PROBLEME

Partie A

I

$D_f =]-1, +\infty[$

① Limites : en -1^+ on peut poser $X = 1+x$ puis factoriser par $\frac{1}{X}$ et faire apparaître la limite classique $\lim_{X \to 0^+} X\ln X = 0$.

② $f'(x) = \frac{1-x}{(1+x)^2}$

x	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1-\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

③ f est continue et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]1, +\infty[$ vers ~~[illegible]~~ $]-\infty, 1-\ln 2[$
$0 \in]-\infty, 1-\ln 2[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]1, +\infty[$ une solution unique α.

Calculer $f(3,9)$ et $f(4)$ conclure.

(Noter les deux temps de cette question : l'existence de la solution puis sa localisation).

II.

① Démontrer que g est continue en 0 puis sur $]0, +\infty[$ pour conclure que g est continue sur $[0, +\infty[$.

② Dérivabilité en 0 : calculer $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

(on trouvera ∞ : conclure).

③ Calculer avec soin : $g'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x}} f(x)$.

④ Le signe de $g'(x)$ est celui de $f(x)$, or d'après l'étude précédente : pour $x \in [0, \alpha]$ $f(x) \geq 0$, pour $x \in [\alpha, +\infty[$ $f(x) \leq 0$.
D'où le tableau de variation :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	0

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \frac{+\infty}{+\infty} = ?$

Poser par exemple $\frac{1}{\sqrt{x}} = X$ soit $x = \frac{1}{X^2}$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{+\infty} X\ln(X^2+1) - \lim_{+\infty} X\ln X^2$

$= 0 + 0 = 0$.

(A suivre)

(Bien rédiger)

④ Ecriture de z_n en fonction de n :

$$z_n = r_n e^{i\theta_n}$$

on remplace alors r_n et θ_n par leurs valeurs en fonction de n.

Exercice 2

① Résolution du système

Il suffit d'utiliser les propriétés algébriques de la fonctions ln

$x>0$ $y>0$ $z>0$

$\ln(xyze^{-1}) = 0 \Leftrightarrow \ln x + \ln y + \ln z - \ln e = 0$

$\ln(x^2y^2z) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x + 2\ln y + \ln z = 0$

$\ln\left(\frac{yz^2}{x}\right) = 5 \Leftrightarrow \ln y + 2\ln z - \ln x = 5$

puis poser par exemple $X = \ln x$, $Y = \ln y$, $Z = \ln z$ ...

② a) Détermination de a et b

$$\frac{1}{e^t+1} = \frac{a + be^t}{e^t+1} \Leftrightarrow \frac{1}{e^t+1} = \frac{a(e^t+1) + be^t}{e^t+1} = \frac{a + e^t(a+b)}{e^t+1}$$

puis par identification ....

b) Calcul de I_0 et I_1

$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{e^t+1}\,dt$ (utiliser la décomposition ci-dessus).

$I_1 = \int_0^1 \frac{e^t}{e^t+1}\,dt$ (forme $\int \frac{u'}{u}$)

c) $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 e^{nt}\,dt = \frac{1}{n}\left[e^{nt}\right]_0^1 = \frac{1}{n}(e^n - 1)$.

Exercice 3

① a) $f(O)$ = milieu de $f([BD])$

= milieu de $[AC]$

$= O$

Par une isométrie : l'image du milieu d'un segment est le milieu de l'image de ce segment.

f est une isométrie qui n'est pas une réflexion (par hypothèse) qui n'est pas une translation ((AC) non parallèle à (BD))

f est une rotation : O est l'unique point invariant

b) Nature de f : Rotation de centre O et d'angle $\theta = \text{mes}(\widehat{\vec{OB}, \vec{OC}}) = \frac{\pi}{2}$

② a) $g(A) = A$ $g(C) = C$ ... b) Même chose

c) Composée de 2 symétries orthogonales d'axes sécants.

CEBER
Département de Mathématiques
Classe : T^{le} C
Enseignant : BISSONO Nicolas
699647526

Ydé le 28 Avril 2020

INDICATIONS ET RAPPELS DE COURS SUR L'EPREUVE « Collection séquence 4 T^{le} C »

Exercice 1

① Mise sous forme exponentielle de z' et z''

La forme exponentielle d'un nombre complexe est :

$$z = re^{i\theta} \quad \begin{array}{|l} r \text{ est un réel strictement positif, le module} \\ \theta \text{ est un argument de } z \end{array}$$

* $z' = -2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$: on peut mettre séparément sous forme exponentielle $z_1 = -2$ et $z_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$ et appliquer la propriété : « le produit de deux complexes écrits sous forme exponentielle est un complexe qui a pour module le produit des modules et pour argument la somme des arguments »
* $z'' = 3i\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$: on peut mettre sous forme exponentielle $z_1 = 3i$ $\quad z_2 = -1 + i\sqrt{3}$ $\quad z_3 = 1 - i$ puis applique la propriété « le rapport de deux nombres complexes écrits sous forme exponentielle est un complexe de module le quotient des modules et dont un argument est la différence des arguments puis la règle sur le produit.

② Montrer que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique

Il suffit de montrer que $r_{n+1} = q r_n$ $(q \in \mathbb{R}^*)$ et conclure.

Montrer que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique

Il suffit de montrer que $\theta_{n+1} = r + \theta_n$ et conclure.

③ Calcul de S_n et T_n

S_n est une somme des termes consécutifs d'une suite géométrique qui vaut : 1^{er} Terme $\times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$

T_n est une somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique qui vaut : nombre de termes $\left(\frac{1^{er}\text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}\right)$