CLASSES : $2^{nd}$ F3 – $2^{nd}$ F4 – BA MATHEMATIQUES

# CHAPITRE VIII : FONCTIONS NUMERIQUES

## I. Généralités sur les fonctions

### 1. Définition

A et B étant deux ensembles non vides, on appelle fonction de A vers B, toute rélation qui à chaque élément de A associe un ou zéro élément de B.

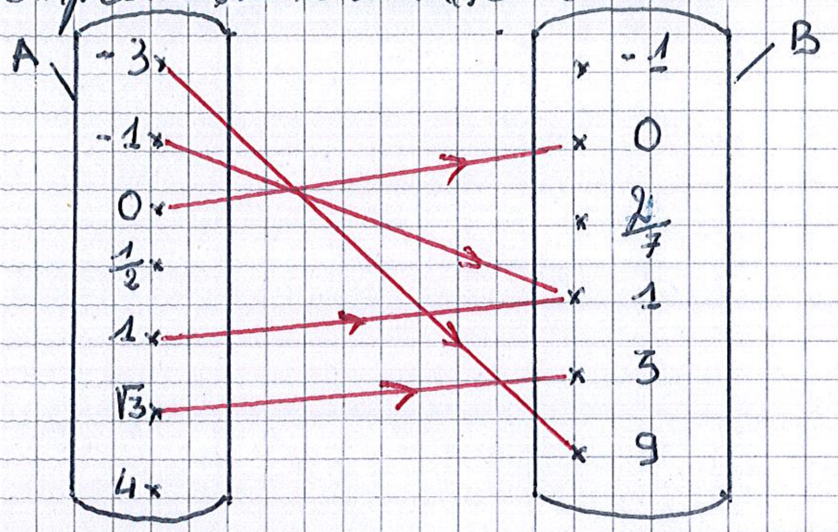
Exemple : on donne

$A = \{-3 ; -1 ; \frac{1}{2} ; 0 ; 1 ; \sqrt{3} ; 4\}$

$B = \{-1 ; 0 ; \frac{2}{7} ; 1 ; 3 ; 9\}$

on définit une correspondance entre les éléments de A et ceux de B par : « ... a pour carré ... »

complétons le schéma(1) ci-dessous




A = Ensemble de départ B = Ensemble d'arrivée

Notation : Si $f$ est une fonction de A vers B, à chaque élément $x$ de A, on associe l'élément $f(x)$ de B. $f(x)$ est appelé image de $x$. on note

$$f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ x & \longrightarrow & f(x) \end{array}$$

Remarque : Si $A = B = \mathbb{R}$, $f$ est une fonction numérique à variable réelle

### 2. Exemples de fonctions

#### a) Fonctions définies par les touches d'une calculatrice

Cos ; sin ; tan ; cot ; ln ; $e^x$ ; $\sqrt{\ }$ , $x^2$ , $x^y$ $|x|$

#### b) Fonctions définies par une formule

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & 2x^2 + x - 2 \end{array}$$

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \frac{3x+1}{x+2}$$

## 3- Ensemble de définition

On appelle ensemble de définition $f$ définie de $A$ vers $B$ et on note $D_f$, l'ensemble des éléments de $A$ pour lesquels $f(x)$ existe.

**Activité :**

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions numériques ci-dessous

$f(x) = 3$

$g(x) = 3x - 2$

$h(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$l(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

$p(x) = \dfrac{3x}{2x - 1}$

$q(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{6x^2 - 5x - 4}$

$t(x) = \dfrac{3x+5}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$

**Solution :**

– Pour $f(x) = 3$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe est égal à 3 (fonction constante)

d'où $D_f = \mathbb{R}$

– Pour $g(x) = 3x - 2$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x)$ existe (fonction affine)

d'où $D_g = \mathbb{R}$

– Pour $h(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x)$ existe (fonction polynôme du 2nd degré)

d'où $D_h = \mathbb{R}$

– Pour $l(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $l(x)$ existe ssi, $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

Or $x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3)$
$= 4 + 12$
$= 16$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - 4}{2 \times 1} = \frac{2-4}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + 4}{2 \times 1} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

2- Déterminer les images des réels : $-2$ ; $-3$ ; $0$ ; $1$ et $4$

3- Déterminer les antécédents des réels : $-2$, $-5$ ; $0$ ; $2$ et $3$.

**Solution :**

1- Ensemble de définition

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x)$ existe si $3x-2 \neq 0$

or, $3x-2=0 \iff 3x=2 \iff x=\frac{2}{3}$

Donc $D_g = \left]-\infty, \frac{2}{3}\right[ \cup \left]\frac{2}{3};+\infty\right[$

2- Images des réels

$$g(-2) = \frac{2(-2)-1}{3(-2)-2} = \frac{-4-1}{-6-2} = \frac{5}{8}$$

$$g(-3) = \frac{2(-3)-1}{3(-3)-2} = \frac{-6-1}{-9-2} = \frac{7}{11}$$

$$g(0) = \frac{2(0)-1}{3(0)-2} = \frac{0-1}{0-2} = \frac{1}{2}$$

$$g(1) = \frac{2(1)-1}{3(1)-2} = \frac{2-1}{3-2} = 1$$

$$g(4) = \frac{2(4)-1}{3(4)-2} = \frac{8-1}{12-2} = \frac{7}{10}$$

3- Antécédent des réels

NB il s'agit pour chaque ~~des~~ réels $\alpha$, de résoudre l'équation $g(x)=\alpha$. ainsi :

- Pour le réel $(-2)$.

$$g(x) = -2 \iff \frac{2x-1}{3x-2} = -2$$

$$\iff 2x-1 = -2(3x-2)$$

$$\iff 2x-1 = -6x+4$$

$$\iff 2x+6x = 4+1$$

$$\iff 8x = 5$$

$$\iff x = \frac{5}{8}$$

- Pour le réel $(-5)$

$$g(x) = -5 \iff \frac{2x-1}{3x-2} = -5$$

$$\iff 2x-1 = -5(3x-2)$$

$$\iff 2x-1 = -15x+10$$

$$\iff 2x+15x = 10+1$$

$$\iff 17x = 11$$

$$\iff x = \frac{11}{17}$$

Signe de $l(x)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $l(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$\forall x \in ]-\infty, -1] \cup [3; +\infty[, \quad l(x) \geq 0$.

d'où $D_l = ]-\infty, -1] \cup [3; +\infty[$

- Pour $p(x) = \dfrac{3x}{2x-1}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x)$ existe ssi $2x - 1 \neq 0$

or $2x - 1 = 0 \iff 2x = 1$

$\iff x = \dfrac{1}{2}$

d'où $D_p = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ ou $D_p = ]-\infty, \tfrac{1}{2}[ \cup ]\tfrac{1}{2}; +\infty[$

- Pour $q(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{6x^2 - 5x - 4}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $q(x)$ existe ssi $6x^2 - 5x - 4 \neq 0$

or $6x^2 - 5x - 4 = 0$ on a :

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 6 \times (-4)$

$= 25 + 96$

$= 121$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{121} = 11$

$x_1 = \dfrac{5 - 11}{12} = -\dfrac{6}{12} = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad x_2 = \dfrac{5+11}{12} = \dfrac{16}{12} = \dfrac{4}{3}$

d'où $D_q = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}; \dfrac{4}{3}\right\}$

- Pour $t(x) = \dfrac{3x+5}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $t(x)$ existe ssi $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 2x - 3} \neq 0 \end{cases}$

or $\sqrt{x^2 - 2x - 3} = 0 \iff x^2 - 2x - 3 = 0$

$\iff x = -1$ ou $x = 3$ (voir $l(x)$)

et $x^2 - 2x - 3 \geq 0 \iff x \in ]-\infty, -1] \cup [3; +\infty[$

d'où $D_t = ]-\infty, -1[ \cup ]3; +\infty[$

## II - Image et Antécédent

### 1- Calcul de l'image et de l'antécédent d'un nombre :

Activité : On définit dans $\mathbb{R}$, la fonction $g$ par : $g(x) = \dfrac{2x-1}{3x-2}$

1- Déterminer l'ensemble de définition de $g$.

- Pour le réel 0

$$g(x)=0 \iff \frac{2x-1}{3x-2}=0$$
$$\iff 2x-1=0$$
$$\iff 2x=1$$
$$\iff x=\frac{1}{2}$$

- Pour le réel 2

$$g(x)=2 \iff \frac{2x-1}{3x-2}=2$$
$$\iff 2x-1=2(3x-2)$$
$$\iff 2x-1=6x-4$$
$$\iff 2x-6x=-4+1$$
$$\iff -4x=-3$$
$$\iff x=\frac{3}{4}$$

- Pour le réel 3

$$g(x)=3 \iff \frac{2x-1}{3x-2}=3$$
$$\iff 2x-1=9x-6$$
$$\iff 2x-9x=-6+1$$
$$\iff -7x=-5$$
$$\iff x=\frac{5}{7}$$

## 2- Illustration graphique.

NB: Chaque courbe est l'ensemble des points $M(x; f(x))$

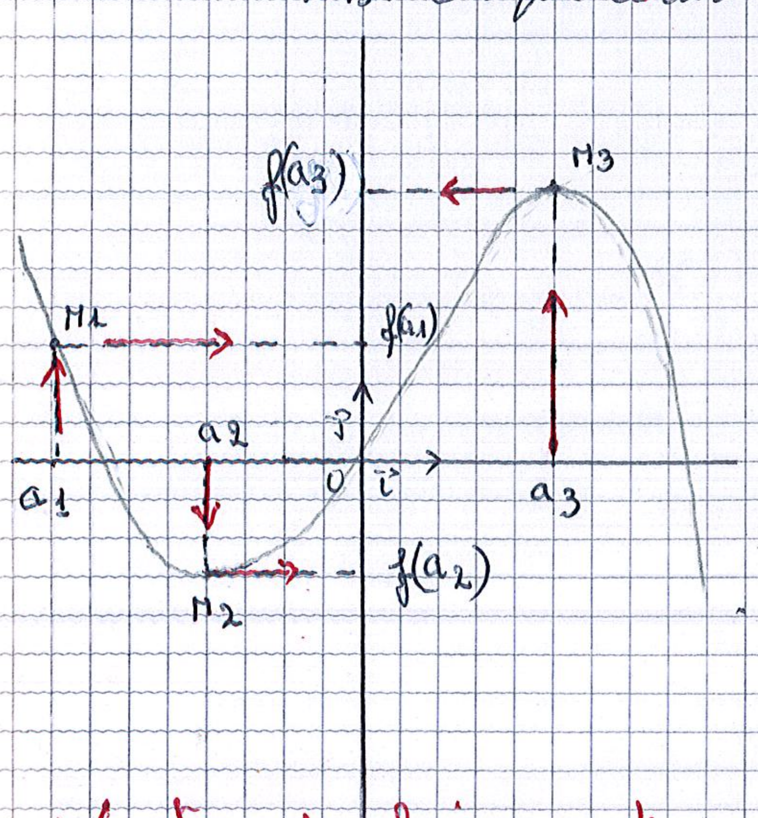



fig1: Lecture de l'image d'un nombre réel

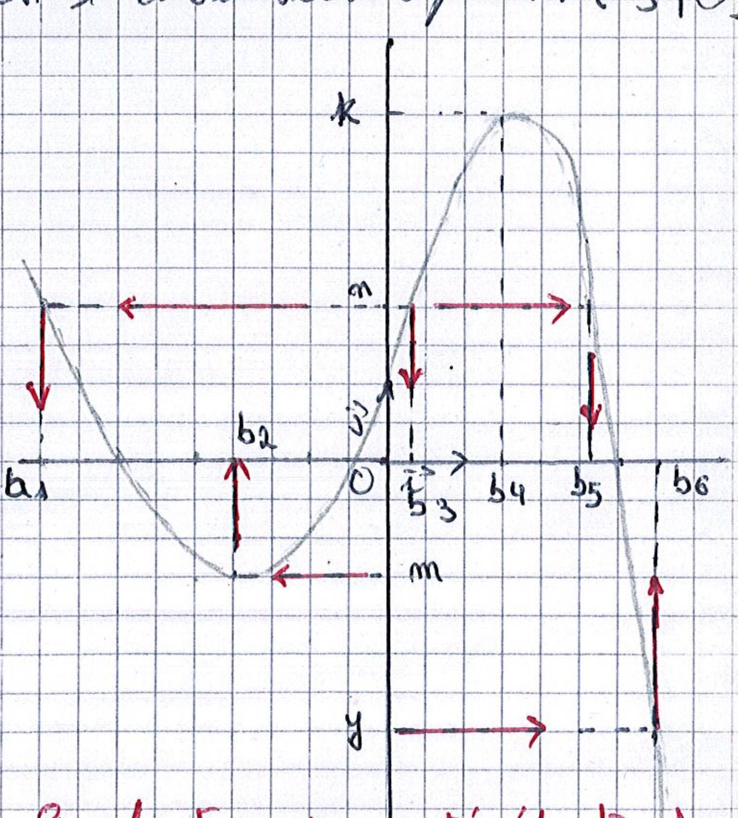



fig2: Lecture des antécédents d'un nombre réel

Classes : $2^{nd}F_3 - 2^{nd}F_4$ - BA

# TD 1

## Exercice 1

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$.

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$

b) $f(x) = \dfrac{1-5x}{3-x}$

c) $f(x) = \dfrac{3}{(x-3)(2x-3)}$

d) $f(x) = \sqrt{-x+3}$

e) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{|x|}}$

g) $f(x) = \dfrac{3x+2}{\sqrt{3x+7}}$

## Exercice 2

On donne $A = \left\{-5 ; -2 ; -1 ; 0 ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{2} ; 1 ; \sqrt{3} ; 5\right\}$

et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow \dfrac{2}{x-1}$

1- Déterminer l'ensemble de définition de $f$.

2- Déterminer les images des réels $-2$, $0$ ; $\sqrt{3}$

3- Déterminer les antécédents des réels $-3$ ; $-4$ ; $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$

## Exercice 3

$g$ est la fonction définie par $g(x) = \dfrac{3x}{x^2-1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1- Parmi les points suivants indiquer ceux qui appartiennent à $(\mathcal{C})$ : $A\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ ; $B\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ ; $C\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ ; $D\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$

2- Déterminer l'ordonnée du point de $(\mathcal{C})$ dont l'abscisse est $\frac{1}{2}$ ; dont l'abscisse est $-\frac{3}{4}$