CGBER
Département de Mathématiques
Classe : T^{le}C
Enseignant : BISSONO Nicolas
Tél (Whatsapp) 699647686.

Ydé le 1er Mai 2020

BACCALAUREAT BLANC

Série : C Durée : 4h

Exercice 1 :

Soit p un entier relatif. On pose $a = 14p + 3$ et $b = 5p + 1$. Soit (E) l'équation $87x + 31y = 2$ dans $\mathbb{Z}^2$.
On désigne par (D) la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, I, J).

1. **a)** En utilisant l'égalité de Bézout, démontrer que a et b sont premiers entre eux.
   b) En déduire que 87 et 31 sont premiers entre eux.
   c) Trouver un couple (u_0, v_0) d'entiers relatifs tels que $87u_0 + 31v_0 = 2$.
2. Utiliser les questions précédentes pour résoudre (E).
3. Déterminer les points de (D) dont les coordonnées (x, y), vérifient les deux conditions suivantes :
   i) x et y sont des entiers naturels.
   ii) $0 \leq x \leq 100$.

Indication : On pourra remarquer que $M(x, y)$ appartient à (D) si, et seulement si, $(x, -y)$ est solution de (E).

Exercice 2

L'espace orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(2, 0, 1)$ $B(3, -2, 0)$ et $C(2, 8, -4)$.

1. Soit $M(x, y, z)$ un point. Exprimer en fonction de x, y et z les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}$.
2. Résoudre le système $\begin{cases} -x + y - 2z = -4 \\ -x - y - z = -11 \\ 2x + y - z = 8 \end{cases}$.

On fera figurer les étapes de résolutions sur la copie.

3. Démontrer qu'il existe un unique point **N** vérifiant $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$ et donner les coordonnées de **N**.
4. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $v = \frac{1}{3} B \times H$ où **B** représente l'aire d'une base et **h** la hauteur relative à cette base.
   a) Le point **N** étant défini à la question précédente, montrer que le volume du tétraèdre *ABCN* est égal $\frac{1}{6} CN^2$.
   b) Calculer l'aire du triangle ABC.
   c) Utiliser les résultats précédents pour calculer la distance du point N au plan (ABC).

Problème

Partie A :

1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-3z+4=0$.

   b) Déterminer le module de chaque racine de cette équation.

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. z désigne un nombre complexe non nul de partie imaginaire positive. On considère les points A, B et C d'affixes respectives 1, z et z^2 et on note S le système de points pondérés $\{(A,4);(B,-3);(C,1)\}$. Ce système est tel que O est son barycentre.

2. a) Démontrer que z est solution de (E).

   b) En déduire les coordonnées de B et C.

3. a) k désignant un nombre réel, on pose $z=\frac{3+i\sqrt{7}}{2}$. Préciser suivant les valeurs de k l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $4MA^2-3MB^2+MC^2=k$.

   b) On suppose $k=89$. Donner alors une équation cartésienne de (Γ), puis tracer (Γ).

Partie B :

On considère l'équation différentielle (E') : $y''+4y'+4y=0$ et les fonctions f et g de la variable réelle définie respectivement par : $f(x)=xe^{-2x}+x-\frac{5}{4}\ln 2$ et $g(x)=1+(-2x+1)e^{-2x}$.

On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(unité de longueur sur les axes : 2 cm).

1. a) Dresser le tableau de variation de g.

   b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

2. a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, puis la dérivée de f.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

3. a) Calculer $f(\ln 2)$.

   b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y=x-\frac{5}{4}\ln 2$ est asymptote à (C_f).

Etudier la position de la courbe (C_f) par rapport à la droite (D). Tracer (D) et (C_f).

4. a) Déterminer la forme générale des solutions de (E').

   b) Déterminer la solution de (E') dont la courbe admet une tangente en O parallèle à la [illegible] d'équation $y=x+1$.

   c) Démontrer que la fonction f est une solution de l'équation différentielle : $y''+4y'+4y=4x-5\ln 2+4$.

5. Soit λ un réel strictement positif et (D_λ) la partie du plan comprise entre les droites d'équations respectives $x=0$, $x=\lambda$, $y=x-\frac{5}{4}\ln 2$ et la courbe (C_f).

   a) En utilisant une intégration par parties, calculer, en cm^2, l'aire de (D_λ) en fonction de λ.

   b) Calculer la limite de cette aire lorsque λ tend vers $+\infty$.