SUPPORT DU COURS SUR LE CALCUL DES PROBALITÉS

CLASSE : Tle "D"

Compétences exigées

-> Familiariser l'élève au langage des Probabilités
-> savoir calculer une Probabilité dans 1 cas d'équiprobabilité
-> Reconnaître 2 événements indépendants, une probabilité conditionnelle, schéma de Bernoulli, une loi binomiale
-> savoir déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle, sa variance, son écart type et sa fonction de répartition

Leçon n°1 : Rappels sur le Dénombrement (OK)

Leçon n°2 : Notion de Probabilité (OK)

Leçon n°3 : Notion d'équiprobabilité.

-> Définition : 2 événements A et B d'un univers E sont dit équiprobables si $p(A) = p(B)$

-> Théorème : on considère l'univers $E = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ de l'espace $(E, \mathcal{P}(E), P)$ alors les événements ~~sont~~ élémentaires sont équiprobables si on a :
$p(\{e_1\}) = p(\{e_2\}) = \dots = p(\{e_n\})$

-> NB : les événements élémentaires sont supposés équiprobables dans chacun des cas suivants :
- choisir au hasard, lancer au hasard, dé équilibré, dé non truqué, jeu de cartes bien battu, boules indiscernables au toucher, pièce non truquée.

-> Propriété : $p(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{\text{Nbre de cas favorables}}{\text{Nbre de cas possibles}}$

→ Remarque : s'il y a équiprobabilité sur $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

alors * $P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = P(\{e_3\}) = \dots = P(\{e_n\})$

* $P(\{e_1\}) + \dots + P(\{e_n\}) = 1$

* $P(\{e_i\}) = \frac{1}{n}$ (i variant de 1 à n)

Exercice résolu n°1

Dans une urne, il y a 5 boules rouges et 3 boules noires. On tire simultanément 3 boules dans l'urne.

1) Déterminer le nombre de cas possibles

2- Déterminer ou calculer les probabilités des événements suivants.

A « obtenir exactement une boule rouge »

B « obtenir les boules de même couleur »

C « obtenir au moins 1 boule noire »

D « obtenir 3 boules de couleur différente »

Solution

1) Il s'agit ici d'un tirage simultané qui nécessite l'utilisation des combinaisons comme outil

alors on a $Card(\Omega) = C_8^3$

2-a) exactement une boule rouge c'est C_5^1 puis compléter avec 2 autres boules C_3^2 soit $P(A) = \frac{C_5^1 \cdot C_3^2}{C_8^3}$

2-b) même couleur signifie

* soit toutes les boules rouges C_5^3
* soit toutes les boules noires C_3^3

d'où $P(B) = \frac{C_5^3 + C_3^3}{C_8^3}$

2-c) si une boule noire, alors $C_3^1 \cdot C_5^2$

si 2 boules noires, alors $C_3^2 C_5^1$

si 3 boules noires, alors $C_3^3 C_5^0$

Ainsi $P(C) = \frac{C_3^1C_5^2 + C_3^2C_5^1 + C_3^3}{C_8^3}$

2-d) Il n'y a que 2 couleurs dans l'urne par conséquent, on ne peut avoir 3 boules de ≠tes couleurs d'où $Card(D) = 0$ et $P(D) = 0$

Exercice résolu N°2

Dans 1 jeu de 32 cartes, on tire simultanément et au hasard 6 cartes.

1) Déterminer le nombre de cas possibles

2) Calculer les probabilités suivantes

A « obtenir 2 rois » B « obtenir 3 cartes rouges » C « obtenir le roi de pique » D « obtenir au trop 2 dames »

Solution

NB : chaque type a 4 figures (AS, K, Q, J) puis les nombres (7, 8, 9, 10).

1) tirage simultané de 6 cartes des 32 cartes : C_{32}^{6}

2-a) 2 rois C_4^2 puis 4 autres cartes C_{28}^{4} soit

$$P(A) = \frac{C_4^2 \cdot C_{28}^4}{C_{32}^6}$$

2-b) 3 cartes rouges C_{16}^3 puis 3 cartes noires C_{16}^3 soit $P(B) = \frac{C_{16}^3 C_{16}^3}{C_{32}^6}$

2-c) obtenir le roi de pique C_1^1 puis 5 autres cartes C_{31}^5

soit $P(C) = \frac{C_1^1 \, C_{31}^5}{C_{32}^6}$

2-d) d'un raisonnement analogue, on a

$$P(D) = \frac{C_4^0 C_{28}^6 + C_4^1 C_{28}^5 + C_4^2 C_{28}^4}{C_{32}^6}$$

Leçon : Probabilités conditionnelles

– Définition : Soient $(E, \mathcal{P}(E), P)$ un espace probabilisé et A un événement tel que $P(A) \neq 0$ et B. On appelle probabilité conditionnelle sachant A, la probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé.

– Notation : $P(B/A)$ ou $P_A(B)$ et on a :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \iff P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

– Notion d'événements indépendants

On dit que A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

– Remarques : si A et B sont indépendants alors :

- $P(B/A) = P(B)$
- la relation $P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$ permet de calculer $P(A \cap B)$ connaissant $P(B/A)$ ou calculer $P(B/A)$ connaissant $P(A \cap B)$

Exercice résolu :

Une maladie atteint 3 % d'une population et un test de dépistage renseigne que :

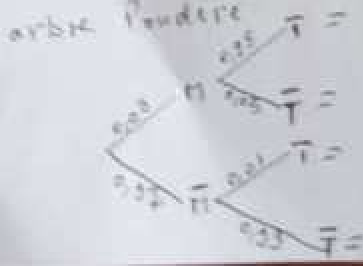
- individus malades 95 % des tests sont positifs
- individus non malades 1 % des tests sont positifs

On note M « être malade » et T « le test positif ».

1) Donner la probabilité de l'événement « M et T », « M et $\bar{T}$ »
2) $P(T)$ et $P(\bar{T})$
3) Ne pas être malade sachant que le test est positif

Solution

arbre pondéré



$P(M \cap T) = 0{,}03 \times 0{,}95 = 0{,}0285$

$P(M \cap \bar{T}) = 0{,}03 \times 0{,}05 = 0{,}0015$

$P(\bar{M} \cap T) = 0{,}97 \times 0{,}01 = 0{,}0097$

$P(\bar{M} \cap \bar{T}) = 0{,}97 \times 0{,}99 = 0{,}96$

2) $P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) = 0,0382$

$P(\bar{T}) = 1 - P(T) = 0,9618$

3) $P(\bar{M}/T) = \dfrac{P(\bar{M} \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,0097}{0,0382} \simeq 0,253$

→ Formules des probabilités totales

• Si A est tel que $P(A) \neq 0$, alors $\forall B$, $P(B) =$

$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A})$

• Autrement si $P(A) \neq 0$, $P(\bar{A}) \neq 0$ et

$P(B) = P(A) \cdot P(B/A) + P(\bar{A}) \cdot P(B/\bar{A})$

Leçon n°5 : Schéma de Bernoulli

On considère une expérience aléatoire à un univers $\Omega = \{S, E\}$ tel que $P(S) = p$ et $P(E) = q$ avec $p + q = 1$.
On répète l'expérience n fois de suite dans les mêmes conditions. On note X le nombre de fois que le succès se réalise au cours des n expériences. La probabilité que le succès se réalise k fois est $P(X=k)$ donnée

$P_k = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}$ avec $0 \leq k \leq n$.

Exercice résolu.

Une urne contient 3 boules vertes et 5 boules rouges.

1) On tire 1e boule dans l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir une boule verte, ~~1 boule rouge~~

2) On répète l'expérience 7 fois de suite en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne. Calculer

A « n'obtenir aucune boule verte »

B « obtenir exactement 3 boules vertes »

C « obtenir 7 boules vertes au cours de 7 tirages »

Solution :

1) obtenir 1e boule verte $\frac{C_2^1}{C_5^1} = \frac{2}{5}$

NB : succès obtenir une boule verte $\Rightarrow p = \frac{2}{5}$ et $q = \frac{3}{5}$

$P(A) = C_7^0 \left(\frac{3}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^0$ aucune boule verte c.à.d. zéro boule v

$P(B) = C_7^3 \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{7-3}$ $(x = 3)$

$P(C) = C_7^7 \left(\frac{2}{5}\right)^7 \left(\frac{3}{5}\right)^0$ $(x = 7)$

Leçon n° 4 : Variables aléatoires réelles

→ Définition : Soient $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots e_n\}$ 1 unive... $(E, P(E), P)$ 1 espace probabilisé, toute application

$$X : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$e_i \longmapsto X(e_i) = x_i$$

est appelée variable aléatoire c'est l'ensemble des valeurs prises par ... noté $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ $n \leq k$

→ Présentation de la loi de Probabilité

$$P : X(E) \longrightarrow [0, 1]$$
$$x_i \longmapsto P(X = x_i)$$

la loi de Proba se prés... sous forme de Tableau de la manière suivante

x_i	x_1	x_2	x_3	- - - - -	x_n
$P(X=x_i)$	P_1	P_2	P_3	- - -	P_n

Remarques

• $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$

• on peut représenter une V a X par 1 diagramme ... bâton avec en abscisses les x_i et en ordonnées les P...

Caractéristiques d'une V a

Espérance mathématique

elle est notée $E(X)$ et définie par $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i$

* Variance notée $V(X)$ et définie par

$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

* Écart type noté σ_X et défini par

$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

→ Fonction de répartition notée F et définie par

- si $x < x_1$, $F(x) = 0$
- si $x \in [x_1, x_2[$ $F(x) = p_1$
- si $x \in [x_2, x_3[$ $F(x) = p_1 + p_2$

⋮

- si $x \in [x_{n-1}, x_n[$ $F(x) = p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}$
- si $x \geq x_n$, $F(x) = 1$

Propriétés

* F étant une v.a. de valeurs $x_1, \dots, x_n$ rangées dans l'ordre croissant on a

→ si $x < x_1$, $F(x) = 0$

→ si $x \geq x_n$, $F(x) = 1$

→ F est une fonction en escalier, croissante et constante par intervalle

Exercice résolu

Une urne contient 10 boules dont 5 sont numérotées 1 et les 5 autres sont numérotées 2. On tire simultanément 5 boules puis on fait le total des 5 n° obtenus.

1.) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X

2.) Donner la loi de probabilité puis calculer $E(X)$, $V(X)$ et σ_X

3. Définir et représenter la fonction de répartition

Solution

1) $X = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$P(X=5) = \frac{C_5^5 C_5^0}{C_{10}^5} = \frac{1}{252}$ $\quad P(X=6) = \frac{C_5^4 C_5^1}{C_{10}^5} = \frac{25}{252}$

$P(X=7) = \frac{C_5^3 C_5^2}{C_{10}^5} = \frac{100}{252}$ $\quad P(X=8) = \frac{C_5^2 C_5^3}{C_{10}^5} = \frac{100}{252}$

$P(X=9) = \frac{C_5^1 C_5^4}{C_{10}^5} = \frac{25}{252}$ $\quad P(X=10) = \frac{C_5^0 C_5^5}{C_{10}^5} = \frac{1}{252}$

$X(x_i)$	5	6	7	8	9	10	TOTAL
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{252}$	$\frac{25}{252}$	$\frac{100}{252}$	$\frac{100}{252}$	$\frac{25}{252}$	$\frac{1}{252}$	1
$x_i P_i$	$\frac{5}{252}$	$\frac{150}{252}$	$\frac{700}{252}$	$\frac{800}{252}$	$\frac{225}{252}$	$\frac{10}{252}$	$\frac{1890}{252}$
$x_i^2 P_i$	$\frac{25}{252}$	$\frac{900}{252}$	$\frac{4900}{252}$	$\frac{6400}{252}$	$\frac{2025}{250}$	$\frac{100}{252}$	$\frac{14350}{252}$

$E(X) = \frac{1890}{252} = 7,5$ $\quad E(X^2) = \frac{14350}{252} = 56,94$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 56,94 - (7,5)^2 = 3,69$

$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{3,69} =$

Fonction de repartition

$\forall x < 5,\ F(x) = 0$

$\forall x \in [5,6[,\ F(x) = \frac{1}{252}$

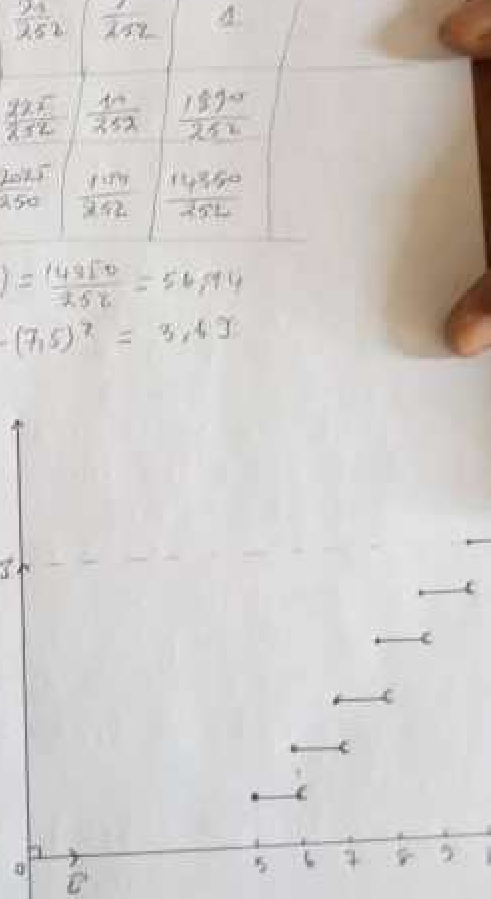
$\forall x \in [6,7[,\ F(x) = \frac{26}{252}$

$\forall \in [7,8[\ F(x) = \frac{126}{252}$

$\forall x \in [8,9[\ F(x) = \frac{226}{252}$

$\forall x \in [9,10[\ F(x) = \frac{251}{252}$

$\forall x \geq 10,\ F(x) = 1$



) Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 4.

) A l'aide du graphique de la question 1), conjecturer l'éventuelle (limi)te de la suite (U_n).

On définit la suite (v_n), $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{-1}{u_n - 4}$.

) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique que l'on caractérisera.

) Exprimer (v_n), puis (u_n) en fonction de n.

) En déduire la limite de la suite (u_n).

La conjecture de la question 2) est-elle vérifiée ?

Exercice 5 : On considère la suite (Z_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $Z_{n+1} = Z_n(w)$, $Z_0 = 6 + 6i$ et $w = \frac{1+\sqrt{3}}{4} + i\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{4}\right)$.

Exprimer Z_1 et w^2 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

Exprimer Z_1 et Z_2 en fonction de Z_0 et w et en déduire l'expression de Z_1 et Z_2 sous forme trigonométrique.

$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $|Z_n| = r_n$.

) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$.

) En déduire que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

) Déterminer la limite de la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Exercice 6 : Soit $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ un réel et (U_n) la suite réelle définie par : $U_0 = 1 + \frac{1}{2\sin^2\alpha}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = (\cos 2\alpha)U_n + 1$.

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 1$.
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - \frac{1}{2\sin^2\alpha}$.

 a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q et le premier terme V_0.

 b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

 c) Calculer la limite de (U_n).

3. On pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

 a) Exprimer S_n en fonction de n.

 b) Calculer la limite de la suite (S_n).

Exercice 7 : En 1990, un pays avait une population de 50 millions d'habitants. Par accroissement naturel, sa population augmente de 1,5 % par an. Par ailleurs, on constate une augmentation annuelle supplémentaire de 0,45 million d'habitants dès l'année 1991.
L'unité étant le million d'habitants ; on note $U_0 = 50$ l'effectif de la population en 1990 et U_n le nombre d'habitants en $(1990 + n)$.

1-a) Calculer U_1 et U_2

 b) Montrer que $U_{n+1} = 1{,}015U_n + 0{,}45$.

2- On se propose de prévoir directement l'effectif de la population en 2010 si le modèle d'évolution se poursuit de la même façon ; pour cela on considère la suite (V_n) définie par $V_n = 30 + U_n$.

 a) Calculer V_1 et V_2

 b) Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

 c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. En déduire alors l'effectif de la population de ce pays en l'an 2010. *(on prendra le résultat arrondi en million d'habitants)*.

 d) Déterminer par calcul à partir de quelle année l'effectif de la population de ce pays dépassera 100 millions d'habitants si l'évolution se poursuit de la même manière.

SUITE GEOMETRIQUE

…orme …nérale	$\begin{cases} U_p = a \\ U_{n+1} = qU_n \end{cases}$ ($a \in \mathbb{R}$, q = raison)
…rmule …plicite	$U_n = U_p \times q^{n-p}$ ($q \neq 0$)
…ergence	- Si $-1 < q < 1$, alors U_n est **convergente.** - Si $q > 1$, U_n est **divergente** - Si $q = 1$, U_n est constante et est donc **convergente.** - Si $q = -1$, U_n est **divergente.**
…me des …rmes …écutifs	$S = 1^{er}\ \text{terme} \times \dfrac{(1-q^N)}{1-q}$ (**N = nombre de termes, q ≠ 1**) $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} = U_0 \dfrac{1-q^n}{1-q}$

ENONCE DES EXERCICES

…e 1 : Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 7 \\ 5u_{n+1} - 2u_n = 6 \end{cases}$

…ler les termes u_1 et u_2

…(v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 2$.

… que (v_n) est une suite géométrique

…primer v_n puis u_n en fonction de n.

…primer $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ en fonction de n.

…ler les limites respectives de u_n et s_n quand n tend vers $+\infty$

…e 2 : On considère deux suites numériques (U_n) et (V_n)

de la manière suivante : $\begin{cases} U_1 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{n+1}{3n} U_n \end{cases}$ et $V_n = \dfrac{U_n}{n}$

1) Calculer U_2, U_3 et U_4

2) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.

3) En déduire les expressions de V_n et U_n en fonction de n.

4) Calculer $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{59049}$

Exercice 3 : On considère les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 1}{4} \end{cases}$ et $\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \dfrac{3V_n + 1}{4} \end{cases}$

1- Calculer U_1, U_2, U_3 d'une part et V_1, V_2, V_3 d'autre part

2- On considère la suite (S_n) définie, pour tout entier naturel n par $S_n = U_n + V_n$

a) Calculer S_0, S_1, S_2, et S_3. A partir de ces résultats, que peut-on conjecturer pour la suite (S_n) ?

b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (S_n) est une suite constante.

3- On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par $d_n = V_n - U_n$

a) Montrer que (d_n) est une suite géométrique

b) Donner l'expression de (d_n) en fonction de n.

4- En utilisant les résultats des questions **2-b** et **3-b**, donner l'expression de U_n et V_n en fonction de n.

5- Montrer que les suites (U_n) et (V_n) convergent. Préciser leurs limites

Exercice 4 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 16}{u_n - 6}$.

1- Construire la courbe de la fonction $f(x) = \dfrac{2x - 16}{x - 6}$ et la droite (Δ) : $y = x$ dans le même repère, puis placer sur l'axe $(O, \vec{i})$ (*par la méthode des chemins*) les quatre premiers termes de la suite (u_n).