CEBER
Département : MATHEMATIQUES
Enseignant : BISSONO Nicolas
695647586 / 652522125
CLASSE : T^{le} C.
THEME : Espaces Vectoriels réels et Applications linéaires.

Mercredi 1er Avril 2020

N.B. Le présent cours n'est pas un poisson d'avril.

TRAVAUX PRATIQUES

Exercice 1 objectifs : Montrer qu'un système de vecteurs est : libre, lié, générateur, une base : dimension, coordonnées.

1) On considère 3 vecteurs de $\mathbb{R}^2$: $\vec{A}=(2;3)$ $\vec{B}=(-1;6)$ $\vec{C}=(-7,5)$
Montrer que $(\vec{A},\vec{B})$ est un système libre. Est-ce un système générateur de $\mathbb{R}^2$?

Exprimer $\vec{C}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

2) Soit $\vec{I}=(a,b)$ et $\vec{J}=(a',b')$ dans $\mathbb{R}^2$
Montrer que $(\vec{I},\vec{J})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si :
$$ab'-ba'\neq 0.$$

3) Soit $\vec{E}=(m\,;\,2m-1)$ et $\vec{F}=(m+2\,;\,3m)$ déterminer le réel m pour que $(\vec{E},\vec{F})$ soit un système lié de $\mathbb{R}^2$ et écrire la relation liant $\vec{E}$ et $\vec{F}$.

solution

1) Soit x et y deux nombres réels :

$$x\vec{A}+y\vec{B}=\vec{0} \Leftrightarrow x(2,3)+y(-1,6)=(0,0)$$
$$\Leftrightarrow (2x-y\,;\,3x+6)=(0,0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=0 \\ 3x+6=0 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est : $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$
ce système étant homogène, admet une solution unique $(0,0)$.
Ainsi $x\vec{A}+y\vec{B}=\vec{0} \Leftrightarrow x=y=0$: le système $(\vec{A},\vec{B})$ et donc libre.
Soit $\vec{T}(a,b)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$, x et y deux réels

$x\vec{A} + y\vec{B} = \vec{T} \Leftrightarrow x(2,3) + y(-1,6) = (a,b)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = a \\ 3x + 6y = b \end{cases}$

$\det = 15 \neq 0$, alors ce système admet une solution unique (x,y), donc tout vecteur $\vec{T}$ de $\mathbb{R}^2$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{A}$ et $\vec{B}$:

$(\vec{A}, \vec{B})$ est un système générateur de $\mathbb{R}^2$.

Le système $(\vec{A}, \vec{B})$ étant libre et générateur est une base de $\mathbb{R}^2$.

<u>finir cet exercice</u>. Réponses : $\left| \begin{array}{l} \vec{C} = -\frac{43}{15}\vec{A} + \frac{34}{15}\vec{B} \\ m = 1 \text{ ou } m = 2. \end{array} \right.$

<u>Méthode</u>. Pour montrer qu'un système de vecteurs (ou famille) est une base, il suffit de prouver qu'il est libre et générateur.

<u>Autre façon</u> : Comme $(\vec{A}, \vec{B})$ est libre de $\mathbb{R}^2$: c'est une base.
En effet : toute famille libre de n vecteurs non nuls est une base de $\mathbb{R}^n$.
(on parle souvent de libre-maximale).

<u>Exercice 2</u> : Mêmes objectifs qu'à l'exercice 1.

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux vecteurs linéairement indépendants de V si et seulement si les vecteurs $\vec{u}_3 = 2\vec{u}_1 + (-\vec{u}_2)$ et $\vec{u}_4 = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$ de V le sont aussi.

<u>Exercice 3</u> : Mêmes objectifs qu'aux précédents.

E est un espace vectoriel rapporté à une base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
Vérifier que $B' = (\vec{i} ; \vec{j} + 2\vec{k} ; 2\vec{j} + \vec{k})$ est aussi une base de E.
Déterminer l'ensemble des vecteurs de E qui ont le même triplet de coordonnées dans les bases B et B'.

<u>Exercice 4</u> : <u>Objectif</u> : Etudier des sous-espaces vectoriels engendrés par des vecteurs d'un espace donné.

1) Dans $\mathbb{R}^3$, F est l'ensemble des triplets (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que : $x + 2y + z = 0$

a) F est-il stable par combinaison linéaire ?

b) Soit $\vec{u} = (2, -1, 0)$ et $\vec{v} = (0, 1, -2)$ deux vecteurs, démontrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base F.

2) Exprimer le vecteur $\vec{s}(1, 1, -3)$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

G est l'ensemble des triplets (x, y, z) tels que $x+y+z=1$.
G est-il stable par combinaison linéaire?

Solution:

Soit $\vec{X}=(x,y,z)$ et $\vec{Y}=(x',y',z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, a et b deux réels. Supposons $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ dans F, on a:

$$a\vec{X}+b\vec{Y} = a(x;y;z)+b(x';y';z')$$
$$= (ax+bx'; ay+by'; az+bz')$$

Or $\vec{X}\in F$, donc $x+2y+z=0$ et $\vec{Y}\in F$, donc $x'+2y'+z'=0$

alors $ax+b'x+2(ay+by')+(az+bz') = a(x+2y+z)+b(x'+2y'+z')$
$= a\times 0 + b\times 0$
$=0$

d'où $a\vec{X}+b\vec{Y}\in F$: F est stable par combinaison linéaire.

Finir cet exercice Réponses : ... $\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$

Exercice 5: Même objectif que le précédent.

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\vec{V_1}=(1,1,4)$ $\vec{V_2}=(3,-1,4)$ $\vec{V_3}=(1,2,6)$. a) Les vecteurs $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$ sont-ils linéairement indépendants?

b) Montrer que le système $(\vec{V_1}, \vec{V_2})$ est libre.

c) Soit F l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera une base, la dimension et la nature.

Exercice 6 : Objectif: Montrer que deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E sont supplémentaires de E.

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les ensembles suivants:

$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+2y-z=0\} \text{ et } G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ 2x+y=0 \text{ et } x-z=0\}$$

1. Montrer que F est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Préciser une base de F
2. Montrer que G est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$, dont on précisera une base.
3. Déterminer $F\cap G$. F et G sont-ils deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$. Solution: à vous de jouer!!!

Méthode : Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E sont supplémentaires de E, des trois propriétés suivantes, il suffit de vérifier l'une :

P_1) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.

P_2) Soit B_1 une base de F et B_2 une base de G

$B = B_1 \cup B_2$ est une base de E et $\dim F + \dim G = \dim E$

P_3) Tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Si l'une de ces propriétés est vérifiée, on peut conclure que les autres le sont aussi.

Exercice 7 : Objectif : Déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire.

E désigne un espace vectoriel de dimension 3, muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et f l'endomorphisme de E.

On définit f par : $f(\vec{i}) = \vec{i}$, $f(\vec{j}) = f(\vec{k}) = \frac{1}{2}(\vec{j} + \vec{k})$

1) Déterminer une base de Ker f, noyau de f.

2) Déterminer une base de Im f, image de f.

3) Démontrer que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de Ker f et d'un vecteur de Im f.

4) Vérifier la relation $f \circ f = f$.

5) Démontrer que $\vec{u} \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{u}$ (Utiliser 4))

Exercice 8

Soit E_2 un plan vectoriel rapporté à une base orthonormé $B = (\vec{i}, \vec{j})$ g est l'endomorphisme de E_2 qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ associe le vecteur $\vec{u}' = (x + \frac{1}{2}y)\vec{i} + (-2x - y)\vec{j}$

1 a) Déterminer la matrice de g dans la base B et montrer que g n'est pas bijectif.

b) Déterminer le noyau Ker g et l'image Im g de g.

c) En déduire que Ker g = Im g.

2) Soit $\vec{v}$ un vecteur de Ker g. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{u}$ de E_2 tel que $g(\vec{u}) = \vec{v}$.

3) Soit $\vec{e_1}(-1; 2)$ et $\vec{e_2}(-1; 1)$

a) Montrer que $B' = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base de E_2.

b) Donner la matrice de g dans la base B'.