27 |
| 2.3.1 | Régime harmonique | 27 |
| 2.3.2 | Diagramme de Nyquist | 28 |
| 2.3.3 | Diagramme de Bode | 28 |
| 2.3.4 | Diagramme de Black-Nichols | 31 |
| 2.3.5 | Étude du second ordre | 31 |
| 2.4 | Représentation d'état | 33 |
| 2.4.1 | Introduction | 33 |
| 2.4.2 | Équivalence avec la fonction de transfert | 34 |
| 2.4.3 | Propriétés | 34 |
| 2.5 | Identification | 36 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.5.1 | Approche temporelle | 36 |
| 2.5.2 | Approche fréquentielle | 39 |
| 3 | Asservissements analogiques | 43 |
| 3.1 | Introduction aux asservissements | 43 |
| 3.1.1 | Principe | 43 |
| 3.1.2 | Boucle ouverte ou boucle fermée? | 44 |
| 3.1.3 | Principes généraux sur la synthèse de correcteurs en boucle fermée (feedback) | 45 |
| 3.1.4 | Lieu d'Evans | 47 |
| 3.1.5 | Exemple introductif | 48 |
| 3.2 | Analyse des systèmes asservis | 57 |
| 3.2.1 | Stabilité | 57 |
| 3.2.2 | Rapidité | 58 |
| 3.2.3 | Précision | 58 |
| 3.2.4 | Dépassement | 58 |
| 3.2.5 | Rejet de perturbation | 59 |
| 3.3 | Méthodes de synthèse | 60 |
| 3.3.1 | Les différentes démarches | 60 |
| 3.3.2 | Correcteur proportionnel (P) | 60 |
| 3.3.3 | Correcteur proportionnel intégral (PI) | 61 |
| 3.3.4 | Correcteur proportionnel dérivé (PD) | 65 |
| 3.3.5 | Correcteur PID | 66 |
| 3.3.6 | Correcteur à avance de phase | 66 |
| 3.3.7 | Correcteur à retard de phase | 67 |
| A | Décomposition en éléments simples | 69 |

Liste des exercices

| | | |
|---|--|----|
| 1 | Transformée de Laplace | 18 |
| 2 | Fonctions de transfert d'un moteur à courant continu | 20 |
| 3 | Critère de Routh-Hurwitz | 22 |
| 4 | Dépassement d'un système du second ordre | 24 |
| 5 | Temps d'établissement de systèmes du premier ordre | 26 |
| 6 | Diagramme de Bode d'un système du premier ordre | 29 |
| 7 | Tracé du diagramme de Bode | 31 |
| 8 | Gain du second ordre à la résonance | 33 |

| | |
|---|----|
| <i>TABLE DES MATIÈRES</i> | 5 |
| 9 Fonction de transfert d'un système d'état | 34 |
| 10 Modèle d'un moteur à courant continu | 35 |
| 11 Système masses-ressort | 35 |
| 12 Identification d'un système du second ordre amorti | 39 |
| 13 Identification d'un système du second ordre oscillant | 39 |
| 14 Identification fréquentielle d'un système du premier ordre | 41 |
| 15 Identification fréquentielle d'un système du second ordre | 41 |
| 16 Correcteur TOR à hystérésis | 46 |
| 17 Variateur de vitesse | 49 |
| 18 Marge de phase et dépassement | 59 |
| 19 Correction prop. d'un système du premier ordre | 60 |
| 20 Correcteur prop. d'un système du second ordre | 61 |
| 21 Correcteur PI pour système du premier ordre | 62 |
| 22 Asservissement PI d'un système du second ordre | 62 |
| 23 Correction PI d'un système à retard | 63 |
| 24 Correcteur PD et système du second ordre | 65 |
| 25 Correction à avance de phase pour intégrateur double | 66 |
| 26 Décomposition en éléments simples | 70 |

“C’est le rôle essentiel du professeur d’éveiller la joie de travailler et de connaître.” (Albert Einstein)

Chapitre 1

Introduction

1.1 Notion de système

Considérons un système sur lequel on mesure le signal $y(t)$ appelé *signal de mesure* et sur lequel on peut fixer arbitrairement le signal $u(t)$ appelé *signal de commande*. Dans le cas présent, les signaux sont à *temps continu*. Il existe également des systèmes à temps discret faisant intervenir les signaux échantillonnés $u_k = u(kT_e)$ et $y_k = y(kT_e)$ où T_e est la période d'échantillonnage.

Les systèmes à temps continu sont modélisés par une équation différentielle liant $u(t)$ et $y(t)$ alors que les systèmes à temps discret sont modélisés par une équation aux récurrences de la forme $y_k = f(y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, u_k, u_{k-1}, \dots)$.

1.2 Propriétés des systèmes

Considérons dans un premier temps que l'entrée $u(t)$ est constante.

Définition (Point d'équilibre)

Le système est dans un état d'équilibre si, placé dans cet état, il ne quitte pas.

La valeur du signal de mesure est alors constante.

Définition (Stabilité)

Un état d'équilibre est stable si, lorsqu'on éloigne le système de cet état, il finit par y revenir. Dans le cas contraire, le point d'équilibre est instable.

Dans certain cas, cette propriété de stabilité n'est valable que si l'éloignement est faible ; on parle alors de *stabilité locale*. Si au contraire le système retourne dans son état d'équilibre quelque soit l'amplitude de la perturbation, on parle alors de *stabilité globale*.

Propriété (Stabilité d'un système)

Un équilibre globalement stable est unique. On dit alors que le système est stable.

Si le système avait deux équilibres globaux, vers lequel irait il si on le déplaçait de l'un des points d'équilibre ?

Propriété (Linéarité)

Un système est linéaire s'il vérifie les conditions de linéarité suivantes. Soit $y_1(t)$ la trajectoire de la sortie pour une commande $u_1(t)$; soit $y_2(t)$ la trajectoire de la sortie pour une commande $u_2(t)$; soit $y_3(t)$ la trajectoire de la sortie pour une commande $u_3(t) = \lambda u_1(t)$ et soit $y_4(t)$ la trajectoire de la sortie pour une commande $u_4(t) = u_1(t) + u_2(t)$. Les conditions de linéarité sont :

$$y_3(t) = \lambda y_1(t) \quad (1.1)$$

$$y_4(t) = y_1(t) + y_2(t) \quad (1.2)$$

1.3 Systèmes élémentaires

1.3.1 Système du premier ordre

Soit un système du premier ordre régi par une équation différentielle de la forme

$$\tau \dot{y}(t) + y(t) = Ku(t) \quad (1.3)$$

La réponse à un échelon $u(t)$ à partir d'une condition initiale nulle est :

$$y(t) = K(1 - \exp(-t/\tau)) \quad (1.4)$$

Il s'agit d'une exponentielle partant de 0 à $t = 0$ et se stabilisant à $y(t) = K$. Son dépassement est nul ; le temps de montée à 5 % est égal à 3τ ($\ln(0.05) \cong -3, 0$).

1.3.2 Système du deuxième ordre

Soit un système du deuxième ordre régi par une équation différentielle de la forme :

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_0\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 K u(t) \quad (1.5)$$

où ω_0 (rad/s) est appelée pulsation propre, ξ (sans unité) est appelé amortissement et K (unités $[y]/[u]$ dépendant des unités de u et de y) est le gain statique. L'équation associée s'écrit :

$$r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0 \quad (1.6)$$

Le discriminant réduit s'écrit :

$$\tilde{\Delta} = (\xi\omega_0)^2 - \omega_0^2 = (\xi^2 - 1)\omega_0^2 \quad (1.7)$$

Les racines de (??) sont alors réelles si $\tilde{\Delta} \geq 0$, c'est-à-dire si $\xi \geq 1$; elles sont imaginaires dans le cas contraire.

Deuxième ordre amorti

Dans le cas où les racines sont réelles et s'écrivent :

$$r_1 = -\xi\omega_0 + \sqrt{\xi^2 - 1}\omega_0, \quad (1.8)$$

$$r_2 = -\xi\omega_0 - \sqrt{\xi^2 - 1}\omega_0, \quad (1.9)$$

la solution générale de l'équation sans second membre s'écrit alors :

$$y_1(t) = \lambda \exp(r_1 t) + \mu \exp(r_2 t) \quad (1.10)$$

Notons que r_1 et r_2 sont toutes deux négatives ; l'exponentielle tend donc vers zéro.

Une solution particulière constante de l'équation sans second membre peut être facilement trouvée :

$$y_0(t) = K \quad (1.11)$$

En additionnant la solution particulière et l'équation générale de l'équation sans second membre, on obtient la solution générale de l'équation complète :

$$y(t) = \lambda \exp(r_1 t) + \mu \exp(r_2 t) + K \quad (1.12)$$

Cherchons maintenant la solution vérifiant les conditions initiales suivantes :

$$y(0) = 0 \quad (1.13)$$

$$\dot{y}(0) = 0 \quad (1.14)$$

La dérivée de la solution s'écrit :

$$\dot{y}(t) = \lambda r_1 \exp(r_1 t) + \mu r_2 \exp(r_2 t) \quad (1.15)$$

Les C.I. s'écrivent alors :

$$\lambda + \mu + K = 0 \quad (1.16)$$

$$\lambda r_1 + \mu r_2 = 0 \quad (1.17)$$

Dont les solutions sont :

$$\lambda = \frac{K r_2}{r_1 - r_2} \quad (1.18)$$

$$\mu = -\frac{K r_1}{r_1 - r_2} \quad (1.19)$$

La solution s'écrit alors :

$$y(t) = K \left(1 + \frac{r_2}{r_1 - r_2} \exp(r_1 t) - \frac{r_1}{r_1 - r_2} \exp(r_2 t) \right) \quad (1.20)$$

Sa dérivée est :

$$\dot{y}(t) = \frac{K r_1 r_2}{r_1 - r_2} (\exp(r_1 t) - \exp(r_2 t)) \quad (1.21)$$

Puisque l'on a $r_2 \leq r_1 \leq 0$, on a aussi $\exp(r_1 t) - \exp(r_2 t) \geq 0$ pour $t \geq 0$ et $\dot{y}(t)$ est alors positive pour $t \geq 0$, ce qui signifie que $y(t)$ est croissante. La réponse à un échelon est donc une courbe croissante qui se stabilise à la valeur K . Cette courbe a un point d'inflexion pour $\ddot{y}(t_i) = 0$. Avec :

$$\ddot{y}(t) = \frac{K r_1 r_2}{r_1 - r_2} (r_1 \exp(r_1 t) - r_2 \exp(r_2 t)), \quad (1.22)$$

on observe que la dérivée seconde n'annule en t_i vérifiant :

$$r_1 \exp(r_1 t) - r_2 \exp(r_2 t), \quad (1.23)$$

soit

$$t_i = \frac{1}{r_1 - r_2} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (1.24)$$

Deuxième ordre oscillant

Dans le cas où les racines sont complexes conjuguées et s'écrivent :

$$r_1 = -a + j\omega_1, \quad (1.25)$$

$$r_2 = -a - j\omega_1, \quad (1.26)$$

avec

$$a = \xi\omega_0 \quad (1.27)$$

$$\omega_1 = \sqrt{1 - \xi^2} \omega_0, \quad (1.28)$$

où ω_1 est la pseudo-pulsation de la réponse, liée à la période des oscillations $T_c = \frac{2\pi}{\omega_1}$. La solution générale de l'équation sans second membre s'écrit alors :

$$y_1(t) = \exp(-at) (\lambda \cos(\omega_1 t) + \mu \sin(\omega_1 t)) \quad (1.29)$$

Notons que a est positif ; l'exponentielle tend donc vers zéro.

Une solution particulière constante s'écrit $y_0(t) = K$. La solution générale de l'équation est donc :

$$y(t) = K + \exp(-at) (\lambda \cos(\omega_1 t) + \mu \sin(\omega_1 t)) \quad (1.30)$$

Reste à déterminer les constantes λ et μ d'après les conditions initiales (1.13-1.14). On a :

$$\dot{y}(t) = -a \exp(-at) (\lambda \cos(\omega_1 t) + \mu \sin(\omega_1 t)) \quad (1.31)$$

$$+ \omega_1 \exp(-at) (-\lambda \sin(\omega_1 t) + \mu \cos(\omega_1 t)) \quad (1.32)$$

$$= \exp(-at) ((-a\lambda + \omega_1\mu) \cos(\omega_1 t) - (\omega_1\lambda + a\mu) \sin(\omega_1 t)) \quad (1.33)$$

Les conditions initiales s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} y(0) &= K + \lambda = 0 \\ \dot{y}(0) &= -a\lambda + \omega_1\mu = 0 \end{aligned} \quad (1.34)$$

ce qui donne :

$$\lambda = -K \quad (1.35)$$

$$\mu = -K \frac{a}{\omega_1} \quad (1.36)$$

ce qui donne comme solution finale :

$$y(t) = K \left(1 - \exp(-at) \left(\cos(\omega_1 t) + \frac{a}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right) \right) \quad (1.37)$$

La vitesse s'écrit alors :

$$\dot{y}(t) = K \frac{a^2 + \omega_1^2}{\omega_1} \exp(-at) \sin(\omega_1 t) \quad (1.38)$$

Elle est du signe du terme $\sin(\omega_1 t)$. Elle est d'abord positive de $t = 0$ à $t_1 = \frac{\pi}{\omega_1}$ puis négative de t_1 à $\frac{2\pi}{\omega_1}$. Le signal atteint donc un maximum à t_1 en :

$$y(t_1) = K \left(1 + \exp \left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \right) \quad (1.39)$$

soit un dépassement relatif $(y(t_1) - y(\infty))/(y(\infty) - y(0))$ de :

$$D = \exp \left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \quad (1.40)$$

1.4 Objectif de l'asservissement

Un système dynamique peut être caractérisé par différentes qualités : sa rapidité, le fait d'être plus ou moins amorti. Le but de l'asservissement est de contraindre le système à se comporter d'une manière particulière. Il n'est pas possible physiquement d'obtenir d'un système qu'il réponde de manière instantanée. On peut cependant le contraindre à répondre plus rapidement. On peut aussi limiter son dépassement.

Dans le choix de la *loi de commande*, il faudra également s'assurer que le système asservi possède un niveau de *robustesse* suffisant. Par robustesse, on entend la capacité à garder certaines propriétés malgré des variations de l'environnement. Typiquement, en automatique, le comportement du système est connu avec une précision limitée ; de plus, son comportement peut évoluer en fonction de condition extérieure ou de son vieillissement. Il importe que les performances du système asservi ne se dégrade pas trop en présence de ces variations de comportement.

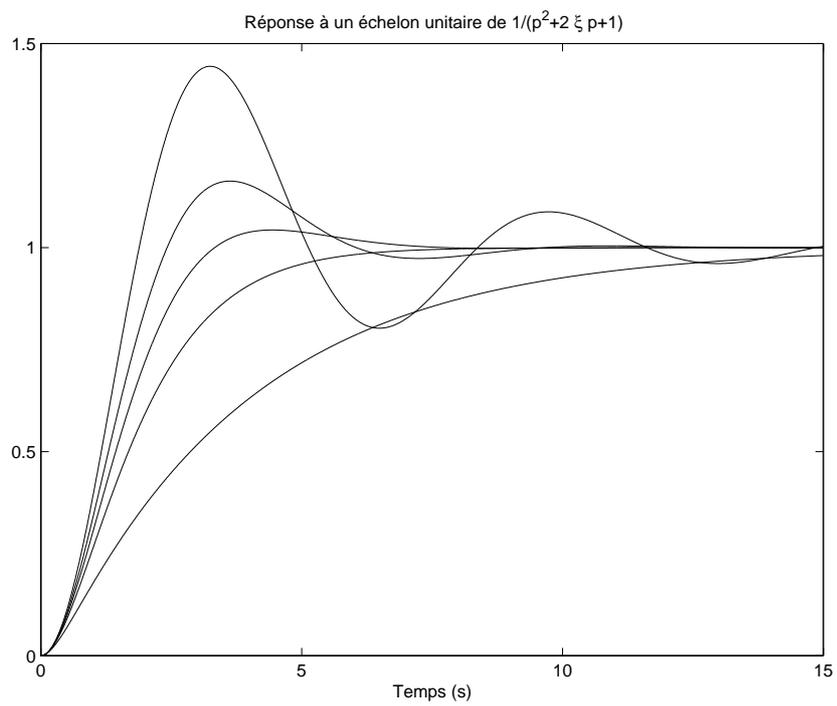


FIG. 1.1 – Réponse temporelle de systèmes du second ordre ($\xi = 0.25, 0.5, 0.707, 1$ et 2)

Chapitre 2

Modélisation

Dans cette partie, on s'intéresse à la détermination de modèles mathématique pour des systèmes linéaires stationnaires (on parle aussi de systèmes linéaire à temps invariant, notés LTI en anglais). Les modèles peuvent être abordés sous trois formes à peu près équivalentes : l'équation différentielle, la fonction de transfert et le modèle d'état.

2.1 Transformée de Laplace, fonctions de transfert

2.1.1 Transformée de Laplace

Définition

Pour un signal à temps continu $x(t)$, on définit sa transformée de Laplace par le signal $X(s)$ où s est appelée variable de Laplace¹, avec :

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) \exp(-st) dt \quad (2.1)$$

A partir de $X(s)$, on revient au signal de départ par une transformée de Laplace inverse :

$$x(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_{s=-j\infty}^{s=j\infty} X(s) \exp(st) ds \quad (2.2)$$

¹La variable de Laplace est notés s ou p suivant les conventions.

| $h(t)$ | $H(s)$ |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| $\delta(t)$ | 1 |
| $u(t)$ | $\frac{1}{s}$ |
| $u(t - T)$ | $\frac{\exp(-Ts)}{s}$ |
| $tu(t)$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| $\frac{t^n}{n!}u(t)$ | $\frac{1}{s^{n+1}}$ |
| $\exp(-at)u(t)$ | $\frac{1}{s+a}$ |
| $(1 - \exp(-at))u(t)$ | $\frac{a}{s(s+a)}$ |
| $\sin(\omega t)u(t)$ | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ |
| $\cos(\omega t)u(t)$ | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ |
| $\sinh(at)u(t)$ | $\frac{a}{s^2 - a^2}$ |
| $\cosh(at)u(t)$ | $\frac{s}{s^2 - a^2}$ |
| $\exp(-at) \sin(\omega t)u(t)$ | $\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$ |
| $\exp(-at) \cos(\omega t)u(t)$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$ |

TAB. 2.1 – Exemples de transformées de Laplace élémentaires ($u(t)$ est l'échelon unitaire et $\delta(t)$ l'impulsion de Dirac)

En considérant que $s = j\omega$ où ω est la pulsation, on peut considérer que la transformée de Laplace est une généralisation de la transformée de Fourier. Il s'agit en tous cas d'une transformée temps/fréquence qui à un signal temporel fait correspondre une représentation fréquentielle. Nous verrons par la suite la puissance de cet outil qui permet de simplifier grandement les calculs.

On peut facilement trouver des abaques des transformées de Laplace usuelles. Contentons nous pour l'instant de mentionner l'échelon unitaire $u(t)$ qui a comme transformée $\frac{1}{s}$ et le dirac $\delta(t)$ qui a comme transformée 1.

Propriétés**Propriété (Linéarité)**

La transformée de Laplace est une transformation linéaire.

Propriété (Transformée de Laplace d'un signal dérivé)

Soit $y(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$. La transformée de Laplace de $y(t)$ est $Y(s) = sX(s) - x(0)$

2.1.2 Fonction de transfert

Soit un système dynamique à temps continu de signal d'entrée $u(t)$ et de signal de sortie $y(t)$, tous deux liés par une équation différentielle ordinaire linéaire :

$$\begin{aligned} a_n y^{[n]}(t) + a_{n-1} y^{[n-1]}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) \\ = b_m u^{[m]}(t) + b_{m-1} \dot{u}^{[m-1]}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

En passant dans le domaine fréquentiel et en supposant que les conditions initiales sont nulles, on obtient, grâce à la propriété 4 :

$$\begin{aligned} a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) \\ = b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ce qui s'écrit sous la forme :

$$Y(s) = H(s)U(s) \quad (2.5)$$

où $H(s)$ est la fonction de transfert du système et s'écrit :

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.6)$$

La fonction de transfert est une fonction rationnelle ; elle est composée d'un numérateur de degré m et d'un dénominateur de degré n . On dit aussi que le système est d'ordre n .

Définition (Système propre)

On dit qu'un système est propre si le degré de son numérateur est inférieur à celui de son dénominateur ($m \leq n$).

On dit qu'un système est strictement propre si le degré de son numérateur est strictement inférieur à celui de son dénominateur ($m < n$).

Propriété (Fonction de transfert)

La fonction de transfert d'un système est la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle.

Cette propriété découle du fait que la transformée de Laplace du signal impulsionnel est 1.

Propriété (Transformée de Laplace d'un signal retardé)

La transformée de Laplace de $y(t - T)$ est $\exp(-Ts)Y(s)$

Exercice (Transformée de Laplace)

Calculez la réponse à un échelon des systèmes suivants :

$$1. \quad \frac{1}{s} \quad (2.7)$$

$$2. \quad \frac{1}{s + a} \quad (2.8)$$

$$3. \quad \frac{K}{(s + a)(s + b)} \quad (2.9)$$

$$4. \quad \frac{K}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (2.10)$$

Correction

4. Compte-tenu d'une entrée en échelon, soit $U(s) = 1/s$, la sortie s'écrit :

$$Y(s) = \frac{K}{s(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)} \quad (2.11)$$

On peut décomposer en éléments simples sous la forme :

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + D}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (2.12)$$

En développant cette dernière expression, on obtient :

$$Y(s) = \frac{(A + B)s^2 + (2\xi\omega_0 A + D)s + \omega_0^2 A}{s(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)} \quad (2.13)$$

2.1. TRANSFORMÉE DE LAPLACE, FONCTIONS DE TRANSFERT 19

En identifiant les deux expressions de $Y(s)$, on obtient le système d'équations suivant :

$$A + B = 0 \quad (2.14)$$

$$2\xi\omega_0 A + D = 0 \quad (2.15)$$

$$\omega_0^2 A = K\omega_0^2 \quad (2.16)$$

qui se résout en :

$$A = K \quad (2.17)$$

$$D = -2K\xi\omega_0 \quad (2.18)$$

$$B = -K \quad (2.19)$$

Il nous faut maintenant déterminer la transformée de Laplace inverse de $Y(s)$ à partir des tables dont nous disposons. Le dénominateur peut se récrire :

$$s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2 = (s + \xi\omega_0)^2 - (\xi\omega_0)^2 - \omega_0^2 \quad (2.20)$$

$$= (s + a)^2 \omega^2 \quad (2.21)$$

avec $a = \xi\omega_0$ et $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$. On a alors :

$$\frac{Bs + D}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{Bs + D}{(s + a)^2 \omega^2} \quad (2.22)$$

$$= \frac{B(s + a) + D - Ba}{(s + a)^2 \omega^2} \quad (2.23)$$

$$= B \frac{s + a}{(s + a)^2 \omega^2} + \frac{D - Ba}{\omega} \frac{\omega}{(s + a)^2 \omega^2} \quad (2.24)$$

Cette dernière forme permet d'utiliser les formules de transformées de Laplace, ce qui donne :

$$y(t) = Au(t) + B \exp(-at) \cos(\omega t) u(t) + \frac{D - Ba}{\omega} \exp(-at) \sin(\omega t) u(t)$$

$$= K(1 - \exp(-at)) \left(\cos(\omega t) + \frac{\xi\omega_0}{\omega} \sin(\omega t) \right) u(t) \quad (2.25)$$

$$= K \left(1 - \exp(-at) \left(\cos(\omega t) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega t) \right) \right) u(t) \quad (2.26)$$

Remarque : on retrouve bien la même expression que ce que l'on a obtenu en intégrant l'équation différentielle (??).

Exercice (Fonctions de transfert d'un moteur à courant continu)

On donne les équations d'un moteur à courant continu à aimants permanents :

- équation de la tension $Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + e(t) = u(t)$,
- équation de la vitesse $J\frac{d\Omega(t)}{dt} = c(t) - f\Omega(t)$

où le couple s'écrit $c(t) = Ki(t)$ et la force électromotrice est $e(t) = K\Omega(t)$; R est la résistance de l'induit, L sont inductance; K est la constante de couple et de force électromotrice; J est l'inertie; f est le coefficient de frottements.

1. On considère que l'entrée est la tension et la sortie est la vitesse; donnez la fonction de transfert du système.
2. On considère que l'entrée est la tension et la sortie est le courant; donnez la fonction de transfert du système.

2.2 Propriétés des systèmes dynamiques

2.2.1 Stabilité

Définition (Pôle et racines)

On appelle pôles d'un système les racines de son dénominateur.

On appelle zéros d'un système les racines de son numérateur.

Les racines d'un système du second ordre de fonction de transfert $H(s) = \frac{K}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$ sont, pour $\xi < 1$, $p_k = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$. Elles sont représentées dans le plan complexe sur la figure 2.1. Elles ont un module de ω_0 , une partie réelle de $-\xi\omega_0$ et font un angle ϕ avec l'axe réel tel que $\cos(\phi) = \xi$.

Propriété (Stabilité)

Un systèmes est stable si tous ses pôles sont à partie réelle strictement négative.

Pour s'en convaincre, on peut considérer la décomposition en éléments simples de la fonction de transfert d'un système. Prenons un exemple :

$$H(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)} \quad (2.27)$$

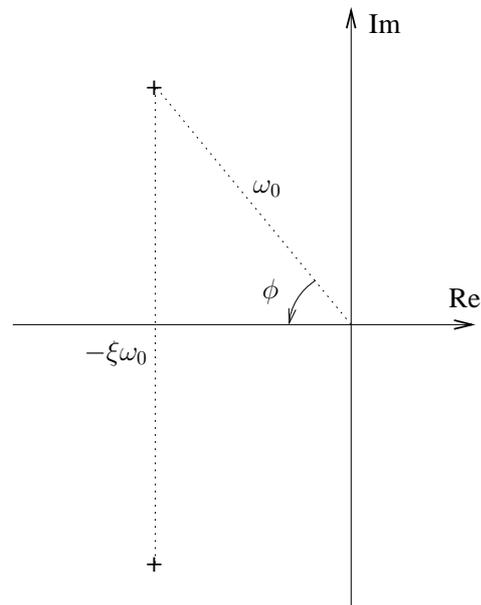


FIG. 2.1 – Poles d'un second ordre de dénominateur $s^2 + 2\xi\omega_0s + \omega_0^2$

Décomposée en éléments simples, cette fonction se réécrit sous la forme :

$$H(s) = \frac{\lambda_1}{(s - p_1)} + \frac{\lambda_2}{(s - p_2)} + K \quad (2.28)$$

Et la réponse à un échelon unitaire à partir d'une condition initiale nulle est :

$$y(t) = \lambda_1 \exp(p_1 t) + \lambda_2 \exp(p_2 t) + K \quad (2.29)$$

Pour que le système soit stable et que $y(t)$ ne diverge pas, il faut que l'on ait $p_1 < 0$ et $p_2 < 0$. Pour des pôles complexes, la condition porte sur les parties réelles.

Le critère de Routh-Hurwitz permet de déterminer si les pôles d'une fonction de transfert sont tous à partie réelle sans les calculer. Considérons un système dont la fonction de transfert s'écrit :

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (2.30)$$

avec $D(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0$. On construit alors un tableau de coefficients comportant $n+1$ lignes (voir tableau 2.2). Les deux premières lignes sont con-

| | | | | | |
|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------|-----|
| n | $c_1^n = a_n$ | $c_2^n = a_{n-2}$ | $c_3^n = a_{n-4}$ | \cdots | 0 |
| $n-1$ | $c_1^{n-1} = a_{n-1}$ | $c_2^{n-1} = a_{n-3}$ | $c_3^{n-1} = a_{n-5}$ | \cdots | 0 |
| $n-2$ | c_1^{n-2} | c_2^{n-2} | c_3^{n-2} | \cdots | 0 |
| $n-3$ | c_1^{n-3} | c_2^{n-3} | c_3^{n-3} | \cdots | 0 |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \cdots | 0 |
| 1 | c_1^1 | c_2^1 | 0 | | |
| 0 | c_1^0 | 0 | | | |

TAB. 2.2 – Tableau de Routh-Hurwitz

stituées des coefficients du dénominateur ; les autres lignes sont déterminées à partir des lignes précédentes de la manière suivante :

$$c_l^k = \frac{-1}{c_1^{k+1}} \begin{vmatrix} c_1^{k+2} & c_{l+1}^{k+2} \\ c_1^{k+1} & c_{l+1}^{k+1} \end{vmatrix} \quad (2.31)$$

par exemple, pour un système d'ordre $n = 5$, on obtient le tableau 2.3 avec $c_1^3 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_4}$, $c_2^3 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_4}$, $c_3^3 = 0$, $c_1^2 = \frac{a_2 c_1^3 - a_4 c_2^3}{c_1^3}$, $c_2^2 = a_0$, $c_3^2 = 0$, $c_1^1 = \frac{c_1^2 c_2^3 - a_0 c_1^3}{c_2^3}$, $c_2^1 = 0$, $c_1^0 = a_0$.

Théorème (Critère de Routh-Hurwitz)

Le système est stable si et seulement si tous les coefficients de la première colonne du tableau de Routh-Hurwitz sont de même signe

Exercice (Critère de Routh-Hurwitz)

1. Déterminez la stabilité de :

$$H(s) = \frac{s + 0.5}{s^3 + 2s^2 + s + 5} \quad (2.32)$$

2. Déterminez la stabilité de :

$$H(s) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 2s + 1} \quad (2.33)$$

3. Déterminez pour quelles valeurs de K le système :

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 4s + K} \quad (2.34)$$

est stable.

| | | | | |
|---|---------|---------|---------|---|
| 5 | a_5 | a_3 | a_1 | 0 |
| 4 | a_4 | a_2 | a_0 | 0 |
| 3 | c_1^3 | c_2^3 | c_3^3 | 0 |
| 2 | c_1^2 | c_2^2 | c_3^2 | 0 |
| 1 | c_1^1 | c_2^1 | 0 | |
| 0 | c_1^0 | 0 | | |

TAB. 2.3 – Exemple de tableau de Routh-Hurwitz pour un systèmes d'ordre 5

2.2.2 Gain

Définition (Gain statique)

On appelle gain statique d'un système son amplification en régime continu.

Pour des signaux constants, les dérivées sont nulles et l'équation (2.3) se simplifie en :

$$a_0 y = b_0 u \quad (2.35)$$

Ainsi, une variation Δ_u de l'entrée se répercute sur la sortie par une variation $\Delta_y = \frac{b_0}{a_0} \Delta_u$. Le gain statique est donc $\frac{b_0}{a_0}$.

Propriété (Gain statique)

Le gain statique d'un système de fonction de transfert $H(s)$ est $H(0)$.

2.2.3 Dépassement

En réponse à un échelon d'amplitude $\Delta_u = u(\infty) - u(0)$, la sortie d'un système varie de $\Delta_y = y(\infty) - y(0)$ de différentes manières.

- Le type de réponse le plus simple est celui d'une réponse toujours croissante (ou décroissante si le gain est négatif).
- De nombreux systèmes présentent un dépassement ; c'est-à-dire que la réponse présente un maximum y_{\max} supérieur à la valeur finale.
- Certains systèmes, plus rares, voient leur sortie décroître avant de croître vers la valeur finale. On parle de système à *non minimal de phase* ; ce sont des systèmes qui comportent des zéros à partie réelle positive.

On exprime le dépassement, en pourcentage, d'un système linéaire de la manière suivante :

$$D_{\%} = 100 \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty) - y(0)} \quad (2.36)$$

Pour un système du second ordre de fonction de transfert $H(s) = \frac{K}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$, le dépassement est égal à² :

$$D_{\%} = 100 \exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \quad (2.37)$$

Exercice (Dépassement d'un système du second ordre)

A partir de l'expression ?? de la réponse d'un système du second ordre résonant, déterminez le dépassement (en pourcentage) de la réponse d'un système du second ordre en fonction de son amortissement. Représentez graphiquement cette fonction.

2.2.4 Rapidité

Définition (Temps d'établissement)

On appelle temps d'établissement³ le temps que met la sortie d'un système stable à atteindre son équilibre, à partir d'une variation de l'entrée en échelon.

On utilise généralement la notion de temps d'établissement à 5 % pour éviter deux types de problèmes :

- un système dynamique rejoint généralement son équilibre de manière exponentielle et met donc en théorie un temps infini à se stabiliser ;
- les mesures sont généralement entachées de bruit ; la sortie $y(t)$ ne se stabilise donc jamais complètement.

Considérons le système en réponse à un échelon $u(t)$ à $t = 0$. La sortie étant en stabilisée à $y(0)$ pour $t < 0$, elle se met à varier à partir de $t = 0$ et évolue jusqu'à se stabiliser à $y(\infty)$. Le temps d'établissement à 5 % est le temps t_1 tel que pour $t > t_1$, on a :

$$|y(t) - y(\infty)| \leq \frac{5}{100} |y(\infty) - y(0)|. \quad (2.38)$$

²Voir l'étude du système du second ordre dans au premier chapitre.

³On utilise également le terme de *temps de réponse* bien que ce terme soit plus approprié dans le cas d'un système asservi.

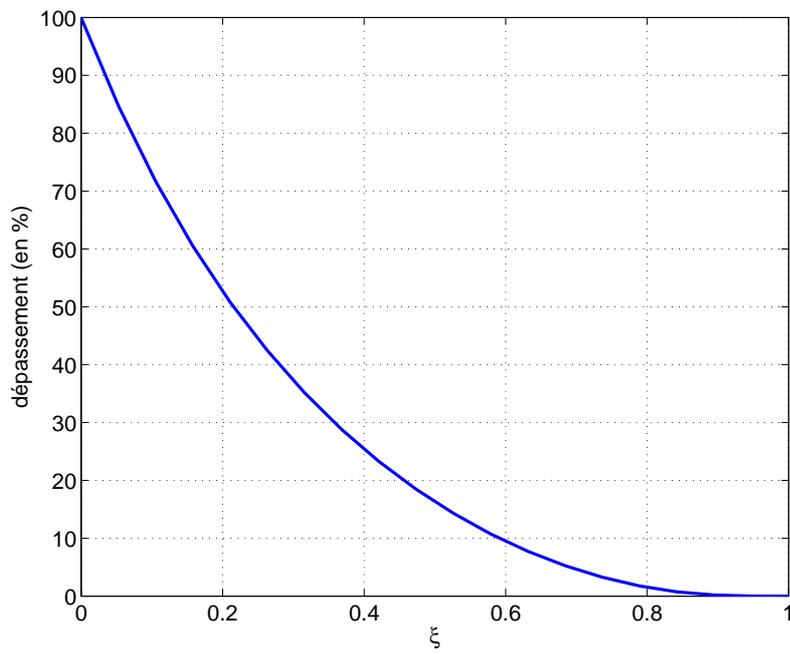


FIG. 2.2 – Dépassement d'un système du second ordre en fonction de l'amortissement

Exercice (Temps d'établissement de systèmes du premier ordre)

Calculez de manière exacte le temps d'établissement à 5 % des systèmes suivants :

1. $H(s) = \frac{b}{s+a}$,
2. $H(s) = K \frac{s+b}{s+a}$,

Propriété (Temps d'établissement d'un système d'ordre un)

Le temps d'établissement d'un système du premier ordre est égal à trois fois sa constante de temps.

Propriété (Temps d'établissement d'un système dynamique)

Le temps d'établissement d'un système dynamique est approximativement égal à trois fois sa constante de temps la plus lente.

Le temps de réponse à 5% d'un système du second ordre est inversement proportionnel à la pulsation propre. Il dépend également de manière non-linéaire de l'amortissement. Cette fonction de dépendance est donnée sur la figure⁴ 2.3. On observe que cette fonction présente des discontinuités. A ω_0 constant, le temps de réponse est minimal pour $\xi = 0.68$ et on a alors $T_r = 2.85/\omega_0$. Pour $\xi > 1$, on peut approcher le temps de réponse par⁵ $t_r \cong 3\xi/\omega_0$. Pour $\xi < 1$, on peut approcher le temps de réponse par $t_r \cong 6/(\xi\omega_0)$.

⁴Le temps de réponse d'un système du second ordre ne peut être donné par une simple formule. En effet, la réponse peut passer par les valeurs correspondant à 105% et 95% de la valeur finale à de nombreuses reprises. Pour tracer cette courbe nous avons d'abord calculé pour chaque instant son appartenance à l'intervalle [95%; 105%]. Puis, en partant de l'instant final qui doit faire partie de l'intervalle, nous avons cherché le premier instant (mais le dernier dans l'ordre chronologique) qui n'entre pas dans l'intervalle. Cet instant est le temps de réponse. De manière plus rigoureuse, cela donne l'algorithme suivant : la réponse s'écrivant $y(k)$ pour les instants t_k , $k = 1 \dots N$. On calcule d'abord la fonction d'appartenance $\phi(k) := 1$ si $|y(k) - K|/K < 0.05$ et $\phi(k) = 0$ dans le cas contraire. En partant de $k := N$, tant que la condition $\phi(k) = 1$ est vérifiée, appliquer $k := k - 1$. Une fois sorti de la boucle, on a $t_r := t(k)$; il s'agit d'une approximation par défaut puisqu'à cet instant, la réponse n'est pas encore entrée dans la zone [.95 ; 1.05].

⁵Cela revient à considérer le pôle basse fréquence r_1 à la pulsation $\omega_2 = \xi\omega_0 - \sqrt{\xi^2 - 1}\omega_0$. Pour $\xi \gg 1$, on a $\omega_2 \cong \omega_0/(2\xi)$. En utilisant la relation $t_r \cong 3/\omega_2$ (le temps de réponse est égal à trois fois la constante de temps la plus faible), on obtient $t_r \cong 6\xi/\omega_0$.

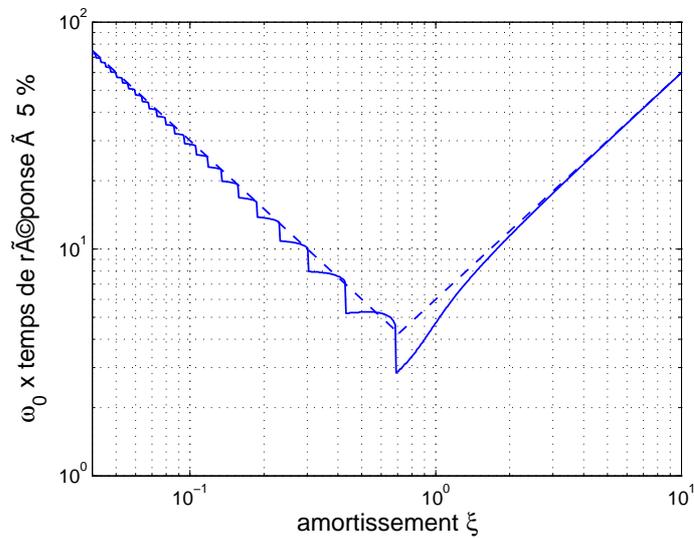


FIG. 2.3 – Temps de réponse d'un système du second ordre (trait plein) et valeur approchée (trait pointillé)

2.3 Analyse fréquentielle

2.3.1 Régime harmonique

Considérons que le système est alimenté par un signal sinusoïdal $u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha)$ de pulsation ω (en rad/s). Puisque le système est linéaire, la sortie sera également sinusoïdale à la même pulsation, du moins au bout d'un certain temps, et s'écrit $y(t) = Y_m \cos(\omega t + \beta)$. On peut définir un gain $G = \frac{Y_m}{U_m}$ et un déphasage $\phi = \alpha - \beta$. Le gain et la phase dépendent de la pulsation et on note $G(\omega)$ et $\phi(\omega)$. La donnée des fonctions $G(\omega)$ et $\phi(\omega)$ permet de caractériser le système dynamique. On parle d'*analyse fréquentielle* ou d'*analyse harmonique*. Pour obtenir expérimentalement ces fonctions, il suffit d'exciter le système avec un signal sinusoïdal, de relever les amplitudes et le déphasage et de recommencer pour différentes valeurs de la fréquence. Le gain est souvent exprimé en décibel (dB) avec $G_{dB} = 20 \log(G)$; le tableau 2.4 donne les équivalences entre gain naturel et gain en dB pour différentes valeurs.

Pour simplifier les calculs, considérons que le système est alimenté avec

un signal complexe $\underline{u}(t) = U_m \exp(j\omega t + \alpha)$; la sortie s'écrit alors : $y(t) = Y_m \exp(j\omega t + \beta)$. Dériver k fois les signaux \underline{u} et \underline{y} revient à multiplier par $(j\omega)^k$. En reprenant le modèle dynamique (2.3), on peut écrire :

$$\underline{y}(t) = H(j\omega)\underline{u}(t) \quad (2.39)$$

On a donc $G(\omega) = |H(j\omega)|$ et $\phi(\omega) = \arg(H(j\omega))$; c'est-à-dire que le gain du système est le module de $H(j\omega)$ et que le déphasage est son argument.

2.3.2 Diagramme de Nyquist

Le diagramme de Nyquist est le lieu du *gain complexe* $H(j\omega)$ lorsque ω varie. En fait, le lieu de Nyquist est principalement utilisé pour analyser la stabilité des systèmes asservis.

2.3.3 Diagramme de Bode

Le lieu de Bode comporte deux courbes :

- Le tracé du gain (en dB ou en échelle logarithmique) en fonction de la pulsation (en échelle log.) ;
- Le tracé de la phase (en degrés) en fonction de la pulsation (en échelle log.)

Il est relativement aisé de tracer le diagramme de Bode d'un système à partir de son tracé asymptotique. Ce dernier s'obtient en considérant qu'entre deux fréquences propres, le système peut être approché⁶ sous la forme Ks^n

⁶Par exemple, pour un système $H(s) = \frac{K(s+10)}{(s+1)(s+100)}$, $H(j\omega)$ peut-être approché par différentes approximations suivant les plages de fréquence :

- pour $\omega < 1$, on a $s + 1 \cong 1$, $s + 10 \cong 10$ et $s + 100 \cong 100$, d'où $H(s) \cong \frac{K}{10}$;
- pour $1 < \omega < 10$, on a $s + 1 \cong s$, $s + 10 \cong 10$ et $s + 100 \cong 100$, d'où $H(s) \cong \frac{K}{10s}$;
- pour $10 < \omega < 100$, on a $s + 1 \cong s$, $s + 10 \cong s$ et $s + 100 \cong 100$, d'où $H(s) \cong 100K$;
- pour $\omega > 100$, on a $s + 1 \cong s$, $s + 10 \cong s$ et $s + 100 \cong s$, d'où $H(s) \cong \frac{K}{s}$.

Notons que les différents modèles asymptotiques donnent les mêmes gains pour les pulsations limites $\omega = 1, 10$ et 100 rad/s.

| | | | | | | | | | |
|----------|------|-----|-----|--------------|---|------------|---|----|-----|
| G | 0.01 | 0.1 | 0.5 | $1/\sqrt{2}$ | 1 | $\sqrt{2}$ | 2 | 10 | 100 |
| G_{dB} | -40 | -20 | -6 | -3 | 0 | 3 | 6 | 20 | 40 |

TAB. 2.4 – Équivalence entre décibels et gain naturel

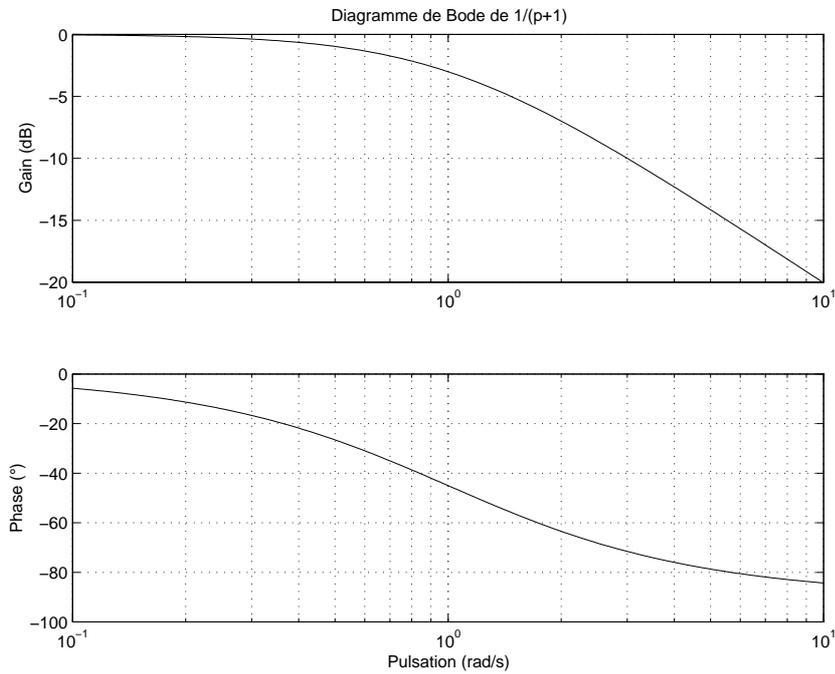


FIG. 2.4 – Réponse fréquentielle d'un système du premier ordre

($n \in \mathbb{Z}$), ce qui donne un gain $G(\omega) = K\omega^n$ et une phase $\phi(\omega) = n\frac{\pi}{2}$. En échelle log., le gain s'écrit $G_{dB}(\omega) = 20 \log(K) + 20n \log(\omega)$, ce qui fait une droite de pente $20n$ dB par décade (dB/dec).

Exercice (Diagramme de Bode d'un système du premier ordre)

Soit le système du premier ordre de fonction de transfert $H(s) = \frac{K}{s+a}$.

1. Déterminez le diagramme de Bode asymptotique du système.
2. Calculez de manière exacte le gain et le déphasage du système à la pulsation $\omega = a$.
3. Déduisez en l'allure du tracé exacte du diagramme de Bode du système.

Les tracés des diagrammes de Bode des systèmes du premier ordre $\frac{1}{s+1}$ et du second ordre $\frac{1}{s^2+2\xi s+1}$ sont donnés sur les figures 2.4 et 2.5.

Remarque

Vous devez être capable de représenter le diagramme de Bode d'un système dynamique en vous appuyant sur le tracé asymptotique.

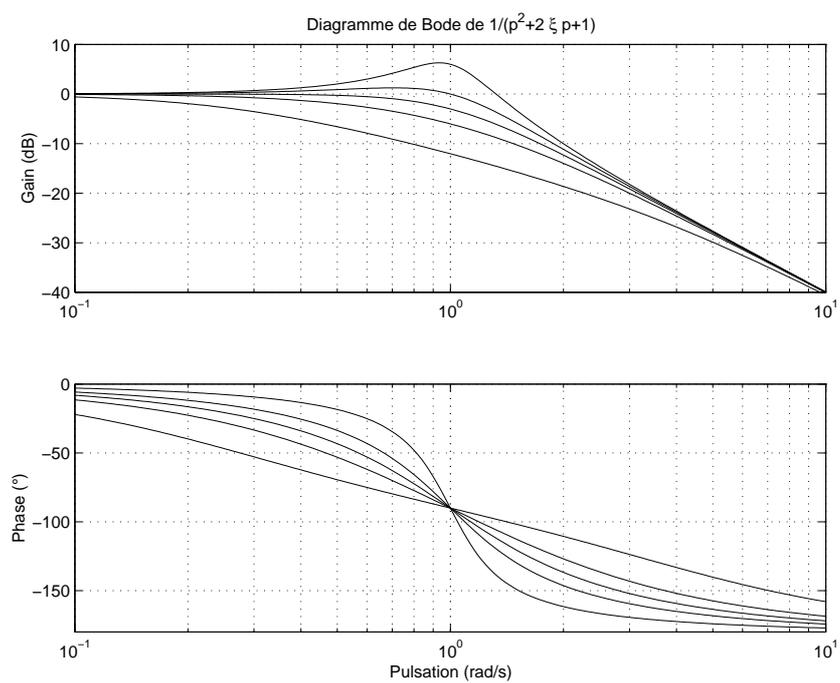


FIG. 2.5 – Réponse fréquentielle de systèmes du second ordre ($\xi = 0.25, 0.5, 0.707, 1$ et 2)

Exercice (Tracé du diagramme de Bode)

Tracé le diagramme de Bode des systèmes suivants en vous appuyant sur le tracé du diagramme asymptotique ; précisez leur gain statique.

1. $\frac{1}{s+a}$
2. $\frac{1}{(s+1)(s+4)}$
3. $\frac{(s+4)}{(s+1)(s+20)}$
4. $\frac{1}{s(s+20)}$
5. $\frac{\exp(-0.01 s)}{s+10}$

2.3.4 Diagramme de Black-Nichols

Le diagramme de Black-Nichols (*Black-Nichols chart*) est le lieu du gain (en dB) en fonction de la phase, paramétré en fonction de la pulsation.

2.3.5 Étude du second ordre

Soit un système du second ordre de fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{K\omega_0}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (2.40)$$

Le gain complexe (harmonique) de ce système s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{K\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\xi\omega_0\omega} \quad (2.41)$$

Son gain est :

$$|H(j\omega)| = \frac{K\omega_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2}} \quad (2.42)$$

et sa phase s'écrit :

$$\arg(H(j\omega)) = -\arctan\left(\frac{2\xi\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad (2.43)$$

Revenons au gain et notons le $G(\omega) = |H(j\omega)|$. On peut réécrire :

$$G^2(\omega) = \frac{(K\omega_0)^2}{(\omega_0^2 - X)^2 + (2\xi\omega_0)^2 X} \quad (2.44)$$

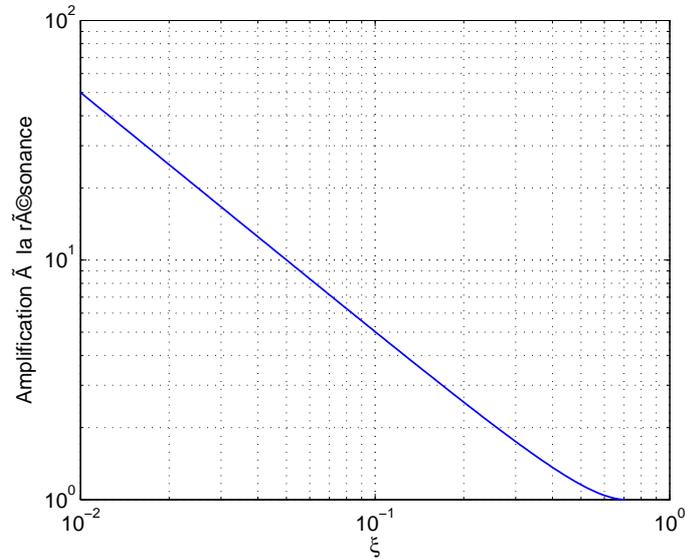


FIG. 2.6 – Amplification maximale en fonction de l’amortissement

où $X = \omega^2$. Le numérateur étant constant, le gain présentera un maximum si son dénominateur présente un minimum. Pour que cela arrive, il faut que sa dérivée par rapport à X s’annule. Notons $D(X) = (\omega_0^2 - X)^2 + (2\xi\omega_0)^2 X$. On a $dD(X)/dX = -2(\omega_0^2 - X) + (2\xi\omega_0)^2$. L’annulation apparaît pour $X = \omega_0^2(1 - 2\xi^2)$. Comme on a $X \geq 0$, cette condition ne peut être satisfaite que si $1 - 2\xi^2$ est positif, ce qui est équivalent à $\xi < \sqrt{2}/2$. En observant le signe de la dérivée seconde, on vérifie que le dénominateur présente un minimum. La résonance se fait à la pulsation $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2}$.

Propriété (Condition de résonance)

Le tracé du gain d’un système du second ordre présente un maximum si $\xi < \sqrt{2}/2$.

Propriété (Pulsation de résonance)

La pulsation de résonance d’un système du second ordre de pulsation propre ω_0 et d’amortissement $\xi < \sqrt{2}/2$ est $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2}$.

Le gain à la résonance, c’est-à-dire le maximum du gain est :

$$G(\omega_r) = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2.45)$$

Il est d'autant plus important que l'amortissement ξ est faible. Le tracé du gain max en fonction de l'amortissement est donné sur la figure 2.6 en échelle logarithmique.

Exercice (Gain du second ordre à la résonance)

Vérifiez l'expression du gain à la résonance.

2.4 Représentation d'état

2.4.1 Introduction

La représentation d'état est un formalisme alternatif à celui de la fonction de transfert. Le système dynamique à temps continu étant représenté par un ensemble d'équations différentielles ordinaires, on peut toujours se ramener un systèmes d'équations premier ordre, quitte à introduire des signaux supplémentaires. Soient $x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t)$ les signaux intervenant dans ces équations. Celles-ci peuvent alors se mettre sous la forme :

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = f_k(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t)), k = 1 \dots n \quad (2.46)$$

où $u(t)$ est l'entrée du système. On définit le vecteur d'état $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ et les équations se mettent sous forme vectorielle que l'on nome *équation d'état* :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (2.47)$$

avec $f() = [f_1(), \dots, f_n()]^T$.

La mesure y du système dépend de l'état et de l'entrée; elle est donnée par l'*équation de mesure* :

$$y(t) = g(x(t), u(t)) \quad (2.48)$$

Pour un système linéaire, les fonctions f et g sont linéaires et les équations se mettent sous la forme :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.49)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.50)$$

Cette représentation a différents avantages par rapport à la fonction de transfert :

1. elle permet de préciser une condition initiale $x(0)$;
2. elle permet de modéliser facilement des systèmes multi-entrées multi-sorties ; u et y sont alors des vecteurs.

2.4.2 Équivalence avec la fonction de transfert

En appliquant la transformée de Laplace aux équations 2.49 et 2.50, on obtient :

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \quad (2.51)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (2.52)$$

De la première équation, on tire :

$$X(s) = (s\mathcal{I}_n - A)^{-1}BU(s) \quad (2.53)$$

où \mathcal{I}_n est la matrice unitaire d'ordre n ; en remplaçant dans l'équation 2.52, on obtient $Y(s) = H(s)U(s)$ avec :

$$H(s) = C(s\mathcal{I}_n - A)^{-1}B + D \quad (2.54)$$

2.4.3 Propriétés

Propriété (Pôles et valeurs propres)

Les pôles de $H(s)$ sont les valeurs propres de A .

Propriété (Système strictement propre)

Pour un système strictement propre, on a $D = 0$.

Exercice (Fonction de transfert d'un système d'état)

Soit un système linéaire dont on donne les matrices d'état :

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad (2.55)$$

$$C = [1 \quad -1] ; \quad D = 0. \quad (2.56)$$

- Déterminez la fonction de transfert du système
- Le système est-il strictement propre ?
- Le système est-il stable ?

Exercice (Modèle d'un moteur à courant continu)

Un moteur à courant continu est commandé par sa tension d'alimentation $u(t)$; on mesure le courant et la vitesse.

$$u(t) = K\Omega(t) + Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} \quad (2.57)$$

$$J\frac{d\Omega(t)}{dt} = Ki(t) - f\Omega(t) \quad (2.58)$$

1. Donnez une représentation d'état du moteur.
2. Calculez les pôles du système.
3. Le système est-il stable ?
4. Déterminez la fonction de transfert entre la tension et le courant.
5. Déterminez la fonction de transfert entre la tension et la vitesse.

Exercice (Système masses-ressort)

On considère un système composé de deux masses m_1 et m_2 en translation, reliées entre elles par un ressort de raideur k et de coefficient de pertes f . On commande la force $u(t)$ appliquée à m_1 . Les mesures sont : les positions z_1 et z_2 de chacune des masses et la force $f = k(z_2 - z_1) + f(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)$ exercée par la masse m_2 sur la masse m_1 par l'intermédiaire du ressort. On prendra $m_1 = 0.2$ kg, $m_2 = 1$ kg, $k = 100$ N/m et $f = 10$ N.s/m

1. Faites un schéma du système.
2. Donnez la fonction de transfert entre $u(t)$ et $z_1(t)$. Tracez son diagramme de Bode.
3. Donnez la fonction de transfert entre $u(t)$ et $z_2(t)$. Tracez son diagramme de Bode.
4. Donnez la fonction de transfert entre $u(t)$ et $f(t)$. Tracez son diagramme de Bode.
5. Donnez une représentation d'état du système.
6. Déterminez la fréquence propre et l'amortissement du système.

2.5 Identification

L'identification du modèle d'un système à partir de données expérimentales est souvent une étape nécessaire. De nombreuses méthodes sont disponibles qui pourraient faire l'objet d'un cours à part entière. Dans cette partie, nous nous contentons de donner quelques exemples de méthodes élémentaires.

De manière générale, on peut séparer le problème de l'identification d'un modèle en deux étapes :

1. la détermination de la structure du modèle (par exemple l'ordre du numérateur et celui du dénominateur),
2. l'estimation des paramètres du modèle.

2.5.1 Approche temporelle

Une manière assez simple de caractériser un système est de l'exciter avec un signal particulier et le plus utilisé, dans ce cas, est le signal en échelon. En comparant la réponse du système avec des réponses types, on peut alors choisir la structure du modèle. Trois exemples sont traités ci-dessous à partir de la réponse à un échelon d'amplitude U . La réponse $y(t)$ a une amplitude $Y = y(\infty) - y(0)$.

Système du premier ordre

Si le système n'a pas de dépassement et que sa pente présente une discontinuité à l'origine, on peut choisir de le modéliser par un premier ordre de la forme $\frac{K}{1+\tau s}$; on peut alors estimer le gain statique K grâce à l'amplification en continu :

$$K = \frac{Y}{U} \quad (2.59)$$

et la constante de temps τ qui est le temps de montée à 63 % (en effet, $1 - \exp(-1) = 0.631$).

Système du second ordre résonant

Si le système a un dépassement et que sa pente ne présente pas de discontinuité, on peut choisir de le modéliser par un second ordre à pôles complexes

conjugués de la forme $\frac{K}{(1+2\xi s/\omega_0+(s/\omega_0)^2)}$. On détermine le gain à partir des amplitudes des variations de l'entrée et de la sortie :

$$K = \frac{Y}{U} \quad (2.60)$$

On détermine l'amortissement ξ à partir du dépassement grâce à la courbe de la figure 2.2. On peut aussi inverser l'expression du dépassement en fonction de l'amortissement ??, ce qui donne :

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{-\pi}{\ln(D)}\right)^2}} \quad (2.61)$$

où $D = D\%/100$. Il reste ensuite à déterminer la pulsation propre ω_0 . Cela se fait à partir de la période T_c des oscillations relevé expérimentalement⁷. On a alors la pseudo-pulsation $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_c}$. La relation suivante entre la pulsation et la pseudo-pulsation :

$$\omega_1 = \sqrt{1 - \xi^2} \omega_0 \quad (2.62)$$

permet de déterminer ω_0 .

Méthode de Strejc

Si le système n'a pas de dépassement (on parle de système *apériodique*) et que sa pente ne présente pas de discontinuité, on peut choisir de le modéliser par une fonction de transfert de la forme :

$$H(s) = \frac{K}{(1 + \tau s)^n} \quad (2.63)$$

La méthode de Strejc permet d'identifier ce modèles à partir de la réponse à un échelon.

Commençons donc par étudier la réponse à un échelon d'un tel systèmes pour $n \geq 2$. La réponse à un échelon d'amplitude U s'écrit :

$$y(t) = KU \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k! \tau^k} \right) \quad (2.64)$$

⁷Le temps qui s'écoule entre deux instants t consécutifs vérifiant $y(t) = y(\infty)$ est $\frac{T_c}{2}$.

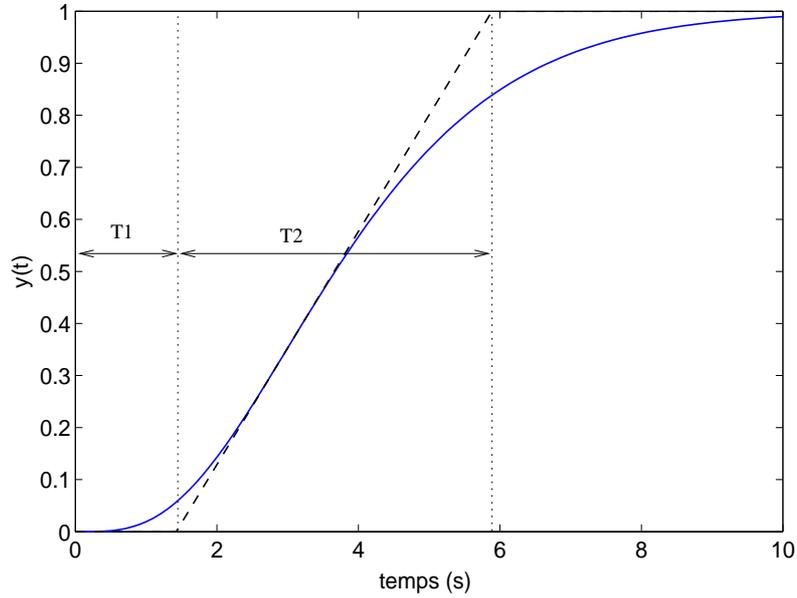


FIG. 2.7 – Réponse à un échelon pour l'identification par la méthode de Strejc

Sa dérivée est :

$$\dot{y}(t) = \frac{KU}{\tau^n} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (2.65)$$

et sa dérivée seconde :

$$\ddot{y}(t) = \frac{KU}{\tau^n} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \frac{t^{n-2}}{(n-1)!} \left(n-1-\frac{t}{\tau}\right) \quad (2.66)$$

On observe que la dérivée seconde s'annule une seule fois pour $t > 0$ en $t_1 = \tau(n-1)$, ce qui signifie que la courbe $y(t)$ présente un point d'inflexion en $(t_1, y(t_1))$. La tangente à la courbe $y(t)$ en ce point coupe l'axe des abscisses en $t = T_1$ et atteint la valeur $y(\infty)$ en $t = T_1 + T_2$. Les valeurs de T_1/τ , T_2/τ et T_1/T_2 sont données dans le tableau 2.5 pour les ordres 2 à 10.

La méthode d'identification peut donc être synthétisée comme suit. À partir de la réponse à un échelon, on identifie dans un premier temps le gain statique $K = \frac{Y}{U}$ où U est l'amplitude de l'échelon d'entrée et Y est l'amplitude de la variation de la mesure. Dans un second temps, on doit identifier l'ordre n du système et la constante de temps τ . Pour cela, on trace

| n | T_1/τ | T_2/τ | T_1/T_2 |
|-----|------------|------------|-----------|
| 2 | 0,2817 | 2,718 | 0,1036 |
| 3 | 0,8055 | 3,695 | 0,2180 |
| 4 | 1,425 | 4,464 | 0,3194 |
| 5 | 2,102 | 5,112 | 0,4103 |
| 6 | 2,811 | 5,699 | 0,4933 |
| 7 | 3,549 | 6,226 | 0,5700 |
| 8 | 4,307 | 6,711 | 0,6417 |
| 9 | 5,081 | 7,164 | 0,7092 |
| 10 | 5,869 | 7,590 | 0,7732 |

TAB. 2.5 – Rapports entre les constantes de temps pour l'identification par la méthode de Strejc

la tangente à la courbe au point d'inflexion⁸. On relève le temps T_1 entre l'instant de déclenchement de l'échelon et l'instant où l'asymptote coupe la valeur initiale de $y(t)$. On relève T_2 entre ce dernier instant et l'instant où l'asymptote atteint la valeur finale de $y(t)$. A partir du rapport T_1/T_2 , on détermine l'ordre du système. Pour la valeur de n choisie, on détermine τ à partir de la valeur de T_1/τ ou de T_2/τ .

Exercice (Identification d'un système du second ordre amorti)

La réponse d'un système à un échelon d'amplitude $U = 2$ déclenché à $t = 0$, est donnée sur la figure 2.8. Identifiez le système par la méthode de Strejc.

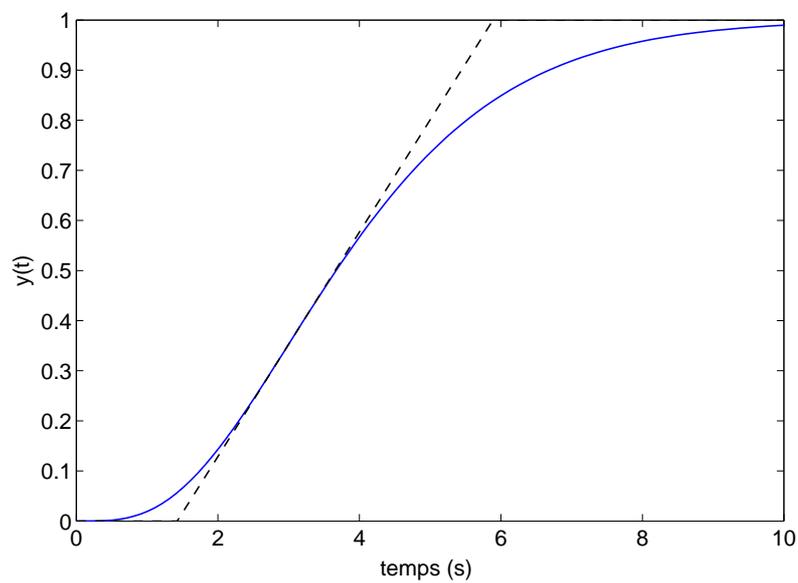
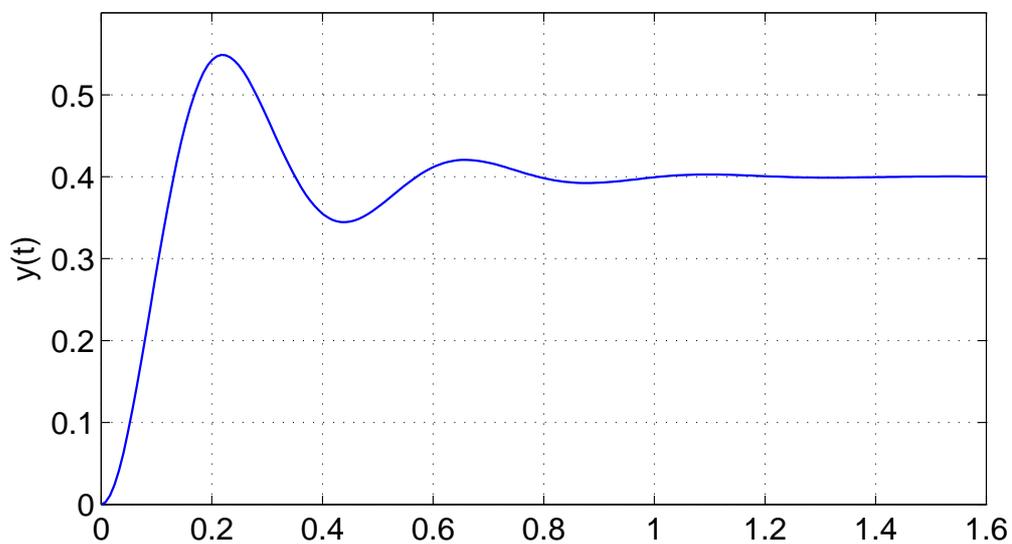
Exercice (Identification d'un système du second ordre oscillant)

On a relevé la réponse à un échelon unitaire, déclenchée à $t = 0$, d'un système dynamique. Cette réponse est donnée sur la figure 2.9. Identifiez un modèle du système.

2.5.2 Approche fréquentielle

Le diagramme de Bode d'un systèmes peut-être obtenu expérimentalement à partir d'une série de mesures en régime sinusoïdal à différentes fréquences.

⁸La tangente à la courbe au point d'inflexion a la particularité de croiser la courbe en ce point. Cette caractérisation est pratique pour déterminer graphiquement cette tangente.

FIG. 2.8 – Réponse à un échelon d'amplitude $U = 2$ (exercice 12)FIG. 2.9 – Réponse à un échelon d'amplitude $U = 1$ d'un système

Pour chaque essai, on relève l'amplitude du signal d'entrée, celle du signal de sortie et le déphasage entre l'entrée et la sortie. A partir de ces données, on peut tracer le diagramme de Bode du système. En analysant ce diagramme, on peut identifier le modèle de systèmes relativement simple.

Par exemple, si le gain est constant en basse fréquence puis décroît à partir d'une certaine fréquence avec un déphasage qui varie entre 0 et -90° , on peut identifier le système à un premier ordre sous la forme $H(s) = \frac{K\omega_1}{s+\omega_1}$. Le gain statique K_1 est identifié au gain en basse fréquence. La pulsation propre ω_1 est obtenue à partir de la fréquence f_1 où le gain du système est $\frac{K}{\sqrt{2}}$: $\omega_1 = 2\pi f_1$.

Exercice (Identification fréquentielle d'un système du premier ordre)

Après avoir vérifié que le système se comportait comme un système du premier ordre, les mesures suivantes ont été effectuées en régime harmonique : à la fréquence de 15 Hz, on a relevé une amplification de 2 (6 dB) et un déphasage de 45° de la sortie par rapport à l'entrée (la sortie est en retard).

→ *Identifiez la fonction de transfert du premier ordre correspondant aux mesures.*

Exercice (Identification fréquentielle d'un système du second ordre)

Après avoir vérifié que le système se comportait comme un système du second ordre amorti, on cherche à l'identifier sous la forme $H(s) = \frac{1}{Ls(1+\tau s)}$. Pour cela, les mesures suivantes ont été effectuées en régime harmonique : à la fréquence de 100 Hz, on a relevé une amplification de -10 dB et un déphasage de -135° de la sortie par rapport à l'entrée.

1. *Donnez l'allure du diagramme de Bode de la fonction de transfert $H(s)$. Précisez les valeurs du gain et de la phase pour $\omega = 1/\tau$.*
2. *Identifiez la fonction de transfert $H(s)$ correspondant aux mesures.*
3. *En réalité, le système a un gain statique fini égal à 20 dB. Comment faut-il modifier la fonction de transfert $H(s)$ pour en tenir compte ?*
4. *Sous quelle condition le comportement à la pulsation $1/\tau$ n'est-il pas affecté par ce changement de modèle ?*
5. *Déduisez-en la fonction de transfert du second ordre respectant l'ensemble des conditions.*

Chapitre 3

Asservissements analogiques

3.1 Introduction aux asservissements

3.1.1 Principe

Considérons un système d'entrée $u(t)$ (la *commande*) et de sortie $y(t)$ (la *mesure*). Le but de l'asservissement consiste à déterminer une loi de commande permettant de calculer automatiquement la commande $u(t)$ de sorte qu'à partir d'une situation de départ quelconque, la sortie $y(t)$ soit capable de suivre un signal de référence $r(t)$ arbitraire, du moins au bout d'un certain temps appelé temps de réponse. Le système réalisant cet asservissement automatique est appelé correcteur (*controller* en anglais).

Pour évaluer la qualité d'un asservissement, on considère sa précision (l'écart entre $r(t)$ et $y(t)$), son temps de réponse (la durée qu'il met pour se stabiliser) et son dépassement (certains systèmes ont tendance à dépasser leur cible avant de se stabiliser). Une autre qualité fondamentale d'un système asservi est la *robustesse*. Un système est dit robuste s'il garde ses propriétés ou performances malgré des modifications de son environnement. Dans la pratique, les valeurs des paramètres d'un système sont amenées à varier (les résistances évoluent en fonction de la température et les inductances sont sujettes à saturation). De plus, des approximations sont souvent faites pour obtenir un modèle simple (on néglige les retards dus aux temps de calcul). Il est important de s'assurer que le système reste stable et conserve certaines performances malgré ces phénomènes.

La qualité d'un asservissement est bien mise en valeur par un essai en échelon. On y mesure l'erreur statique (donnée en %), le temps de réponse (généralement calculé à 5 % de la valeur finale pour ne pas être perturbé par le bruit de mesure) et le dépassement (donné en pourcentage de l'amplitude de la réponse).

L'automatique¹ a deux missions :

- l'asservissement (ou *tracking*) concerne le suivi d'un signal de consigne ;
- la *régulation* concerne le rejet des perturbations (on parle de *réjection*).

Dans de nombreuses cas, les deux objectifs sont atteints avec une loi de commande unique qui permet de suivre le signal de consigne tout en rejetant les perturbations.

3.1.2 Boucle ouverte ou boucle fermée ?

Pour réaliser un asservissement, deux types de stratégies sont envisageables. La première est de calculer la commande uniquement à partir de la référence, le correcteur réalisant une inversion partielle du système. Par exemple, pour un système du premier ordre de la forme $\tau\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$, la loi de commande s'écrit $u(t) = \frac{1}{K}(\tau\dot{r}(t) + r(t))$, ce qui donne $y(t) = r(t)$. Cette technique présente un certain nombre d'inconvénients :

- Elle ne peut stabiliser un système instable.
- Elle peut aboutir à un correcteur instable inutilisable.
- Elle n'est pas robuste car elle nécessite une connaissance précise du modèle du système.

Ces inconvénients font qu'elle est rarement utilisée seule. Néanmoins, elle permet de calculer une valeur nominale du signal de commande. En anglais, on parle de *feed-forward*.

La seconde méthode consiste à inclure dans le signal de commande une *rétroaction* de la mesure, par exemple : $u(t) = -Ky(t)$. Le signe '-' indique qu'il s'agit d'une *contre-réaction*. Ainsi, si la sortie augmente trop, la commande sera faible et devrait permettre de ramener la sortie à une valeur plus

¹On distingue l'automatique, qui concerne les asservissements, de l'automatisme qui concerne la commande par automates séquentiels. Ces deux sciences sont complémentaires et concourent au développement de dispositifs de pilotage automatiques des processus. Cependant, elles ne relèvent pas des mêmes théories et sont donc enseignées séparément.

faible.

Afin de suivre la consigne, le signal de consigne est intégré dans le correcteur. La technique la plus courante consiste à s'appuyer sur l'erreur de régulation $e(t) = r(t) - y(t)$. Le correcteur calcule en temps réel la commande $u(t)$ par une loi liant $u(t)$ et $e(t)$. Cette loi de commande peut être une équation différentielle si on considère un système à temps continu ou une équation aux récurrences pour les systèmes à temps discret. Soit K_0 le gain statique du correcteur (le gain en régime continu tel que $u(t) = K_0 e(t)$ pour des signaux continus). Si le système bouclé est stable, alors, pour une référence constante, tous les signaux convergent vers une limite finie. On a alors $u(t) = K_0 e(t)$ et l'erreur est d'autant plus faible que K_0 est élevé.

Les correcteurs en boucle fermée ont les avantages inverses des correcteurs en boucle ouverte :

- Ils peuvent stabiliser un système instable.
- Moyennant certaines précautions, ils peuvent s'avérer robuste. Notamment, ils peuvent garder un certain niveau de performance malgré des incertitudes sur le modèle du système.

3.1.3 Principes généraux sur la synthèse de correcteurs en boucle fermée (feedback)

L'erreur de régulation est le signal $e(t) = r(t) - y(t)$. On cherche généralement une loi de commande de la forme $U(s) = K(s)E(s)$. Le correcteur $K(s)$ peut prendre diverses formes : proportionnel ($K(s) = K_p$), proportionnel-intégral ($K(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$) ou PID ($K(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$), avance de phase ($K(s) = K \frac{s+a}{s+b}$ avec $a < b$) ou retard de phase ($K(s) = K \frac{s+a}{s+b}$ avec $a > b$). Le but consiste à régler le correcteur de manière à donner de bonnes propriétés au système asservi (précision, rapidité, dépassement, robustesse).

Le transfert de l'ensemble système + correcteur est aussi appelé *fonction de transfert en boucle ouverte* s'écrit $G_{bo}(s) = G(s)K(s)$. Le *transfert en boucle fermée* est le transfert entre $r(t)$ et $y(t)$. Pour l'obtenir, on peut écrire $Y(s) = G_{bo}(s)E(s) = G_{bo}(s)(R(s) - Y(s))$, ce qui donne $Y(s) = G_{bf}(s)R(s)$ avec :

$$G_{bf}(s) = \frac{G_{bo}(s)}{1 + G_{bo}(s)} \quad (3.1)$$

Le but de l'asservissement est d'obtenir $G_{\text{bf}}(s) \cong 1$ pour avoir $y(t) \cong r(t)$, ce qui sera le cas si le gain de $G_{\text{bo}}(s)$ est suffisamment élevé. Pour obtenir un gain élevé de la boucle ouverte, on est amené à chercher un correcteur avec un gain élevé. Cependant, un gain trop élevé entraînera une instabilité du système. Il faudra donc faire un compromis entre la stabilité et les performances.

Voici les caractéristiques d'une bonne fonction de transfert en boucle ouverte (système + correcteur) :

- Dans la plage de fréquences correspondant à la bande passante (autour de la pulsation de coupure de l'axe 0 dB dans le diagramme de Bode), la phase doit être supérieure à 180° additionné de la marge de phase (au minimum supérieure à 145° pour une marge de phase de 45°). Si ce n'est pas le cas, il faut soit ajouter de la phase au système par l'ajout d'effet intégrale (ou d'une avance de phase), soit réduire la bande passante (diminuer la rapidité) en diminuant le gain du correcteur.
- En basse fréquence, le gain doit être élevé afin de garantir une erreur statique faible et un bon rejet des perturbations. Si ce n'est pas le cas, il faut ajouter un effet intégrale (ou retard de phase).
- En haute fréquence, il n'est pas nécessaire que le correcteur ait un quelconque effet. Il est même recommandé d'avoir un gain qui chute en haute fréquence pour une meilleure robustesse. En effet, un gain élevé risquerait d'exciter des dynamiques mal identifiées et d'aboutir à une instabilité. Si ce n'est pas le cas, il est recommandé d'ajouter au correcteur un effet de filtrage passe-bas.

Exercice (Correcteur TOR à hystérésis)

Un système du premier ordre de modèle $u(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt}$ est asservi en courant à la valeur $i^*(t)$ par le loi de commande Tout-Ou-Rien suivante :

- $u(t) = E$ si $i(t) < i^*(t) - \frac{1}{2}\Delta_i$ et $u(t)$ reste égal à E tant que $i(t)$ ne dépasse pas $i^*(t) + \frac{1}{2}\Delta_i$.
- $u(t) = 0$ si $i(t) > i^*(t) + \frac{1}{2}\Delta_i$ et $u(t)$ reste nul tant que $i(t)$ ne devient pas inférieur à $i^*(t) - \frac{1}{2}\Delta_i$.

La valeur initiale du courant est nulle ; on donne : $R = 1 \Omega$, $L = 10 \text{ mH}$, $\Delta_i = 1 \text{ A}$ et $E = 50 \text{ V}$. On considérera une référence du courant constante $i^*(t) = 10 \text{ A}$.

1. Déterminez l'allure du courant.

2. Déterminez à quel instant a lieu la première commutation de la commande.
3. Déterminez à quel instant a lieu la deuxième commutation de la commande.
4. Déterminez à quel instant a lieu la troisième commutation de la commande.
5. Quelle est la fréquence du régime permanent ?

3.1.4 Lieu d'Evans

Le lieu des pôles ou lieu d'Evans est un outils permettant d'analyser l'évolution des pôles d'un système en boucle fermée en fonction des variations d'un gain k . Le système en boucle ouverte étant noté $H_{bo}(s)$, la fonction de transfert en boucle fermée est $H_{bf}(s) = \frac{k H_{bo}(s)}{1+k H_{bo}(s)}$. Il s'agit d'un outils d'analyse qui sert aussi en synthèse puisqu'il permet de régler le gain d'un correcteur.

Dans le cas d'une fonction de transfert en boucle ouverte factorisée sous la forme :

$$H_{bo}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

la fonction de transfert en boucle fermée s'écrit :

$$H_{bf}(s) = \frac{k N(s)}{k N(s) + D(s)} = \frac{k \prod_{k=1}^m (s - z_i)}{k \prod_{k=1}^m (s - z_i) + \prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

La boucle fermée comprends n pôles. Pour $k = 0$, ces pôles sont identiques aux pôles de $H_{bo}(s)$. Lorsque k augmente, ces pôles se déplacent. Deux comportements sont observés :

- m pôles se dirigent vers les zéros de $H_{bo}(s)$,
- $n - m$ pôles tendent vers l'infini.

L'exemple d'un système $H_{bo}(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$ avec $b_1 = 1.1892$, $b_0 = -1.4162$, $a_3 = 2.9737$, $a_2 = 2.8217$, $a_1 = 0.9142$ et $a_0 = 0.0908$ est donné sur la figure 3.1. Ses pôles sont tous réels : -1.33 , -1.13 , -0.318 et -0.189 . L'unique zéro est un réel positif : 1.19 . On a $n = 4$ et $m = 1$. On

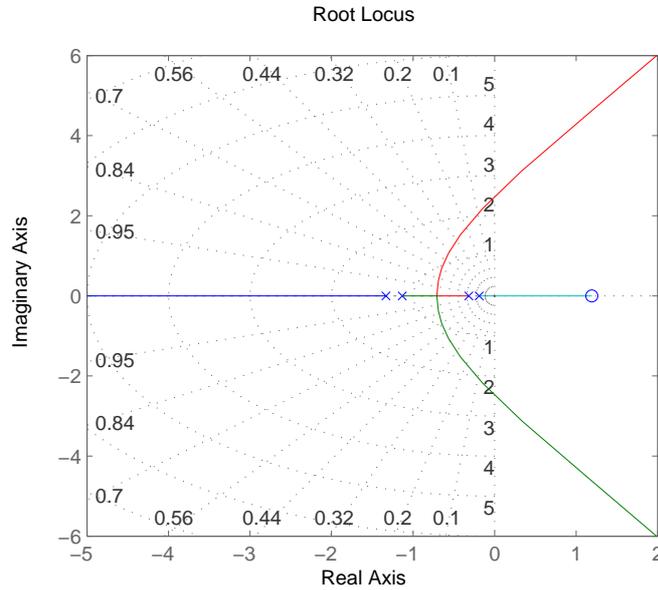


FIG. 3.1 – Lieu d’Evans du système $H_{bo}(s) = \frac{b_1s+b_0}{s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}$

observe trois branches infinies, partant des trois pôles haute fréquence : un pôle réel de fréquence croissante et deux pôles complexes conjugués dont les parties réelles deviennent positives à partir d’une certaine valeur de k . Le pôle basse fréquence présente une branche finie en direction du zéro. Ainsi, on analyse qu’un gain trop élevé entraîne le système en instabilité. Les fonctions Matlab utilisables sont `rltool` et `rlocus` (fonction obsolète).

3.1.5 Exemple introductif

Exemples 1

Soit un système corrigé de fonction de transfert en boucle ouverte $G_{bo}(s) = \frac{K}{s}$. Sa fonction de transfert en boucle fermée s’écrit alors :

$$G_{bf}(s) = \frac{G_{bo}(s)}{1 + G_{bo}(s)} = \frac{1}{1 + \tau s} \quad (3.2)$$

avec $\tau = \frac{1}{K}$. Le système en boucle fermée possède les caractéristiques suivantes :

- il est stable si $\tau > 0$;
- son gain est unitaire ;
- sa bande passante à -3 dB est égale à $\omega_{bp} = K = \frac{1}{\tau}$ qui est aussi la pulsation de coupure de l'axe 0 dB ; son temps de réponse à 5 % est égal à 3τ .

On observe que ce système est bien asservi ; il peut servir de modèle pour penser l'asservissement de nombreux systèmes.

Exemples 2

Ce second exemple concerne la régulation de vitesse d'un véhicule. Il est donné sous forme d'exercice corrigé.

Exercice (Variateur de vitesse)

Soit un véhicule de masse $M = 1000$ kg, soumis à un coefficient de frottement $f = 100$ Ns/m. On suppose que la commande $u(t)$ est la force appliquée au véhicule. Le véhicule roule sur une route faisant un angle α avec l'horizontale ($\alpha > 0$ pour une côte). On note $y(t)$ sa vitesse qui est aussi la grandeur à asservir à une référence $r(t)$. L'accélération de pesanteur est $g = 10$ m.s⁻²

1. Donnez l'équation différentielle liant $u(t)$, $y(t)$ et $\alpha(t)$.
2. Dans l'hypothèse d'une faible pente, écrivez le modèle sous forme de fonctions de transfert. Explicitez ces fonctions de transfert.
3. Donnez le modèle sous forme d'état.

On envisage dans un premier temps une correction en boucle ouverte $u(t) = fv(t) + M\dot{v}(t)$.

- 4 Dans le cas où $\alpha(t) = 0$, montrez que $y(t) = r(t)$.
- 5 Montrez que cet asservissement ne permet pas de rejeter les perturbations créées par les changements de pente.

On envisage alors une correction en boucle fermée $U(s) = K(s)(R(s) - Y(s))$ avec :

$$K(s) = K_p \frac{1 + \tau_i s}{\tau_i s} \quad (3.3)$$

où $\tau_i = M/f$.

- 6 Donnez la fonction de transfert entre $r(t)$ et $y(t)$.
- 7 Donnez la fonction de transfert entre $\alpha(t)$ et $y(t)$.
- 8 Expliquez en quoi cette loi de commande permet à la fois d'asservir $y(t)$ à la consigne $r(t)$ tout en rejetant la perturbation $\alpha(t)$.

Correction

1. La relation fondamentale de la dynamique projetée sur un axe lié à la route s'écrit :

$$M\dot{y}(t) = u(t) - fy(t) - Mg \sin(\alpha(t)) \quad (3.4)$$

2. Le terme $\sin(\alpha)$ est non-linéaire. Pour α petit, on a $\sin(\alpha) \simeq \alpha$ et le modèle s'écrit alors dans le domaine de Laplace :

$$Y(s) = \frac{1}{Ms + f}(U(s) + Mg\alpha(s)) \quad (3.5)$$

3. L'équation ?? se réécrit avec α petit :

$$\dot{y}(t) = -\frac{f}{M}y(t) + \frac{1}{M}u(t) - g\alpha(t) \quad (3.6)$$

En notant x l'état, le modèle s'écrit sous la forme :

$$\dot{x}(t) = -\frac{f}{M}x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{M} & -g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \alpha(t) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$y(t) = x(t) \quad (3.8)$$

Il s'agit d'un systèmes à deux entrées et une sortie qui s'écrit sous la forme :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\tilde{u}(t) \quad (3.9)$$

$$y(t) = Cx(t) + D\tilde{u}(t) \quad (3.10)$$

avec $\tilde{u}(t) = [u(t) \ \alpha(t)]^T$ et :

$$A = -\frac{f}{M} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} & -g \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$C = 1 \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

4. La commande s'écrit dans le domaine de Laplace :

$$U(s) = (Ms + f)R(s) \quad (3.13)$$

Avec $\alpha(s) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{Ms + f} U(s) \\ &= \frac{1}{Ms + f} (Ms + f) R(s) \\ &= R(s) \end{aligned} \quad (3.14)$$

d'où $y(t) = r(t)$.

5. Pour $\alpha(t)$ non nul, on a :

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{Ms + f} (U(s) + Mg\alpha(s)) \\ &= \frac{1}{Ms + f} ((Ms + f)R(s) + Mg\alpha(s)) \\ &= R(s) + \frac{Mg}{Ms + f} \alpha(s) \end{aligned} \quad (3.15)$$

La vitesse n'est plus égale à la référence; elle est perturbée par un terme $\frac{Mg}{Ms+f}\alpha(s)$. En régime permanent, ce terme est égal à $\frac{Mg}{f}\alpha$. Par exemple, pour une pente de 10 %, c'est-à-dire $\alpha = 0,1$, ce terme est égal à 10 m/s, soit 36 km/h. Ce type de commande en boucle ouverte n'est donc pas acceptable.

6. On a :

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{Ms + f} (U(s) + Mg\alpha(s)) \\ &= \frac{1}{Ms + f} \left(K_p \frac{1 + \tau_i s}{\tau_i s} (R(s) - Y(s)) + Mg\alpha(s) \right) \\ &= \frac{K_p}{\tau_i s} (R(s) - Y(s)) + \frac{Mg/f}{1 + \tau_i s} \alpha(s) \\ \left(1 + \frac{K_p}{\tau_i s}\right) Y(s) &= \frac{K_p}{\tau_i s} R(s) + \frac{Mg/f}{1 + \tau_i s} \alpha(s) \\ Y(s) &= \frac{1}{1 + \frac{\tau_i}{K_p} s} R(s) + \frac{\frac{Mg}{K_p f} \tau_i s}{(1 + \tau_i s)(1 + \frac{\tau_i}{K_p} s)} \alpha(s) \end{aligned} \quad (3.16)$$

La fonction de transfert entre $R(s)$ et $Y(s)$ est donc :

$$H_{\text{bf}}(s) = \frac{1}{1 + \frac{\tau_i}{K_p} s} \quad (3.17)$$

7. La fonction de transfert entre $\alpha(s)$ et $Y(s)$ est :

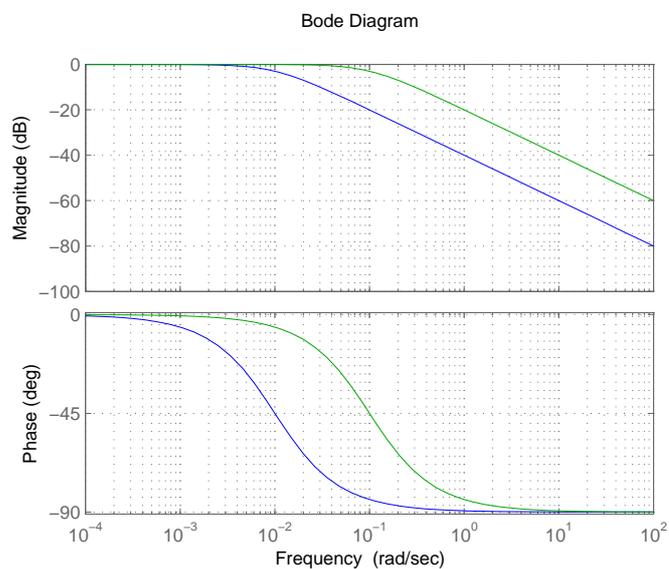
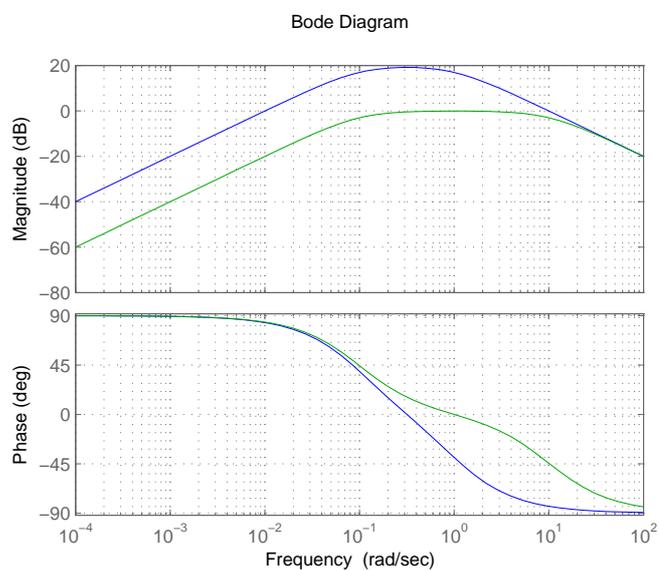
$$H_{y\alpha}(s) = \frac{\frac{Mg}{K_p f} \tau_i s}{(1 + \tau_i s)(1 + \frac{\tau_i}{K_p} s)} \quad (3.18)$$

8. La fonction de transfert $H_{bf}(s)$ entre r et y a un gain unitaire et une pulsation de bande passante égale à $\omega_c = \frac{K_p}{\tau_i}$ (en rad/s). Cette bande passante peut être choisie arbitrairement en ajustant K_p .

Par ailleurs la fonction de transfert $H_{y\alpha}(s)$ entre α et y a un gain statique $H_{y\alpha}(0)$ nul, ce qui fait qu'il n'y a aucune erreur de vitesse en régime permanent pour une pente constante. On peut aussi s'intéresser au gain fréquentiel $H_{y\alpha}(j\omega)$. Il s'agit d'un filtre de type passe-bande de bande passante $[\frac{1}{\tau_i}; \frac{K_p}{\tau_i}]$. Sur cette plage de fréquence, l'expression approchée peut être obtenue avec $1 + \tau_i s \simeq \tau_i s$ et $1 + \frac{\tau_i}{K_p} s \simeq 1$. Le gain est alors $|H_{y\alpha}(j\omega)| \simeq \frac{Mg}{K_p f}$. Ce gain est inversement proportionnel à K_p et peut être rendu aussi faible que souhaité en augmentant K_p .

Le diagramme de Bode des fonctions de transfert $H_{bf}(s)$ et de $H_{y\alpha}(s)$ sont données sur les figures 3.7 et 3.3. Les réponses à un échelon d'amplitude 0,1 rad sont données sur les figures 3.4 et 3.5. On observe que les réponses sont plus rapides avec $K_p = 100$ que $K_p = 10$ et que l'erreur transitoire de vitesse passe de 0,8 m/s à 0,1 m/s pour une variation de pente de 0,1 rad. Le programme Matlab permettant d'obtenir ces courbes est le suivant :

```
M = 1000 ; f = 100 ; g = 10 ;
G = tf(1, [M f]) ;
toi = M/f ; Kp1 = 10 ; Kp2 = 100 ;
K1 = tf(Kp1*[toi 1], [toi 0]) ;
K2 = tf(Kp2*[toi 1], [toi 0]) ;
Gbo1 = G*K1 ; Gbo2 = G*K2 ;
Gbf1 = feedback(Gbo1,1) ; Gbf2 = feedback(Gbo2,1) ;
Gya1 = tf([M*g*toi/(Kp1*f) 0], conv([toi 1], [toi/Kp1 1])) ;
Gya2 = tf([M*g*toi/(Kp2*f) 0], conv([toi 1], [toi/Kp2 1])) ;
wmin = 1e-4 ; wmax = 1e2 ;
figure(1) ; bode(Gbf1,Gbf2,{wmin,wmax}) ; grid on
figure(2) ; bode(Gya1,Gya2,{wmin,wmax}) ; grid on
figure(3) ; step(Gbf1,Gbf2,400) ; grid on ; axis([0 400 0 1.05])
figure(4) ; step(0.1*Gya1,0.1*Gya2,20) ; grid on
```

FIG. 3.2 – Diagramme de Bode de $H_{bf}(s)$ pour $K_p = 10$ et $K_p = 100$ FIG. 3.3 – Diagramme de Bode de $H_{y\alpha}(s)$ pour $K_p = 10$ et $K_p = 100$

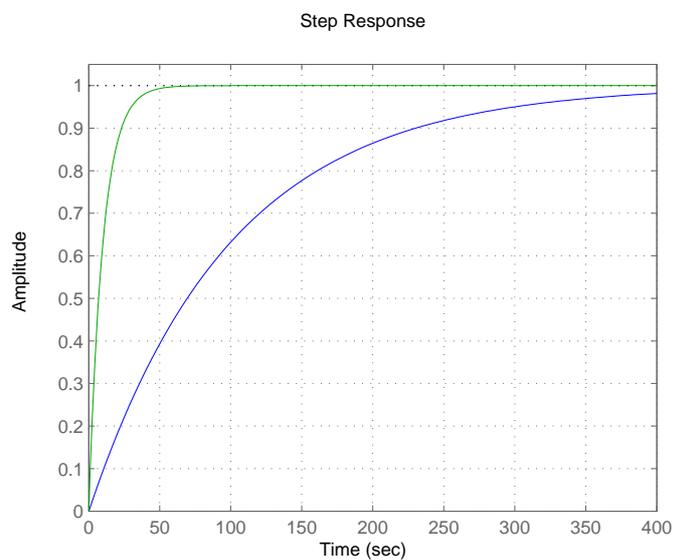


FIG. 3.4 – Réponse à un échelon d'amplitude 0, 1 rad de $H_{bf}(s)$ pour $K_p = 10$ et $K_v = 100$

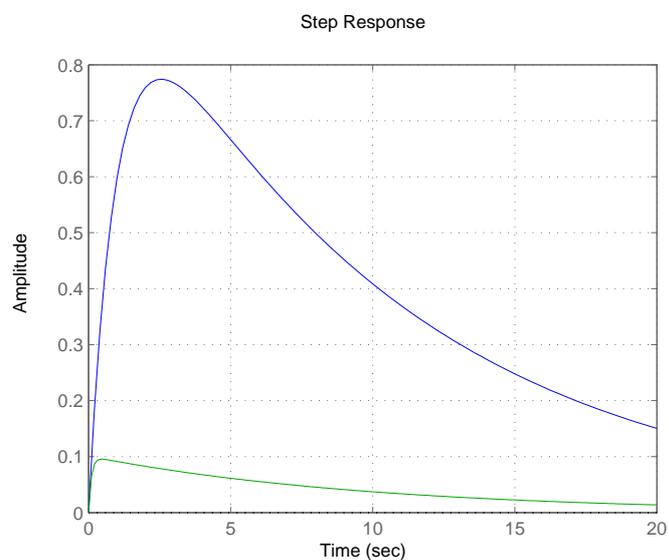


FIG. 3.5 – Réponse à un échelon d'amplitude 0, 1 rad de $H_{ya}(s)$ pour $K_p = 10$ et $K_v = 100$

Cas général

A la lumière des exemples précédents, on observe qu'un système bien asservi présente un gain en boucle ouverte qui est élevé en basse fréquence ($|H_{bo}(j\omega)| \gg 1$). Ce gain est décroissant et atteint 0 dB à la pulsation ω_c . On peut alors déterminer de manière approximative la fonction de transfert en boucle fermée $H_{bf}(s) = \frac{H_{bo}(s)}{1+H_{bo}(s)}$:

- Pour $\omega \ll \omega_c$, on a $1 + H_{bo}(s) \simeq H_{bo}(s)$ d'où $H_{bf}(s) \simeq 1$.
- Pour $\omega \gg \omega_c$, on a $1 + H_{bo}(s) \simeq 1$ d'où $H_{bf}(s) \simeq H_{bo}(s)$.

Pour $\omega \simeq \omega_c$, le gain peut être plus ou moins amorti suivant que $H_{bo}(j\omega_c)$ soit plus ou moins proche de -1 .

A titre d'exemple, considérons les fonctions de transfert en boucle ouverte :

$$H_{bo}(s) = \frac{K(s+a)}{s^2(s+b)} \quad (3.19)$$

avec $K = b\sqrt{ab}$ et $\frac{b}{a} = \lambda$. Le diagramme de Bode des fonctions de transfert obtenues pour différentes valeurs de λ sont données sur la figure 3.6. Les fonctions de transfert en boucle fermée sont données sur la figure 3.7. Dans l'exemple considéré, la pulsation de coupure à 0 dB de la FTBO est $\omega_c = 1$ rad/s. Pour $\omega \ll \omega_c$, on a bien $H_{bf}(s) = 1$; pour $\omega \gg \omega_c$, on a bien $H_{bf}(s) = H_{bo}(s)$. Pour $\omega = \omega_c$, le comportement (amorti ou résonant) diffère suivant la phase de la boucle ouverte à cette pulsation. Plus la phase est proche de -180° , plus on est résonant.

Le programme Matlab permettant d'obtenir ces courbes est le suivant :

```
w1 =10 ; Tabl = [2 4 8 16 32] ;
wmin = 1e-2 ; wmax = 1e2 ;
for Ind = 1 :length(Tabl),
    lam = Tabl(Ind) ;
    a = w1/sqrt(lam) ; b = w1*sqrt(lam) ; K = b*sqrt(a*b) ;
    Hbo = tf(K*[1 a],[1 b 0 0]) ;
    Hbf = feedback(Hbo,1) ;
    figure(1) ; bode(Hbo,{wmin,wmax}) ; hold on
    figure(2) ; bode(Hbf,{wmin,wmax}) ; hold on
end
figure(1) ; grid on
figure(2) ; grid on
```

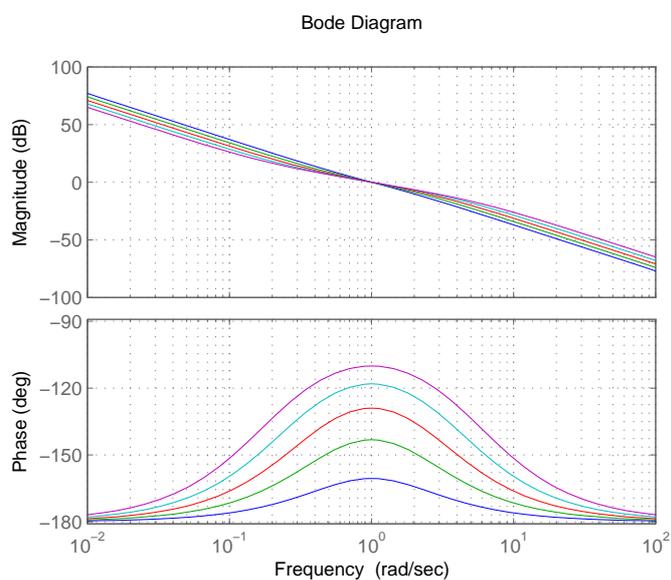


FIG. 3.6 – Diagramme de Bode du système en boucle ouverte pour $\lambda = 2, 4, 8, 16$ et 32

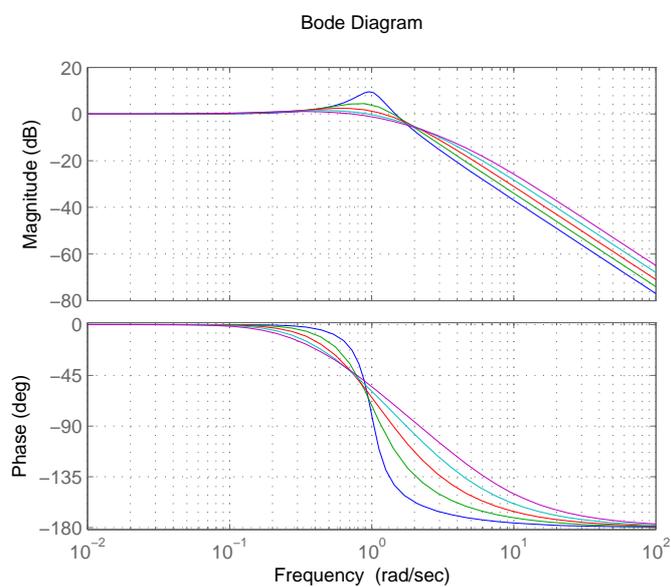


FIG. 3.7 – Diagramme de Bode du système en boucle fermée

3.2 Analyse des systèmes asservis

3.2.1 Stabilité

Une première condition pour que la commande ait un sens est que le système en boucle fermée soit stable. Les méthodes d'étude de la stabilité des systèmes, présentées au paragraphe 2.2.1 restent valables. D'autres méthodes existent qui s'appuient sur l'étude de la stabilité de la FTBF à partir de la FTBO. Ces méthodes ont l'intérêt d'être directement utilisables lors de la synthèse du correcteur.

Propriété (Critère du revers)

Un système bouclé ne comportant pas de pôle à partie réelle positive est stable si le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte (système + correcteur) passe à droite du point -1 .

Ce résultat est un cas particulier du théorème de Nyquist qui, lui, s'applique en présence de zéros à partie réelle positive.

Définition (Marge de phase)

La marge de phase est le supplément de phase du système en boucle ouverte par rapport à -180° lorsque le gain atteint 1 (ou 0 dB).

Méthode de mesure de la marge de phase sur le lieu de Bode : repérer sur la courbe du gain la fréquence pour laquelle le gain coupe 0 dB. Relever la phase ϕ pour cette pulsation. La marge de phase est $180^\circ - \phi$.

Définition (Marge de gain)

La marge de gain est l'inverse du gain du système en boucle ouverte lorsque la phase atteint -180° .

Méthode de mesure de la marge de gain sur le lieu de Bode : repérer sur la courbe de la phase la fréquence pour laquelle la pulsation coupe -180° . Relever le gain G (G_{dB}) pour cette pulsation. La marge de gain est $1/G$ (ou $-G_{dB}$).

Propriété

Un système stable a une marge de phase positive et une marge de gain supérieure à 1 (positive si on compte en dB).

3.2.2 Rapidité

Comme pour un système en boucle ouverte, on définit le temps d'établissement comme étant le temps que met le système à se stabiliser. Pour obtenir une évaluation de temps de réponse, on peut donc dire qu'il est égal à trois fois la constante de temps la plus lente.

Une seconde possibilité existe pour estimer de manière approchée la rapidité d'un système asservi, en s'appuyant cette fois sur la FTBO. Pour expliquer, prenons par exemple une FTBO de la forme $H_{bo}(s) = \frac{\omega_1}{s}$. Son gain décroît avec une pente de -20 dB/dec et coupe l'axe 0 dB à la pulsation ω_1 . Le gain en boucle fermée s'écrit alors $H_{bf}(s) = \frac{1}{1+s/\omega_1}$. Il s'agit d'un système du premier ordre de constante de temps $\frac{1}{\omega_1}$. Son temps de réponse est donc $t_r = \frac{3}{\omega_1}$. A partir de ce résultat, on peut en déduire un moyen de déterminer approximativement le temps de réponse de tout système.

Propriété (Temps de réponse d'un système asservi)

Le temps de réponse d'un système asservi est approximativement égal à $\frac{3}{\omega_1}$ où ω_1 est la pulsation de coupure à 0 dB de la FTBO.

3.2.3 Précision

Idéalement, un système asservi a un gain statique unitaire. Pour définir sa précision, on peut donner son gain statique :

$$G_{bf}(0) = \frac{G_{bo}(0)}{1 + G_{bo}(0)} \quad (3.20)$$

On peut aussi donner le gain statique du transfert entre la référence et l'erreur :

$$\frac{1}{1 + G_{bo}(0)} \quad (3.21)$$

qui doit être le plus faible possible en amplitude.

3.2.4 Dépassement

Le dépassement d'un système asservi se définit comme pour un système en boucle ouverte (voir paragraphe 2.2.3). Le dépassement est un critère temporel et les méthodes de synthèse des correcteurs sont généralement établies

en fréquentiel (sur le diagramme de Bode ou de Black). Or, il n'y a pas de relation générale pour tous les systèmes entre le dépassement et les propriétés fréquentielles de la FTBF. On peut cependant s'appuyer sur la propriété suivante pour modifier le dépassement d'un système asservi :

Propriété (Dépassement et marge de phase)

Plus la marge de phase d'un système asservi est élevée, plus son dépassement est réduit.

On utilise généralement des marges de phase de l'ordre de 45 à 90°.

Exercice (Marge de phase et dépassement)

Soit un système de fonction de transfert $H(s) = \frac{1}{s(s+a)}$. On souhaite l'asservir avec un correcteur proportionnel de gain K .

1. Écrivez la FTBO du système.
2. Tracez le diagramme de Bode de la FTBO.
3. Déterminez l'expression de la marge de phase du système asservi. Donnez l'allure de ses variations en fonction de K .
4. Déterminez la FTBF du système.
5. Déterminez l'amplification maximale (la résonance) du système asservi. Donnez l'allure de ses variations en fonction de K .
6. Déterminez le dépassement du système. Donnez son allure en fonction de K .
7. Déduisez-en la relation entre le dépassement et la marge de phase pour le système considéré.

3.2.5 Rejet de perturbation

Certains systèmes sont perturbés par des signaux extérieurs. On appelle *perturbation* ces signaux et on parle de *régulation* le problème s'asservissement consistant à garder une consigne en présence de perturbation. Dans la suite, on pourra considérer un système avec une perturbation $p(t)$ en entrée, c'est-à-dire que :

$$Y(s) = G(s)(U(s) + P(s)) \quad (3.22)$$

Pour une loi de commande $U(s) = K(s)E(s)$, le transfert entre $r(t)$ et $y(t)$ s'écrit $Y(s) = H_{yp}(s)P(s)$ avec :

$$H_{yp}(s) = \frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad (3.23)$$

Dans la bande passante, on a $|K(j\omega)G(j\omega)| \gg 1$ et $H_{yp}(s) \simeq \frac{G(s)}{K(s)G(s)} = \frac{1}{K(s)}$. Pour qu'un asservissement permette un bon *rejet de perturbation*, il faut que le gain de $H_{yp}(s)$ soit faible et donc que le gain du correcteur soit élevé. L'utilisation d'un correcteur présentant un gain élevé en basse fréquence (effet intégrale) s'avère nécessaire dans les problèmes où le rejet de perturbation est nécessaire.

3.3 Méthodes de synthèse

3.3.1 Les différentes démarches

- Différentes démarches sont possibles pour synthétiser un correcteur.
- Dans les cas simples, il est possible d'écrire la fonction de transfert en boucle fermée et de régler le ou les paramètres du correcteur de manière à obtenir une fonction de transfert en boucle fermée satisfaisante.
 - Certaines méthodes s'appuient sur une caractérisation de la réponse du système à un échelon. C'est le cas de la fameuse méthode de Ziegler et Nichols qui s'appuie sur un modèle approché du système comportant un premier ordre en série avec un retard.
 - Il est possible de synthétiser un correcteur en modélisant sa FTBO et en réglant le correcteur de manière à obtenir une marge de phase et une marge de gain satisfaisante. Une part importante des méthodes et des exercices présentés dans la suite de cette sous-partie relèvent de cette approche.

3.3.2 Correcteur proportionnel (P)

Le correcteur proportionnel est le plus simple des correcteurs. Il ne permet pas toujours d'obtenir des performances très élevées mais il peut suffire dans certains cas si le cahier des charges n'est pas trop contraignant ou si le système a un comportement assez simple. Expérimentalement, son réglage peut se faire directement en partant d'un gain faible et en augmentant petit à petit jusqu'à atteindre un comportement satisfaisant. Pour un gain trop élevé, le système deviendra instable ce qui se manifestera d'abord par des oscillations de plus en plus importantes.

Exercice (Correction prop. d'un système du premier ordre)

Un système du premier ordre d'entrée $u(t)$, de sortie $y(t)$ et de modèle

$\tau \dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$ est asservi par un correcteur proportionnel de gain K_c . On donne $K = 0,2$ et $\tau = 80$ ms

1. Déterminez l'équation différentielle liant le signal de référence $r(t)$ et la mesure $y(t)$.
2. Déterminez la fonction de transfert du système en boucle fermée liant $R(s)$ et $Y(s)$.
3. Déterminez les expressions du gain statique et de la constante de temps du système bouclé.
4. Déterminez le gain du correcteur permettant d'obtenir un temps d'établissement à 5 %, T_m , égal à 30 ms.
5. Calculez le gain statique obtenu.

Exercice (Correcteur prop. d'un système du second ordre)

Soit un système de transfert $G(s) = \frac{K}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)}$. On envisage d'asservir ce système par un correcteur proportionnel. On a $K = 10$, $\omega_1 = 10$ rad/s et $\omega_2 = 50$ rad/s.

1. Représentez le diagramme de Bode de la FTBO.
2. Déterminez la pulsation pour laquelle la phase est à -135° .
3. Déterminez la valeur du gain permettant d'obtenir une marge de phase de 45° .
4. Déterminez la marge de gain.
5. Déterminez de manière approchée le temps de réponse du système.
6. Déterminez la précision du système asservi.

3.3.3 Correcteur proportionnel intégral (PI)

L'intérêt de la correction de type intégrale est de permettre une erreur statique nulle. En effet, si le système comporte un intégrateur et se stabilise à un point d'équilibre, tous les signaux sont constants. Or, pour que la sortie d'un intégrateur soit constante, il est nécessaire que son entrée soit nulle. Si l'entrée de l'intégrateur est reliée à l'erreur de régulation, l'effet du terme intégral sera bien d'annuler cette erreur. Notons que l'erreur est annulée même en présence d'une perturbation. Annuler l'erreur en régime permanent est une chose, mais le faire rapidement en est une autre. Il convient donc

d'être capable de régler le correcteur de manière adéquate.

Deux types de corrections PI sont possibles :

- en utilisant le signal d'erreur $e(t) = r(t) - y(t)$ et en calculant la commande avec $U(s) = K(s)E(s)$ où $K(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$. Les fonctions de transfert en boucle fermée s'écrivent alors :

$$H_{\text{yr}}(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad (3.24)$$

$$H_{\text{yp}}(s) = \frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad (3.25)$$

$$H_{\text{ur}}(s) = \frac{K(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad (3.26)$$

$$H_{\text{up}}(s) = -\frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad (3.27)$$

$$H_{\text{er}}(s) = \frac{1}{1 + K(s)G(s)} \quad (3.28)$$

$$H_{\text{ep}}(s) = -\frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad (3.29)$$

- on peut également choisir une loi de commande de la forme $U(s) = -K_p Y(s) + \frac{K_i}{s}(R(s) - Y(s))$.

Exercice (Correcteur PI pour système du premier ordre)

Soit un système d'équation différentielle $\tau \dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$ avec $\tau = 20$ ms et $K = 0,4$. On envisage une loi de commande proportionnelle-intégrale de la forme $u(t) = -K_p y(t) + K_i \int^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau$.

1. Déterminez l'équation différentielle du second ordre liant la référence et la mesure et modélisant le système bouclé.
2. Montrez que l'erreur statique est nulle quelque soit les valeurs des paramètres du correcteur.
3. Déterminez les valeurs des paramètres permettant d'obtenir une pulsation propre de 200 rad/s et un amortissement de 1.

Exercice (Asservissement PI d'un système du second ordre)

Soit un système de fonction de transfert $H(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b)}$ avec $a = 10$ rad/s,

$b = 40 \text{ rad/s}$ et $K = 10$. On envisage d'utiliser un correcteur PI de la forme $K(s) = \frac{K_p}{s} (s + \frac{1}{\tau_i})$ où K_p est le gain du correcteur et τ_i est sa constante de temps. On choisit la stratégie suivante : on règle le correcteur de manière à compenser le pôle basse fréquence du système et à avoir une marge de gain de 45° .

1. Tracez l'allure du diagramme de Bode du système et de celui du correcteur pour des valeurs quelconques de ses paramètres.
2. Écrivez la FTBO du système.
3. Donnez la valeur de τ_i et simplifiez l'expression de la FTBO en conséquence.
4. Tracez le diagramme de Bode de la FTBO.
5. Donnez la valeur de K_p permettant de respecter la marge de phase spécifiée.
6. Donnez le temps de réponse approché du système.
7. Quelle est la précision du système asservi ?
8. On suppose que le système est perturbé en entrée par un signal exogène $p(t)$ qui s'ajoute à $u(t)$. Calculez la fonction de transfert en boucle fermée $H_{yp}(s)$ entre $P(s)$ et $Y(s)$.
9. Tracez l'allure du diagramme de Bode de $H_{yp}(s)$.
10. Calculez le gain maximal de $H_{yp}(s)$. Pour quel pulsation est-il obtenu ?

Exercice (Correction PI d'un système à retard)

On considère un système du premier ordre avec retard de fonction de transfert $H(s) = \frac{K \exp(-t/\tau)}{s+a}$ avec $a = 1 \text{ rad/s}$, $\tau = 0.1 \text{ s}$ et $K = 1$. On envisage d'utiliser un correcteur PI de la forme $K(s) = \frac{K_p}{s} (s + \frac{1}{\tau_i})$. On choisit la stratégie suivante : on règle le correcteur de manière à compenser le pôle du système et à avoir une marge de gain de 45° .

1. Tracez l'allure du diagramme de Bode du système et de celui du correcteur pour des valeurs quelconques de ses paramètres.
2. Écrivez la FTBO du système.
3. Donnez la valeur de τ_i et simplifiez l'expression de la FTBO en conséquence.
4. Tracez le diagramme de Bode de la FTBO.

5. Donnez la valeur de K_p permettant de respecter la marge de phase spécifiée.
6. Donnez le temps de réponse approché du système.
7. Quelle est la précision du système asservi ?

Méthode de l'optimum symétrique

Cette méthode permet d'obtenir de très bon réglages des correcteur PI pour de nombreuses applications. On suppose que le système à asservir a comme fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{1}{Ls(1 + \tau s)}. \quad (3.30)$$

Le correcteur PI s'écrivant $K(s) = K_p \frac{1 + \tau_i s}{\tau_i s}$, la FTBO s'écrit :

$$H_{bo}(s) = K_p \frac{1 + \tau_i s}{\tau_i L s^2 (1 + \tau s)} \quad (3.31)$$

On règle le correcteur de la manière suivante :

- On choisit τ_i dans un rapport $a > 1$ donné par rapport à τ :

$$\tau_i = a\tau \quad (3.32)$$

La FTBO s'écrit alors² :

$$H_{bo}(s) = \frac{K_p}{a\tau L s^2} \frac{1 + a\tau s}{1 + \tau s} \quad (3.33)$$

Son gain complexe à la pulsation ω s'écrit :

$$H_{bo}(j\omega) = \frac{K_p}{a\tau L (j\omega)^2} \frac{1 + ja\tau\omega}{1 + j\tau\omega} = \frac{K_p}{a\tau L (j\omega)^2} \frac{1 + a\tau^2\omega^2 + j\tau\omega(a - 1)}{1 + a\tau^2\omega^2} \quad (3.34)$$

et son argument est :

$$\arg(H_{bo}(j\omega)) = -\pi + \arctan\left(\frac{\tau\omega(a - 1)}{1 + a\tau^2\omega^2}\right) \quad (3.35)$$

²La FTBO a la même structure que dans l'exemple présenté au paragraphe 3.1.5, page 55. On pourra donc consulter le diagramme de Bode disponible à cette partie du document.

Sa phase présente un maximum ϕ_{\max} en $\omega^* = \frac{1}{\sqrt{a\tau}}$ et on a :

$$H_{\text{bo}}(j\omega^*) = -\frac{K_p\tau}{L} \frac{1 + j\sqrt{a}}{1 + j/\sqrt{a}} = \frac{j\sqrt{a}K_p\tau}{L} \frac{1 + j\sqrt{a}}{1 - j\sqrt{a}} \quad (3.36)$$

Le gain est :

$$|H_{\text{bo}}(j\omega^*)| = \frac{\sqrt{a}K_p\tau}{L} \quad (3.37)$$

et la phase est :

$$\phi_{\max} = \arg(H_{\text{bo}}(j\omega^*)) = -\frac{3\pi}{2} + 2 \arctan(\sqrt{a}) \quad (3.38)$$

- On règle alors le gain de manière à ce que la marge de phase corresponde au maximum de la phase, c'est-à-dire que l'on doit avoir $|H_{\text{bo}}(j\omega^*)| = 1$, d'où :

$$K_p = \frac{L}{\sqrt{a\tau}} \quad (3.39)$$

La constante a est choisie de manière à assurer une marge de phase $\Delta\phi = \phi_{\max} + \pi$. On a :

$$\Delta\phi = -\frac{\pi}{2} + 2 \arctan(\sqrt{a}) \quad (3.40)$$

d'où :

$$a = \tan^2\left(\frac{\Delta\phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.41)$$

3.3.4 Correcteur proportionnel dérivé (PD)

L'instabilité d'un système asservi est lié au fait que la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte soit inférieure à -180° lorsque le gain passe par 0 dB. Une des possibilités pour augmenter la phase de la boucle ouverte est d'utiliser un effet dérivé (ou aussi une avance de phase).

Exercice (Correcteur PD et système du second ordre)

Soit un système du second ordre d'équation différentielle $\ddot{y}(t) + 10\dot{y}(t) + 100y(t) = 20u(t)$. On envisage d'asservir ce système par un correcteur proportionnel-dérivé dont le comportement est régi par l'équation différentielle de la forme $u(t) = K_p(r(t) - y(t)) - K_d\dot{y}(t)$.

1. Déterminez la pulsation propre, l'amortissement et le gain statique du système en boucle ouverte.
2. Déterminez la forme de l'équation différentielle liant la référence et la mesure.
3. Déterminez les paramètres K_p et K_d du correcteur de sorte que le système en boucle ouverte ait une pulsation propre de 50 rad/s et un amortissement égal à 1.
4. Déterminez le gain statique du système asservi ainsi réglé.

3.3.5 Correcteur PID

3.3.6 Correcteur à avance de phase

Il s'agit d'un correcteur de la forme :

$$K(s) = K_p \frac{s + a}{s + b} \quad (3.42)$$

avec $b > a$. Comme pour l'effet dérivée, ce correcteur permet d'augmenter la bande passante d'un système en ajoutant de la phase à la boucle ouverte. Il peut être assimilé à un correcteur PD dont le gain est tronqué en haute fréquence.

Exercice (Correction à avance de phase pour intégrateur double) Soit un système de type double intégrateur de fonction de transfert $H(s) = \frac{K}{s^2}$ avec $K = 10$. On envisage de l'asservir par un correcteur à avance de phase (??).

1. Représentez le diagramme de Bode du système à asservir.
2. Représentez le diagramme de Bode du correcteur.
3. Donnez la FTBO du système; donnez l'allure de son diagramme de Bode.
4. Déterminez le maximum de la phase du correcteur en fonction de $\frac{b}{a}$ ainsi que la pulsation à laquelle ce maximum est atteint.
5. Déterminez le rapport $\frac{b}{a}$ permettant d'apporter une phase de 60° .
6. Déterminez le correcteur permettant d'avoir une marge de phase de 60° et un temps d'établissement de 10 ms.

3.3.7 Correcteur à retard de phase

Il s'agit d'un correcteur de la forme :

$$K(s) = K_p \frac{s + a}{s + b} \quad (3.43)$$

avec $b < a$. Ce correcteur présente un gain plus élevé en basse fréquence qu'en haute fréquence. Son action est comparable à celle d'un correcteur PI dont le gain en basse fréquence est limité.

Annexe A

Décomposition en éléments simples

Toute fraction rationnelle en s peut s'écrire comme une somme d'éléments simples de la forme $\lambda_k s^k$, $\frac{\mu_k}{s+p_k}$ ou $\frac{\alpha_k s + \beta_k}{s^2 + 2\xi_k \omega_k s + \omega_k^2}$. Par exemple, on peut écrire :

$$\frac{1}{(s+a)(s+b)} = \frac{\lambda_1}{s+a} + \frac{\lambda_2}{s+b} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{1}{(s+a)^n} = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{(s+a)^k} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s + b_0} = \lambda_1 s + \lambda_0 + \frac{\mu}{s + b_0} \quad (\text{A.3})$$

Pour obtenir la décomposition en éléments simples, il faut :

1. Déterminer la structure de la décomposition ;
2. Déterminez les coefficients de la décomposition.

Pour déterminer les coefficients de cette décomposition, on peut chercher à identifier directement les deux expressions, ce qui aboutit à la résolution d'un système d'équations comportant autant d'équations que de paramètres inconnus. Une autre approche, plus simple, consiste à déterminer à déterminer un par un chacun des coefficients en utilisant des valeurs particulières. Par exemple, pour déterminer le coefficient λ_1 de l'équation A.1, on peut multiplier les deux termes de l'équation par $s + a$ puis prendre comme valeur particulière $s = -a$, de manière à annuler une partie des termes. On obtient alors $\lambda_1 = \frac{1}{b-a}$. De la même manière, on obtient $\lambda_2 = \frac{1}{a-b}$.

Exercice (Décomposition en éléments simples)

Décomposez en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1.
$$\frac{1}{(s+a)(s+b)} \quad (\text{A.4})$$

2.
$$\frac{s+a}{s+b} \quad (\text{A.5})$$

3.
$$\frac{s+a}{(s+b)^2} \quad (\text{A.6})$$

4.
$$\frac{1}{(s+a)^2(s+b)} \quad (\text{A.7})$$

5.
$$\frac{s+a}{(s+b)(s+c)} \quad (\text{A.8})$$

6.
$$\frac{s+a}{(s+b)^2(s+c)} \quad (\text{A.9})$$

Bibliographie

- [1] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rotella, and I. Zambetakis, *Modélisation et Identification des Process*, Technip.
- [2] C. Sueur, P. Vanheeghe, and P. Borne, *Automatique des Systèmes Continus*, Technip.
- [3] M. Rivoire and J.L. Ferrier, *Cours d'Automatique*, Eyrolles.
- [4] R.H. Bishop, *Modern Control Systems Analysis and Design using Matlab and Simulink*, Addison-Wesley.
- [5] J.L. Martin de Carvalho, *Dynamical Systems and Automatic Control*, Prentice-Hall.
- [6] C.L. Phillips and R.D. Harbor, *Feedback Control Systems*, Prentice-Hall.
- [7] V. Minzu and B. Lang, *Commande Automatique des Systèmes Linéaires Continus - Cours avec Applications utilisant Matlab*, Ellipses.
- [8] J.J. DiStephano, A.R. Stubberud, and I.J. Williams, *Systèmes Asservis*, McGraw-Hill.
- [9] E. Ostertag, *Systèmes et Asservissements Continus*, TechnoSup, Ellipses.
- [10] G.F. Franklin, J.D. Powell, and A. Emami-Noeimi, *Feedback Control of Dynamical Systems*, Addison-Wesley.
- [11] P. Siary, *Automatique de Base*, Ellipses.
- [12] A. Crosnier, G. Abba, B. Jouvencel, and R. Zapata, *Ingénierie de la Commande des Systèmes*, Ellipses.
- [13] P. de Larminat, *Automatique*, Hermès.
- [14] J.C. Gille, P. Decaulne, and M. Péglerin, *Dynamique de la Commande Linéaire*, Dunod.