PROBLÈME 10 pts

Partie A :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}\cos x$.

On considère la fonction f définie sur ℝ par $f(x)$ dans un repère orthogonal. 0,5 pt

On appelle C_f la représentation graphique de f dans un repère orthogonal.

1. a. Montrer que pour tout réel x, $-e^x \leq f(x) \leq e^x$. 0,25 pt
   b. En déduire que C_f admet une asymptote au voisinage de $-\infty$. 0,5 pt
   Quelle est cette asymptote ?
2. Déterminer les abscisses des points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.
3. On étudie f sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. 0,25 pt
   Démontrer que pour tout réel $x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ on a : $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$.
4. a. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f. 0,5 pt
   Etudier les variations de f sur $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. 0,75 pt
   b. Dresser le tableau de variation de f sur $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.
   Indiquer les valeurs prises par f en $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$. 1 pt
5. Tracer C_f sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.
6. a. Démontrer que, sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, l'equation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet 0,5 pt
   une solution unique α. 0,5 pt
   b. Déterminer un encadrement de α arrondie au centième. 0,5 pt
7. a. On note f'' la fonction dérivée seconde de f. Montrer que $f''(x) = -2e^x \sin x$.
   b. En déduire que, sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, le coefficient directeur de la tangente à C_f au point 0,25 pt
   d'abscisse x atteint, pour $x = 0$, une valeur maximale que l'on précisera.
   c. Trouver l'équation de la tangente T à C_f en 0 et tracer T sur 0,5 pt
   le graphique de la question 5.

Partie B :

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{\pi} e^x \cos(nx)dx$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et que $\sin(n\pi) = 0$. 0,75 pt
2. A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que : $I_n = \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{1 + n^2}$. 0,75 pt
3. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|I_n| \leq \frac{e^{\pi} + 1}{1 + n^2}$. 0,75 pt
   b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$. 0,25 pt

Partie C :

On considère les équations différentielles : $(E) : y' - 2y - 1 = 0$ $\quad (E') : y' - 2y = 1 - e^x \sin x$

où y est une fonction définie et derivable sur $\mathbb{R}$.

Dire, en le justifiant, si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. (E) admet une fonction polynôme du premier degré comme solution. 0,5 pt
2. Soit g une fonction positive définie sur $\mathbb{R}$; si g est solution de (E) alors elle est croissante sur $\mathbb{R}$. 0,5 pt
3. La fonction $x \mapsto 3e^{2x} + \frac{1}{2}$ est une solution de (E). 0,5 pt
4. La primitive F de f qui s'annule en 0 est une solution de (E'). 0,5 pt

"PRIÈRE ET TRAVAIL, TRAVAIL ET PRIÈRE"

CEBER

BACCALAUREAT BLANC

CLASSE : T^{le} C

Durée : 4 H

Enseignant : BISSONO Nicolas 699647586

MATHEMATIQUES

Exercice I, 3 pts

1. Déterminer tous les couples $(a;b)$ d'entiers naturels tel que : $m + 11d = 203$, m étant le PPC[illegible] et d le $PGCD$. 0,75 p
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$, ensemble des entiers relatifs, l'opération $x^2 - 3x + 4 \equiv O[7]$; où x e[illegible] l'inconnue. 0,5 p
3. Déterminer le nombre entier du système décimal qui s'écrit $\overline{abca}$, dans le système à base onz[illegible] et $\overline{bbac}$, dans le système à base sept. 0,5 p
4. a. Ecrire la liste des nombres premiers inférieurs à 50 0,25 p
   b. Le nombre 1517 est-il un nombre premier ? justifier 0,5 p
   c. Quels sont les entiers naturels a et b vérifiant la relation $a^2 = b^2 + 1517$ 0,5 p

EXERCICE II 3,25 pts

L'espace $\mathcal{E}$ est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit les points $A(1;-1;2)$, $B(2;0;-2)$, $C(-1;1;3)$, $D(0;-3;-1)$.

1. a. Démontrer que les points A, B et C déterminent un seul plan que l'on notera $\mathcal{P}$. 0,5 pt
   b. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$. 0,5 pt
2. Justifier que $ABCD$ est un tétraèdre. 0,25 pt
3. Soit s la réflexion de plan $\mathcal{P}$, h l'homothétie de centre A et de rapport $(-2/3)$.
   a. Déterminer les coordonnées de l'image D' du point D par s. 0,5 pt
   b. Calculer le volume de l'image par $h \circ s$ du tétraèdre $ABCD$. 0,75 pt
4. Déterminer une équation cartésienne de l'image $\mathcal{P}'$ du plan $\mathcal{P}$ par $h \circ s$. 0,75 pt

EXERCICE III 3,75 pts

Soit l'application du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout points de coordonnées associe le point de coordonnée[illegible]

tel que : $\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + y \\ y' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$

1. Démontrer que f est involutive. 0,5 p
2. Démontrer que l'ensemble des milieux du segment $[MM']$ est une droite fixe. 0,5 p
3. Soit B le point de coordonnées $(1;0)$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et B' l'image de B par f.
   a. Démontrer que la famille est liée. 0,5 p
   b. Reconnaître la transformation usuelle. 0,5 p
4. Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation : $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2x}$ et $\mathcal{H}'$ l'image de $\mathcal{H}$ par f.
   a. Donner une équation de $\mathcal{H}'$. 0,5 p
   b. Construire $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sur le même graphique. 0,75 p
   c. Donner les équations des asymptotes de $\mathcal{H}'$. 0,5 p

CEBER

BACCALAUREAT BLANC

CLASSE : T^{le} C

Durée : 4 H

Enseignant : BISSONO Nicolas 699647586

MATHEMATIQUES

Exercice I 3 pts

1. Déterminer tous les couples $(a;b)$ d'entiers naturels tel que : $m + 11d = 203$, m étant le $PPCM$ et d le $PGCD$. 0,75 pt
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$, ensemble des entiers relatifs, l'opération $x^2 - 3x + 4 \equiv O[7]$; où x est l'inconnue. 0,5 pt
3. Déterminer le nombre entier du système décimal qui s'écrit $\overline{abca}$, dans le système à base onze, et $\overline{bbac}$, dans le système à base sept. 0,5 pt
4. a. Ecrire la liste des nombres premiers inférieurs à 50 0,25 pt
   b. Le nombre 1517 est-il un nombre premier ? justifier 0,5 pt
   c. Quels sont les entiers naturels a et b vérifiant la relation $a^2 = b^2 + 1517$ 0,5 pt

EXERCICE II 3,25 pts

L'espace $\mathcal{E}$ est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit les points $A(1;-1;2)$, $B(2;0;-2)$, $C(-1;1;3)$, $D(0;-3;-1)$.

1. a. Démontrer que les points A, B et C déterminent un seul plan que l'on notera $\mathcal{P}$. 0,5 pt
   b. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$. 0,5 pt
2. Justifier que $ABCD$ est un tétraèdre. 0,25 pt
3. Soit s la réflexion de plan $\mathcal{P}$, h l'homothétie de centre A et de rapport $(-2/3)$.
   a. Déterminer les coordonnées de l'image D' du point D par s. 0,5 pt
   b. Calculer le volume de l'image par $h \circ s$ du tétraèdre $ABCD$. 0,75 pt
4. Déterminer une équation cartésienne de l'image $\mathcal{P}'$ du plan $\mathcal{P}$ par $h \circ s$. 0,75 pt

EXERCICE III 3,75 pts

Soit l'application du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout points de coordonnées associe le point de coordonnées tel que : $\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + y \\ y' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$

1. Démontrer que f est involutive. 0,5 pt
2. Démontrer que l'ensemble des milieux du segment $[MM']$ est une droite fixe. 0,5 pt
3. Soit B le point de coordonnées $(1;0)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ et B' l'image de B par f.
   a. Démontrer que la famille est liée. 0,5 pt
   b. Reconnaître la transformation usuelle. 0,5 pt
4. Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation : $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2x}$ et $\mathcal{H}'$ l'image de $\mathcal{H}$ par f.
   a. Donner une équation de $\mathcal{H}'$. 0,5 pt
   b. Construire $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sur le même graphique. 0,75 pt
   c. Donner les équations des asymptotes de $\mathcal{H}'$. 0,5 pt

PROBLÈME 10 pts

Partie A :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}\cos x$.

On appelle $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère orthogonal.

1. a. Montrer que pour tout réel x, $-e^x \leq f(x) \leq e^x$. 0,5 pt
   b. En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote au voisinage de $-\infty$. 0,25 pt
   Quelle est cette asymptote ? 0,5 pt
2. Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
3. On étudie f sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. 0,25 pt
   Démontrer que pour tout réel $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ on a : $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$.
4. a. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f. 0,5 pt
   Etudier les variations de f sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. 0,75 pt
   b. Dresser le tableau de variation de f sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
   Indiquer les valeurs prises par f en $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$. 1 pt
5. Tracer $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
6. a. Démontrer que, sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, l'equation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet 0,5 pt
   une solution unique α. 0,5 pt
   b. Déterminer un encadrement de α arrondie au centième. 0,5 pt
7. a. On note f'' la fonction dérivée seconde de f. Montrer que $f''(x) = -2e^{x}\sin x$.
   b. En déduire que, sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x atteint, pour $x = 0$, une valeur maximale que l'on précisera. 0,25 pt
   c. Trouver l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en 0 et tracer T sur le graphique de la question 5. 0,5 pt

Partie B :

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{\pi} e^{x}\cos(nx)dx$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et que $\sin(n\pi) = 0$. 0,75 pt
2. A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que : $I_n = \dfrac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{1 + n^2}$. 0,75 pt
3. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|I_n| \leq \dfrac{e^{\pi} + 1}{1 + n^2}$. 0,75 pt
   b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$. 0,25 pt

Partie C :

On considère les équations différentielles : $(E) : y' - 2y - 1 = 0$ $\quad (E') : y' - 2y = 1 - e^{x}\sin x$

où y est une fonction définie et derivable sur $\mathbb{R}$.

Dire, en le justifiant, si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. (E) admet une fonction polynôme du premier degré comme solution. 0,5 pt
2. Soit g une fonction positive définie sur $\mathbb{R}$; si g est solution de (E) alors elle est croissante sur $\mathbb{R}$. 0,5 pt
3. La fonction $x \mapsto 3e^{2x} + \frac{1}{2}$ est une solution de (E). 0,5 pt
4. La primitive F de f qui s'annule en 0 est une solution de (E'). 0,5 pt

"PRIÈRE ET TRAVAIL, TRAVAIL ET PRIÈRE"