CEBER
Département de MATHEMATIQUES

YAOUNDE le 08 Avril 2020

CLASSE : Terminale C
CHAPITRE : PROBABILITES
Enseignant : BISSONO Nicolas

PROBABILITES

I. ANALYSE COMBINATOIRE

n et p sont des entiers naturels avec $p \leq n$.

$n! = n(n-1)(n-2)(\cdots)\cdots \times 2 \times 1$ ex. : $5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$.

$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ ex. : $A_5^3 = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{5\times4\times3\times2}{2} = 5\times4\times3 = 60$.

$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ ex. : $C_{10}^7 = \dfrac{10!}{7!\,3!} = \dfrac{10\times9\times8\times7!}{7!\times3\times2} = \dfrac{10\times9\times8}{3\times2} = 120$.

Quelques propriétés :

P_1 : $C_n^p = C_n^{n-p}$ P_2 : $A_n^p = p!\,C_n^p$ P_3 : $C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = C_n^p \ (n>p)$

Le tableau suivant permet d'utiliser efficacement ces outils : E est un ensemble fini à n éléments parmi lesquels on choisit p éléments.

Conditions		Le nombre de tirages possibles est le nombre de :	Exemples
$p \geq 1$	Les éléments ne sont pas nécessairement distincts mais ordonnés	p-listes d'éléments de E : n^p	Tirages successifs avec remise
$p < n$.	Les p éléments sont deux à deux distincts et ordonnés.	Arrangements de p éléments de E. A_n^p	Tirages successifs sans remise
$p = n$	Les p éléments sont deux à deux distincts et ordonnés	Permutations des n éléments de E : $n!$	Anagrammes d'un mot formé de lettres toutes distinctes.
$p \leq n$	Les p éléments sont tous distincts et non ordonnés	Combinaisons de p éléments de E : C_n^p	Tirages simultanés

* Distincts : Un élément ne peut être tiré deux fois.
* Ordonnés : Le résultat change si on tire les éléments dans un ordre différent dans le cas d'un tirage successif.

1. CALCUL DES PROBABILITES

A. Vocabulaire

* Epreuve ou expérience aléatoire : expérience au cours de laquelle le résultat n'est pas connu à l'avance

ex. : Lancer d'un dé « ordinaire ».

* Univers des possibles : ensemble des résultats possibles au cours d'une épreuve. On le note parfois Ω.

ex. : Dans le lancer d'un dé numéroté de 1 à 6 : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

* Univers des évènements : ensemble des parties de Ω noté $P(\Omega)$

* Evènement : Une partie de Ω

ex. : Pour le lancer de dé : A : « avoir un chiffre pair » est un évènement défini par : $A = \{2, 4, 6\}$

* Evènement élémentaire : C'est un singleton de $P(\Omega)$ c'est-à-dire une partie de Ω qui a un seul élément.

ex. : Pour le lancer d'un dé à 6 faces : $\{1\}$, $\{6\}$, $\{3\}$ sont des évènements élémentaires.

* Evènement impossible : Evènement qui ne peut pas se réaliser.

ex. : Dans le lancer d'un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, l'évènement B : « avoir le numéro 8 » est un évènement impossible.

* Evènement certain : tout évènement qui se réalise toujours.

ex. : On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, l'évènement C : « obtenir un nombre inférieur à 9 » est un évènement certain.

* A et B étant deux évènements, $A \cap B$ est l'évènement qui se réalise lorsque les évènements A et B se réalisent simultanément.

Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que les évènements A et B sont incompatibles.

* $A \cup B$ est l'évènement qui se réalise lorsque A ou B se réalise.

* $\bar{A}$ est l'évènement contraire de A. Il se réalise lorque A ne se réalise pas.

ex. : Lors d'un lancer de dé :

A : « Obtenir un numéro pair » a pour évènement contraire : $\bar{A}$: « Obtenir un numéro impair ».

Remarque : A et $\bar{A}$ sont des évènements incompatibles.

* $A - B$ est l'évènement qui se réalise lorsque A se réalise et B ne se réalise pas.

Remarque : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

B. TECHNIQUES DE CALCUL DES PROBABILITES.

1. Définition

On nomme probabilité, toute application p de l'ensemble des parties de Ω vers l'intervalle $[0,1]$, qui, à tout évènement de $P(\Omega)$ fait correspondre un réel élément de $[0,1]$: $P : P(\Omega) \longrightarrow [0,1]$

$A \longmapsto P(A)$

ex. : On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.

1. Donner les possibles Ω
2. Définir l'évènement :
   a) A : « Obtenir un nombre multiple de 3 »
   b) B : « Obtenir le numéro 6 ».
   c) C : « Obtenir un nombre plus petit que 4 ».
3. On suppose que les évènements élémentaires sont équiprobables : c'est-à-dire chaque numéro a la même chance de sortir, on dit aussi : le dé est parfaitement équilibré, le dé est parfait, le dé est non truqué, le dé est non pipé, le dé est normal...
   a) Calculer la probabilité de l'évènement B.
   b) Calculer P(A) et P(C).

Solution

1. Ensemble des possibles Ω (ou ensemble des issues)

Dans le lancer d'un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, on peut obtenir : 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 donc :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

2. a) A : « Obtenir un nombre multiple de 3 ».

$A = \{3, 6\}$

b) $B = \{6\}$

c) $C = \{1, 2, 3\}$

3. Calcul des probabilités.

N.B. Dans un cas d'équiprobabilité, A étant un évènement

$$P(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega} = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}$$

$$= \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Ainsi : a) $B = \{6\}$, c'est un singleton, $P(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{1}{6}$

b) $A = \{3, 6\}$ $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

c) $C = \{1, 2, 3\}$ $P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

$P(A)$ se lit : probabilité pour que l'évènement A se réalise.
Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est appelé un espace probabilisé.

② Propriétés pour le calcul des propriétés

P_1 : $P(\Omega) = 1$. c'est l'évènement certain.

P_2 : $P(\emptyset) = 0$ c'est un évènement impossible.

P_3 : soit A et B deux évènements incompatibles ($A \cap B = \emptyset$)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

P_4 : En général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

P_5 : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ mais aussi $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

P_6 : Si $\Omega = \{w_1, w_2, \dots w_n\}$ alors $P(\{w_1\}) + P(\{w_2\}) + \dots + P(\{w_n\}) = 1$

③ Epreuve de Bernouilli - Epreuve binomiale

* Une expérience aléatoire qui n'a que deux issues, deux résultats possibles, est appelée épreuve de Bernouilli. L'un des résultat sera appelé succès et l'autre échec. On notera p la probabilité du succès et q celle de l'échec ; on a : $p = 1 - q$.

ex. : Dans le lancer d'une pièce de 100 frs, il y a deux résultats possibles : pile ou face : c'est une épreuve de Bernouilli.

Lorsqu'on répète n fois une épreuve de Bernouilli et dans les mêmes conditions, on dit qu'on a réalisé un schéma de Bernouilli ou une épreuve binomiale de paramètres (n, p).

P5

La probabilité d'obtenir k succès en n épreuves est alors :

$$P_k = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Exercice

Un dé truqué

Lois usuelles discrètes

Un dé truqué est tel que le nombre 6 apparaît à chaque lancer avec une probabilité de 0,8. Les 5 autres éventualités (faces 1, 2, 3, 4 et 5) ont la même probabilité d'apparition. On lance une fois le dé.

1. (a) Quelle est la probabilité d'obtenir chacune des faces ?
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir une face portant un numéro pair, un numéro impair.
2. On lance le dé 5 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 1 numéro impair ?
3. Soit n un entier naturel, supérieur ou égal à deux. On lance n fois le dé.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir *au moins un* numéro pair.
   (b) Quel nombre minimal de lancers doit-on effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins un numéro pair soit strictement supérieure à 0,999 ?

((Cours à suivre)