CLASSE : 2^{nd} F3 – 2^{nd} F4 – BA MATHEMATIQUES

CORRIGE TD 1

EXERCICE 1

Ensembles de définition des fonctions.

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe car f est une fonction polynôme.

soit $D_f = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{1-5x}{3-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe ssi $3 - x \neq 0$

or $3 - x = 0 \Leftrightarrow -x = -3 \Leftrightarrow x = 3$

Soit $D_f =]-\infty, 3[\cup]3 ; +\infty[$

c) $f(x) = \dfrac{3}{(x-3)(2x-3)}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe ssi $(x-3)(2x-3) \neq 0$

or $(x-3)(2x-3) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0$ ou $2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = \frac{3}{2}$

soit $D_f = \mathbb{R} - \{\frac{3}{2} ; 3\}$

d) $f(x) = \sqrt{-x+3}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe ssi $-x + 3 \geq 0$

or $-x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -3 \Leftrightarrow x \leq 3$

Soit $D_f =]-\infty, 3]$

e) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{|x|}}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe ssi $\begin{cases} \sqrt{|x|} \neq 0 \\ |x| \geq 0 \end{cases}$

or $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$

$\sqrt{|x|} = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Soit $D_f = \mathbb{R}^*$ ou $D_f =]-\infty, 0[\cup]0 ; +\infty[$

g) $f(x) = \dfrac{3x+2}{\sqrt{3x+7}}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe ssi $\begin{cases} \sqrt{3x+7} \neq 0 \\ 3x+7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3x+7>0$

Or $3x+7>0 \Leftrightarrow 3x > -7 \Leftrightarrow x > -\dfrac{7}{3}$

Soit $D_f =]-\dfrac{7}{3} ; +\infty[$

EXERCICE 2

1- Ensemble de definition de la fonction f

$\forall x \in A$, $f(x)$ existe ssi $x-1 \neq 0$

or $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$D_f = \{-5 ; -2 ; -1 ; 0 ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{2} ; \sqrt{3} ; 5\}$

2- Images des réels -2, 0 et $\sqrt{3}$

$f(-2) = \dfrac{2}{-2-1} = \dfrac{2}{-3} = -\dfrac{2}{3}$

$f(0) = \dfrac{2}{0-1} = \dfrac{2}{-1} = -2$

$f(\sqrt{3}) = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1$

3- Antécedents des reels -3, -4, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$

il s'agit de resoudre les équations de la forme $f(x) = k$. Ainsi:

* $f(x) = -3 \Leftrightarrow \dfrac{2}{x-1} = -3 \Leftrightarrow 2 = -3(x-1)$

$\Leftrightarrow 2 = -3x+3$

$\Leftrightarrow 3x = 3-2$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$

L'antécedent de -3 est donc $\frac{1}{3}$

* $f(x) = -4 \Leftrightarrow \dfrac{2}{x-1} = -4 \Leftrightarrow 2 = -4x+4$

$\Leftrightarrow -4x = 4-2$

$\Leftrightarrow -4x = 2$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

Or $-\frac{1}{2} \notin A$.

L'antécedent de -4 n'existe pas.

* $f(x) = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 2 \times 3 = 1(x-1)$

$\Leftrightarrow 6 = x-1$

$\Leftrightarrow x = 6+1$

$\Leftrightarrow x = 7$

Or $7 \notin A$. L'antécedent de $\frac{1}{3}$ n'existe pas.

* $f(x)=\frac{1}{2} \iff \frac{2}{x-1}=\frac{1}{2} \iff 4=x-1$
$\iff x=5$

L'antécédent de $\frac{1}{2}$ est 5.

EXERCICE 3

1- Appartenance des points à la courbe $(\mathcal{C})$
un point $M(\alpha,\beta)\in(\mathcal{C})$ ssi $f(\alpha)=\beta$.

Ainsi :

- Pour $A\binom{2}{2}$ on a :
$$f(2)=\frac{3\times 2}{2^2-1}=\frac{6}{4-1}=\frac{6}{3}=2$$
le point A appartient donc à $(\mathcal{C})$

- Pour $B\binom{3}{1}$
$$f(3)=\frac{3\times 3}{3^2-1}=\frac{9}{9-1}=\frac{9}{8}$$
$\frac{9}{8}\neq 1$, le point B n'appartient pas à $(\mathcal{C})$

- Pour $C\binom{0}{-1}$
$$f(0)=\frac{3\times 0}{0^2-1}=\frac{0}{-1}=0$$
$0\neq -1 \Rightarrow C\notin(\mathcal{C})$

- Pour $D\binom{-2}{2}$
$$f(-2)=\frac{3\times(-2)}{(-2)^2-1}=\frac{-6}{4-1}=-\frac{6}{3}=-2$$
$(-2)\neq 2 \Rightarrow D\notin(\mathcal{C})$.

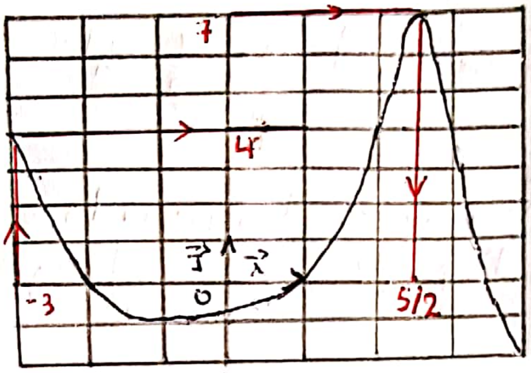
2. Points de $(\mathcal{C})$ d'abscisse $\frac{1}{2}$ et d'abscisse $-\frac{3}{4}$

- Pour $x=\frac{1}{2}$
on a : $f(\frac{1}{2})=\frac{3\times\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^2-1}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}-1}=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{3}{4}}=-2$
Le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse $\frac{1}{2}$ est $E\binom{\frac{1}{2}}{-2}$

- Pour $x=-\frac{3}{4}$ on a :
$$f(-\tfrac{3}{4})=\frac{3\times(-\frac{3}{4})}{(-\frac{3}{4})^2-1}=\frac{-\frac{9}{4}}{\frac{9}{16}-1}=\frac{-\frac{9}{4}}{-\frac{7}{16}}=-\frac{9}{4}\times\left(-\frac{16}{7}\right)=\frac{36}{7}$$
Le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse $-\frac{3}{4}$ est $F(-\frac{3}{4};\frac{36}{7})$

CORRIGE TD2

EXERCICE 1



1 - Détermination graphique des images des réels

N.B. graphiquement, l'image d'un réel $x \in x'ox$ (axe des abscisses) est obtenue par projection de cet élément sur la courbe parallèlement à l'axe des ordonnées suivi de la projection sur l'axe des ordonnées parallèlement à l'axe des abscisses. Ainsi

- Pour le réel -3, on a $f(-3) = 4$
- Pour le réel -2, on a $f(-2) = 0$
- Pour le réel 3, on a $f(3) = 4$
- Pour le réel 4, on a $f(4) = -2$

2 - Détermination des antécédents des réels

N.B. graphiquement, l'antécédent d'un réel est obtenu par une démarche inverse à celle de la détermination de l'image d'un réel. Ainsi

- Pour le réel -2, on a $y = -2 \Leftrightarrow f(x) = -2 \Rightarrow x = 4$
- Pour le réel 0, on a $y = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$, $x = 1$ et $x = \frac{7}{2}$

  le réel 0 a donc trois antécédents : -2 ; 1 et $\frac{7}{2}$
- Pour le réel 4, on a $y = 4 \Leftrightarrow f(x) = 4 \Leftrightarrow x = -3$; $x = 2$ et $x = 3$
- Pour le réel 7, on a $y = 7 \Leftrightarrow f(x) = 7 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

EXERCICE 2 :

1 - Etude des variations et tableau de variation des fonctions numériques f.

- Pour la figure 1 :

  L'ensemble de définition de f est $D_f = [-8 ; 0]$ et on a :

  $f(-8) = -1$, $f(0) = 6$

  $f(-8) < f(0)$, la fonction f est croissante $\forall x \in [-8, 0]$

* Tableau de variation.

x	-8		9
$f(x)$	-1	$\nearrow$	6

- Pour la figure 2
  * Sens de variations
    L'ensemble de définition de f est $D_f = [-2 ; 2]$
    $f(-2) = 4$; $f(0) = -2$, $f(2) = 4$

    $\forall x \in [-2, 0]$, $f(-2) \geq f(x) \geq f(0)$, la fonction f est donc strictement décroissante sur $[-2, 0]$

    $\forall x \in [0, 2]$, $f(0) \leq f(x) \leq f(2)$, la fonction f est strictement croissante sur $[0, 2]$
  * Tableau de variation

x	-2		0		2
$f(x)$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4

— Pour la figure 3
  * sens de variations.
    L'ensemble de définition de f est $D_f = [-5 ; 5]$

    $f(-5) = 1$ $f(-3) = -2$, $f(\frac{5}{2}) = \frac{9}{2}$ $f(5) = -3$

    $\forall x \in [-5, -3]$, $f(-5) \geq f(x) \geq f(-3)$, f est décroissante sur $[-5, -3]$

    $\forall x \in [-3 ; \frac{5}{2}]$, $f(-3) \leq f(x) \leq f(\frac{5}{2})$, f est croissante sur l'intervalle $[-3 ; \frac{5}{2}]$

    $\forall x \in [\frac{5}{2}, 5]$, $f(\frac{5}{2}) \geq f(x) \geq f(5)$. , f est donc decroissante sur $[\frac{5}{2}, 5$
  * Tableau de variations

x	-5		-3		$\frac{5}{2}$		5
$f(x)$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	-3

2- a) Image directe de l'intervalle $[-3, 4]$ (fig3).

$f(-3) = -2 \quad f(4) = 0$

on constate que $\forall x \in [-3, 4],\ -2 \leq f(x) \leq \frac{9}{2}$

d'où $f([-3; 4]) = [-2; \frac{9}{2}]$

b) Image réciproque de l'intervalle $[-3; \frac{5}{2}]$

$y = -3 \Leftrightarrow f(x) = -3 \Leftrightarrow x = 5$

$y = \frac{5}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 0$ et $x = \frac{7}{2}$

on constate que $-3 < -2 < 1 < \frac{5}{2} \Leftrightarrow f(5) < f(-3) < f(-5) < f(\frac{5}{2})$

d'où $\forall y \in [-3, \frac{5}{2}],\ -5 \leq f^{-1}(y) \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$

Soit $f^{-1}[-3; \frac{5}{2}] = [-5; 5]$

Scanné avec Cam