Solution de l'exercice du 08.04.2020

On appelle $P(i)$ la probabilité d'obtenir le numéro i.

1. a) La somme des probabilités de toutes les issues vaut 1 :

$$\begin{cases} P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=1 \\ P(6)=0{,}8 \\ P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=P(5)=p \end{cases}$$

$5p+0{,}8=1 \Leftrightarrow 5p=0{,}2$ Finalement $p=0{,}04$.

b) On obtient un numéro pair quand on obtient 2, 4 ou 6 :

$P(\text{numéro pair}) = P(2)+P(4)+P(6) = 2\times 0{,}04+0{,}8 = 0{,}88$.

Un numéro est soit pair soit impair donc (formule des événements contraires) :

$P(\text{numéro impair})\ 1-P(\text{numéro pair}) = 1-0{,}88 = 0{,}12$.

2. On peut modéliser cette situation par un schéma de Bernoulli, de 5 épreuves identiques indépendants, dont l'issue succès est « obtenir un numéro impair », de probabilité 0,12 et dont l'issue Echec : « Obtenir un numéro pair » est de probabilité 0,88.

La loi de probabilité de cette expérience est la loi binomiale $\mathcal{B}(5\,;0{,}12)$

$P(\text{exactement un numéro impair sur cinq lancers}) = C_5^1\, 0{,}12^1 \times 0{,}88^4 \simeq 0{,}36$.

3. L'expérience des n lancers suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;0{,}12)$ pour les mêmes raisons que précédemment.

a) On calcule :

$$\begin{aligned} P(\text{« au moins un numér pair »}) &= 1 - P(\text{« que des numéros impairs »}) \\ &= 1 - C_n^0\, 0{,}12^n \times 0{,}88^0 \\ &= 1 - 0{,}12^n \end{aligned}$$

b) Il faut résoudre l'inéquation suivante :

$$1-0{,}12^n \geqslant 0{,}999$$
$$0{,}12^n \leq 1-0{,}999$$
$$0{,}12^n \leq 10^{-3}$$
$$n\ln 0{,}12 \leq -3\ln 10 \quad (\ln \text{ est croissante})$$

Puisque $0{,}12<1$, on a $\ln 0{,}12<0$ donc il vient : $n \geqslant \dfrac{-3\ln 10}{\ln 0{,}12} = 3{,}25$ à 10^{-2} près

Donc le nombre minimal de lancers est 4.

C. Variable aléatoire réelle

1. Définitions

* On appelle variable aléatoire réelle sur un univers Ω, toute application X définie de Ω vers $\mathbb{R}$.
X associe à chaque résultat de l'épreuve une valeur réelle.
• L'ensemble des valeurs prises par X est noté $X(\Omega)$ et appelé l'univers image.

Ex.: Une urne contient 5 boules noires et 3 blanches.
Chaque boule blanche tirée rapporte 50FCFA et chaque boule noire tirée fait perdre 40FCFA. On tire deux boules de l'urne.
On définit alors la variable aléatoire réelle X qui associe à chaque tirage son gain algébrique.
Les gains possibles, qui sont les valeurs prises par X sont:

-80 (pour 2 boules noires tirées)
10 (pour 2 boules de couleurs différentes)
100 (pour 2 boules blanches)

Donc $X(\Omega) = \{-80, 10, 100\}$

« $X = 100$ » est l'évènement « gagner 100 FCFA » qui correspond à l'évènement « tirer deux boules blanches ».

« $X \leq 10$ » correspond à l'évènement $(X=-80) \cup (X=10)$. Sa probabilité est $P(X \leq 10) = P(X=-80) + P(X=10)$.

* On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire X, l'application f de $X(\Omega)$ vers $[0,1]$, qui à chaque élément x de $X(\Omega)$, associe la probabilité $f(x) = P(X=x)$ (c'est-à-dire la probabilité pour que X prenne la valeur x).

Si l'univers image est $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ alors définir la loi de probabilité de X revient à déterminer $P(X=x_i)$ pour i allant de 1 à n.

Remarque: $\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i) = 1$

* On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X l'application F de $\mathbb{R}$ vers $[0,1]$ qui à tout réel x, associe $F(x) = P(X \leq x)$

Si l'univers image est $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ alors:

- Si $x < x_1$ alors $F(x) = 0$
- si $x_k \leq x < x_{k+1}$, avec k variant de 1 à $n-1$, alors : $F(x) = \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i)$
- Si $x_n \leq x$, alors $F(x) = 1$.

Remarque : la fonction F est une fonction en escalier croissante, continue en tout élément x_i de $X(\Omega)$ à droite mais pas à gauche.

② Espérance mathématique, variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle.

Soit X une variable aléatoire dont l'univers image est : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

* L'espérance mathématique de X est le réel : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$
* La variance de X est : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) \right)^2$$

* L'écart type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

<u>Remarque importante</u> : Si au cours d'une épreuve binomiale de paramètre (n, p), on définit une variable aléatoire X qui donne le nombre de succès, alors :

son espérance mathématique est : $E(X) = np$.

sa variance est : $V(X) = np(1-p)$.

Fin du chapitre.

A suivre : TRAVAUX DIRIGES SUR : CALCUL DES PROBABILITES.