CENTRE EDUCATIF LE BON BERGER **DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES**

ANNEE SCOLAIRE 2019/2020

CLASSE : TleMF **VOLUME HORAIRE SEMAINE : 5H** **COUR : MARDI 10H20-12H50**

VENDREDI_ 7H30-9H10

CHAPITRE : GEOMETRIE ANALITIQUE DE L'ESPACE

Dans tout ce qui va suivre, l'espace $\mathcal{E}$ sera muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. L'ensemble des vecteurs de l'espace sera noté $\mathcal{W}$.

0.1 Plans de l'espace

0.1.1 Équations cartésiennes

Vecteur normal d'un plan

On dit qu'un vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à un plan si sa direction est une droite orthogonale à ce plan.

Tout plan étant entièrement déterminé par la donnée d'un point quelconque A et de deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (On parle aussi de plan de repère $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$), un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est tout vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$.

Remarque 0.1.1. Tout plan admet une infinité de vecteurs normaux.

Propriétés caractéristiques

Soit $A \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{n} \in \mathcal{W}$.

1) Il existe un unique plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

2) L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

3) Soit $(\mathcal{P})$ le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. Pour tout point $M \in (\mathcal{P})$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.

Équations cartésiennes

Tout plan admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où l'un au moins des réels a, b, c est non nul et le vecteur $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ est un vecteur normal de ce plan. Réciproquement, l'ensemble des points $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$ tel que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan dont un vecteur normal est le vecteur $\overrightarrow{n}(a, b, c)$.

Faire la preuve (Prendre $A(x_0, y_0, z_0)$ et $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ et appliquer la deuxième propriété caractéristique).

Remarque 0.1.2. Si $ax + by + cz + d = 0$ est l'équation cartésienne d'un plan alors toute équation de la forme $k(ax + by + cz + d) = 0$ ($k \neq 0$) est aussi l'équation cartésienne de ce plan.

Exemple 0.1.1. Le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - z + 6 = 0$ est le plan passant par $A(1, 0, 8)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(2, 0, -1)$.

Détermination des équations cartésiennes de plan

1) **Connaissant un point et un vecteur normal**

   Soit $A(1, 2, 3) \in \mathcal{E}$ et $\overrightarrow{n}(-1, 1, 2) \in \mathcal{W}$. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

   Indications

   (a) Pour tout point $M(x, y, z)$ appartenant à ce plan, exploiter la relation $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$.

   (b) Utiliser le fait que tout plan admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ comme vecteur normal, ce qui conduirait à la relation $-x + y + 2z + d = 0$ et pour terminer utiliser le fait que A appartienne au plan.

2) **Connaissant un point et deux vecteurs directeurs**

   Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne :
   $A(-1, 3, -5)$, $\overrightarrow{u}(2, -5, 2)$ et $\overrightarrow{v}(-3, 5, 2)$. Soit (P) le plan de repère $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

   (a) Déterminer un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$.

   (b) Déduire une équation cartésienne du plan (P).

3) **Connaissant trois points non alignés**

   On rappelle que trois points non alignés forment un plan.

   On considère les points $A(0, 0, 4)$, $B(2, -2, 0)$ et $C(0, 2, 0)$.

   (a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

   (b) Déterminer une équation cartésienne de ce plan.

0.1.2 Équations paramétriques d'un plan

Propriétés

1) L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$ (α et β des réels non nuls) est le plan de repère $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

2) Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ un point, $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ et $\overrightarrow{v}(a', b', c')$ deux vecteurs. L'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que : $\begin{cases} x &= x_0 + \alpha a + \beta a' \\ y &= y_0 + \alpha b + \beta b' \\ z &= z_0 + \alpha c + \beta c' \end{cases}$ est une représentation paramétrique du plan de repère $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Exemple 0.1.2. L'espace étant muni de sa base canonique, on donne le point $A(1, -3, 2)$, les vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$. Une représentation paramétrique du plan (P) de repère $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est : $(P) : \begin{cases} x &= \alpha + \beta + 1 \\ y &= -\alpha - \beta - 3 \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \\ z &= 2\alpha + 2 \end{cases}$

La remarque précédente stipule que l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que

$(P) : \begin{cases} x &= -2\alpha - 2\beta + 1 \\ y &= 2\alpha + 2\beta - 3 \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \\ z &= -4\alpha + 2 \end{cases}$ est aussi une représentation paramétrique de (P).

Attention ne pas multiplier les coordonnées du point d'appartenance.

Passage d'une forme à l'autre

Exercice 1 (De cartésienne à paramétrique)

(P) est le plan passant par $A(3, 0, 2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(1, 2, -2)$.

1) Déterminer une équation cartésienne de (P).

2) Déduire une représentation paramétrique de (P).

Exercice 2 (De paramétrique à cartésienne)

Soit le plan (Q) dont une représentation paramétrique est : $(Q) : \begin{cases} x &= 3 + \lambda - 3\mu \\ y &= 2\lambda + 3\mu \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \\ z &= 2 - 2\lambda \end{cases}$

Déterminer une équation cartésienne de (Q).

0.1.3 Distance d'un point à un plan

Propriétés

1. Soit A un point et (P) un plan. La distance du point A au plan (P) est la distance AH où H est le projeté orthogonal de A sur le plan (P).
2. Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathcal{E}$ et (P) le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$.
   La distance du point A au plan (P) notée $d(A, P)$ est le réel défini par : $d(A, P) = \dfrac{| ax_0 + by_0 + cz_0 + d |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Preuve. Prendre $H(x, y, z)$, puis exploiter la relation $| \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{n} | = AH \| \overrightarrow{n} \|$ (l'angle étant nul ou plat). $\overrightarrow{n}$ étant bien-sur un vecteur normal de (P). De la on tire $AH = \dfrac{| \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{n} |}{\| \overrightarrow{n} \|}$

Exemple 0.1.3. Soit (P) le plan d'équation cartésienne $3x - 4y + 6 = 0$ et $A(4, 2, -1)$.
$d(A, P) = \dfrac{| 3 \times 4 - 4 \times 2 + 0 \times (-1) + 6 |}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} = 2.$

Remarque 0.1.4. Si A appartient au plan (P) alors $d(A, P) = 0$

0.2 Droites de l'espace

On rappelle que toute droite de l'espace est l'intersection de deux plans.

0.2.1 Systèmes d'équations cartésiennes

Propriété Toute droite de l'espace est caractérisée par un système de deux équations cartésiennes de plan de la forme :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Réciproquement, si $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ sont les équations cartésiennes respectives de deux **plans sécants**, alors

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

est un système d'équations cartésiennes de la droite d'intersection de ces deux plans.

Remarque 0.2.1. Une droite admet plusieurs systèmes d'équations cartésiennes.

Exemple 0.2.1.

$$\begin{cases} x - 2y + z + 1 & = & 0 \\ x + y + z - 2 & = & 0 \end{cases}$$

est un système d'équations cartésiennes de la droite passant par $A(1, 1, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(0, 1, 1)$.(On parle de la droite de repère $(A, \overrightarrow{u})$)

$$\begin{cases} x - y - 3z + 1 & = & 0 \\ 2x - 2y - 6z + 1 & = & 0 \end{cases}$$

n'est pas un système d'équations cartésiennes de droite car les deux équations qui la composent sont celles de deux plans parallèles admettant un même vecteur normal $\overrightarrow{n}(1, -1, -3)$.

0.2.2 Représentations paramétriques

propriétés

1. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ est la droite de repère $(A, \overrightarrow{u})$.
2. La droite (D) passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ admet une représentation paramétrique de la forme $(D) : \begin{cases} x & = & x_0 + \lambda a \\ y & = & y_0 + \lambda b \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z & = & z_0 + \lambda c \end{cases}$

Exemple 0.2.2. La droite (D) passant par $A(2, 3, 0)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}(1, -1, 1)$ a pour représentation paramétrique : $(D) : \begin{cases} x & = & 2 + \lambda \\ y & = & 3 - \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z & = & \lambda \end{cases}$

Remarque 0.2.2.

1. Si $\lambda \in [0, 1]$, alors (D) est un segment de droite.
2. Si $\lambda \in]0, +\infty[$, alors (D) est une demi-droite.

0.3 Positions relatives

0.3.1 Position relative entre deux plans

Deux plans peuvent être **parallèles** ou **sécants**.

Soit (P) le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et (P') le plan passant par A' et vecteur normal $\overrightarrow{n'}$.

1. Si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires alors :

(a) Si $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{n} \neq 0$ et $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{n'} \neq 0$, alors les plans (P) et (P') sont strictement parallèles.

(b) Si $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{n'} = 0$, alors les plans (P) et (P') sont confondus.

2. Si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont non colinéaires, alors les plans (P) et (P') sont sécants. De plus si $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'} = 0$ alors les plans (P) et (P') sont orthogonaux.

0.3.2 Position relative de deux droites

Nous examinerons ici les cas les plus rencontrés en général. Soit (D) et (D') deux droites de l'espace de repères respectifs $(A, \overrightarrow{u})$ et $(A', \overrightarrow{u'})$.

1. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires, alors (D) et (D') sont parallèles.
2. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont non colinéaires alors :
   (a) Si $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont coplanaires, alors (D) et (D') sont sécantes.
   (b) Si $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont non coplanaires, alors (D) et (D') sont non coplanaires.

0.3.3 position relative d'une droite et d'un plan

Soit (D) une droite de repère $(A, \overrightarrow{u})$ et (P) un plan passant par A' et vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

1. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires, alors (D) et (P) sont orthogonaux.
2. Si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 0$ alors (D) et (P) sont parallèles.
3. Si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} \neq 0$ alors (D) et (P) se coupent en unique point.

0.3.4 Position relative entre une sphère et un plan

Soit $S = S(\Omega, R)$ la sphère de centre Ω et de rayon $R > 0$ et (P) un plan.

On pose $d = d(\Omega, P)$ la distance du point Ω au plan (P).
Si $d > R$, alors la sphère et le plan ne se rencontrent jamais. On note alors $(S)\bigcap(P) = \emptyset$.
Si $d = R$, alors $(S)\bigcap(P) = \{A\}$. On dit que (P) est tangent à (S) au point A.
Si $d < R$, alors $(S)\bigcap(P) = \mathcal{C}(H, r)$ où $\mathcal{C}(H, r)$ désigne le cercle de centre H, projeté orthogonal de Ω sur (P) et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.