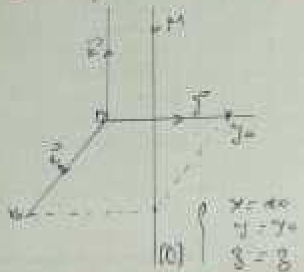
CHAP : PLANS & CÔNES DANS L'ESPACE AFFINE EUCLIDIEN $\mathcal{E}$

D.P.D.

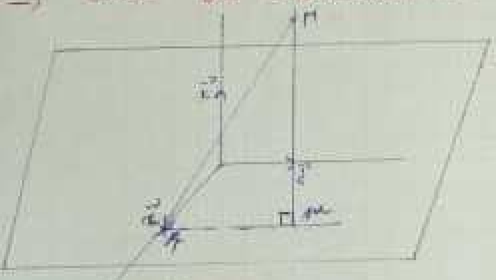
INTRODUCTION : L'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

→ Cylindre de révolution :



note : La rotation de (D) autour de $(O, \vec{k})$ engendre un cylindre de révolution (Γ)

→ Cône de révolution :



note : mes $(\vec{AM}, \vec{Am}) = \alpha$

(AM) engendre le cône de révolution autour de

→ Définitions :

déf. n°1 : On se donne dans l'espace $\mathcal{E}$, un plan (P) et un double cône de révolution $(\mathcal{C})$. On nomme ou appelle conique l'ensemble $(P) \cap (\mathcal{C})$ des points communs de (P) et de $(\mathcal{C})$.

(le sont les être nommées en façons de couper le

déf. n°2 : Le plan étant muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on appelle conique toute courbe ayant une équation du type $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

avec $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$. (on les appelle encore les courbes du 2nd degré)

Parabole ou droite — Cercle ou point — Ellipse ou vide — Hyperbole

→ Cas particuliers

① $A = B = C = 0$, on obtient une droite d'équation

② $2Dx + 2Ey + F = 0$

③ $B = 0$, $A = C$, on obtient

$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = Ax^2 + 2Dx + Cy^2 + 2Ey + F = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 - \left(\frac{D}{A}\right)^2 - \left(\frac{E}{A}\right)^2 + \frac{F}{A} = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - AF}{A^2}$

④ Si $\alpha = \frac{D^2 + E^2 - AF}{A^2} > 0$, $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{A}\right)$ et de rayon $\sqrt{\alpha}$

⑤ Si $\alpha = 0$, $(\mathcal{C})$ est 1 point $\Omega\left(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{A}\right)$

⑥ Si $\alpha < 0$, $(\mathcal{C})$ est 1 vide : $\mathcal{C} = \emptyset$

→ Coniques dégénérées et coniques propres.

⑦ les droites et les points sont les coniques dégénérées.
⑧ Une conique non dégénérée est dite propre.
⑨ Coniques à centre : ce sont les ellipses (dont les cercles) et les hyperboles (coniques propres à centre de symétrie)

→ Théorème et définition

Si $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ rep. orthonormal tq l'équation puisse être mise sous la forme réduite	$y = ax^2 + bx + c$ ou $y^2 = 2px$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
La conique s'appelle	Une Parabole	Ellipse de centre O	Hyperbole de centre O

Admettons : Il y a 3 classes de coniques propres

. Conique à centre. Dans R', 1 pt $M\binom{x}{y}$ et 1 pt M'

$S_A(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ Alors si $M \in \mathcal{C}$ d'équation

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ alors, on aura $\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}=1$

$=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

donc $S_O(M)\in\mathcal{C}$ $\forall M\in\mathcal{C}$, $S_O(\mathcal{C})=\mathcal{C}$

et $\mathcal{C}$ est globalement invariante par S_O.

Note : les ellipses et les hyperboles et [illegible] des coniques à centre.

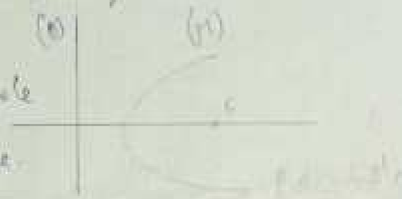
I Définition par foyer et directrice

I-1 Définition : Soit (D) une droite, F un point $\notin$ à (D), e un réel strictement >0,

On appelle conique de foyer F, d'excentricité e et de directrice (D), l'ensemble (Γ) des points du plan tels que

$\frac{MF}{MH}=e$ où H est le projeté orthogonal de M sur (D)

$\frac{d(M,F)}{d(M,D)}=e$



→ si $e=1$ (Γ) est une parabole

→ si $e>1$, (Γ) est une hyperbole

→ si $0<e<1$ (Γ) est une ellipse

Note : lorsque la conique (Γ) est définie comme ci-dessus, on dit alors que ~~la conique est~~ (Γ) est la conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e.

I-2 Définition monofocale :

la définition de la conique par (F, D, e) s'appelle définition monofocale.

I-3 Théorèmes + définitions

Soit (Γ) une conique de foyer (F) et de directrice (D) alors :

1) la droite (Δ) passant par F et $\perp$ à (D) est un axe de symétrie de la conique (Γ)

(Δ) est appelée axe focal de la conique (Γ)

Soit (Γ) une conique d'excentricité e et d'axe focal (Δ), alors on a :

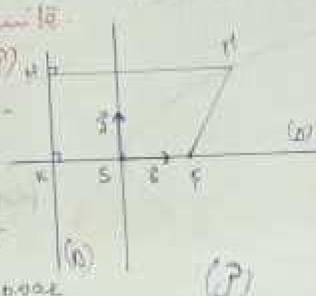
* Si $e = 1$ (cas de la Parabole), (M) coupe l'axe focal (Δ) en 1 point unique S appelé <u>sommet de la Parabole</u>

* Si $e \neq 1$ (hyperbole ou ellipse) (M) coupe l'axe focal (Δ) en deux points A et A' appelés <u>sommets de la conique</u>

→ Soit (M) une conique de foyer F et de directrice (D) alors on a :
* le foyer F est intérieur à (M)
* tout point M de (D) est extérieur à la conique (M)
* la conique (M) partage le plan en deux régions : l'intérieure et l'extérieure à (M)

II Equation cartésienne réduite

II 1 Eq. Réduite d'une Parabole (P)



Soit (P) une Parabole de foyer F d'excentricité $e = 1$ et de directrice (D). K désigne le projeté orthogonal de F sur (D). $\vec{i} = \frac{\vec{SF}}{\|\vec{SF}\|}$

→ $\exists \vec{j}$ tq. $(S, \vec{i}, \vec{j})$ = repère orthonormé

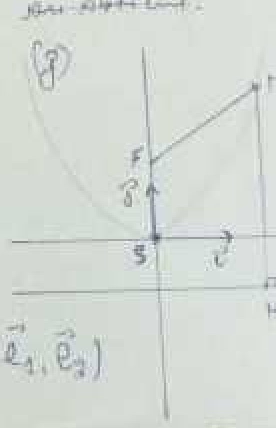
→ Par rapport à ce repère, on pose $KF = p$, alors $F(\frac{p}{2}, 0)$ et $(D) : x = -\frac{p}{2}$

→ Soit $M(x, y)$ 1 pt du plan, son projeté orth sur (D) est $H(-\frac{p}{2}, y)$

alors $M \in (P) \Leftrightarrow \frac{MF}{MH} = e$ (or $e = 1$)

$\Leftrightarrow MF = MH \Leftrightarrow \boxed{y^2 = 2px}$ (1)

b) En permutant les axes du repère, on obtient $(S, \vec{i})$ et $(S, \vec{j})$ on obtient



→ une équation du type $\boxed{x^2 = 2py}$ (2)

→ L'axe focal est la dte $(S, \vec{j})$

→ le foyer est $F(0, \frac{p}{2})$

→ la directrice est $y = -\frac{p}{2}$

c) Le nombre réel strict positif p est appelé paramètre de la parabole

d) Dans un repère orthonormé $(\Omega, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

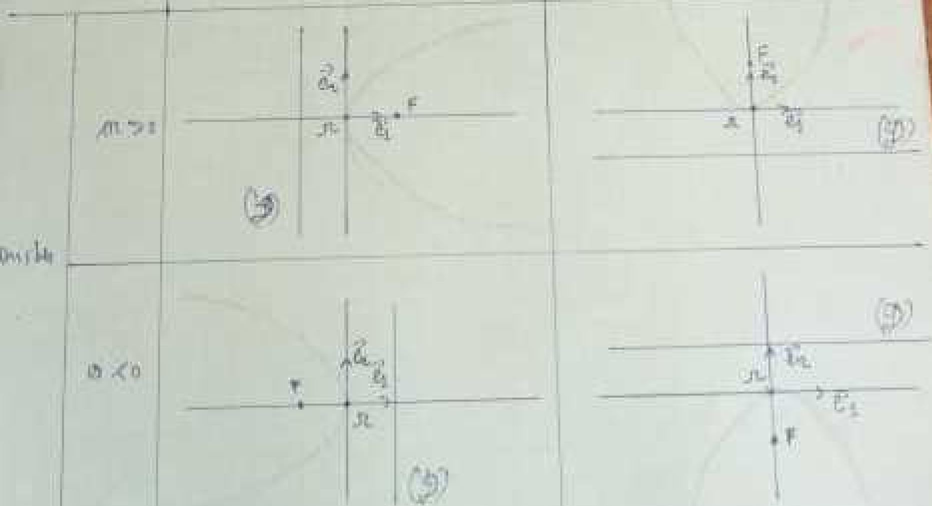
La courbe d'équation $y^2 = 2ax$ ($a \neq 0$) est la parabole (P) de sommet Ω, d'axe focale la droite (Ω, $\vec{e_1}$) et de paramètre $p = |a|$, le foyer est le pt $F(\frac{a}{2}, 0)$, la directrice est la droite (D) : $x = -\frac{a}{2}$

→ La courbe d'équation $x^2 = 2ay$ ($a \neq 0$) est la parabole (P) de sommet Ω, d'axe focale la droite (Ω, $\vec{e_2}$) et de paramètre $p = |a|$, le foyer est le point $F(0, \frac{a}{2})$ et la directrice est la droite (D) : $y = -\frac{a}{2}$.

II-2 Courbes schématiques de la Parabole (P)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (Ω, $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$)

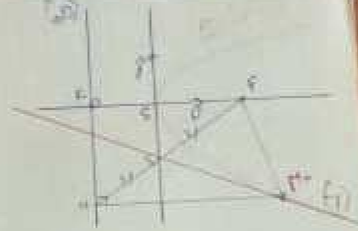
Équations	$y^2 = 2ax$	$x^2 = 2ay$
Paramètre	$\lvert a \rvert$	
Sommet	Ω	
Axe focal	(Ω, $\vec{e_1}$)	(Ω, $\vec{e_2}$)
Foyer	$F(\frac{a}{2}, 0)$	$F(0, \frac{a}{2})$
Directrice	(D) : $x = -\frac{a}{2}$	(D) : $y = -\frac{a}{2}$



II-3 Équation de la tangente en un pt $M(x_0, y_0) \in (P)$

Soit (P) une parabole du plan euclidien, ∃! point et une unique droite (D) tels que (P) soit la parabole de foyer F et de directrice (D).

Si l'équation réduite est
$y^2 = 2px$ ($p>0$) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$
orthonormal, alors :
$y^2 = 2px$ ($p>0$) $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$;
(D) $x = -\frac{p}{2}$, $p = d(F, D)$
$P = \left\{ M \in P / \frac{d(MF)}{d(M,D)} = 1 \right.$
La tangente (T) en M à P coupe ... est la médiatrice du segment [FH] ... sommet de P.



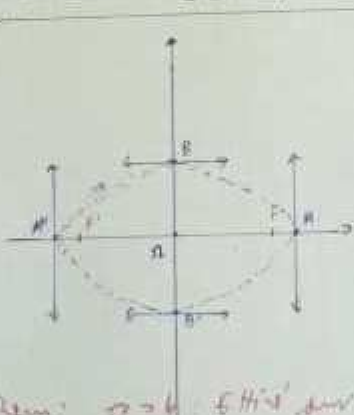
III : Etude de l'ellipse

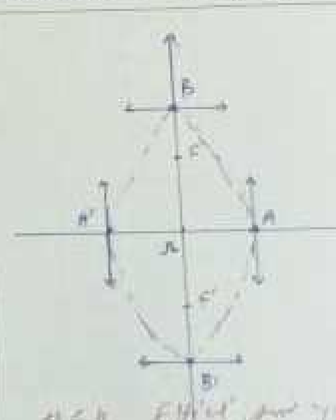
III-1 Eléments caractéristiques de l'ellipse

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(\Omega, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

	1er cas $a > b$	2ème cas $a < b$
EQUATIONS	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
SOMMETS	$A(a,0)$; $A'(-a,0)$	$B(0,b)$ $B'(0,-b)$
Demi-distance focale c	$c = \sqrt{a^2-b^2} = \frac{FF'}{2}$	$c = \sqrt{b^2-a^2}$
FOYERS	$F(c,0)$; $F'(-c,0)$	$F(0,c)$; $F'(0,-c)$
EXCENTRICITE	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{b}$
Directrices	(D) $x = \frac{a^2}{c}$; $(D') = -\frac{a^2}{c}$	(D) : $y = \frac{b^2}{c}$ et (D') : $y = -\frac{b^2}{c}$
Axes	AXE FOCAL (AA') Gd AXE : [AA'] Pt AXE : [BB']	AXE FOCAL [BB'] Gd AXE : [BB'] Pt AXE : [AA']
Cercles	Principal $\mathscr{C}(\Omega, a)$ Secondaire $\mathscr{C}(\Omega, b)$	Principal : $\mathscr{C}(\Omega, b)$ Secondaire : $\mathscr{C}(\Omega, a)$

Graphes





Rem : $a > b$; Ellipse ... | $a < b$; Ellipse ...

II-2 Équation de la tangente en 1 pt de l'ellipse

Théorème (admis)

Soit (E) l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. La tangente (T) en 1 point $M(x_0,y_0)$ de (E) a pour équation

$$(T) : \frac{x.x_0}{a^2}+\frac{y.y_0}{b^2}=1.$$

III-3 Ellipse et cercle (Représentation paramétrique d'une ellipse)

Soit (E) l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, alors pt $M \in (E)$, on a $M \in (E) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$

$\Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tq $\cos\alpha = \frac{x}{a}$ et $\sin\alpha = \frac{y}{b}$

D'où (E) a pour représentation param. le système :

$$\begin{cases} x = a\cos\alpha \\ y = b\sin\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

En gal : si (E) admet pour éq $\frac{(x-u)^2}{a^2}+\frac{(y-v)^2}{b^2}=1$ alors sa représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = a\cos\alpha + u \\ y = b\sin\alpha + v \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{avec } (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

II-4 Construction de l'ellipse (point par point)

Soit (E) l'ellipse de représentation paramétrique

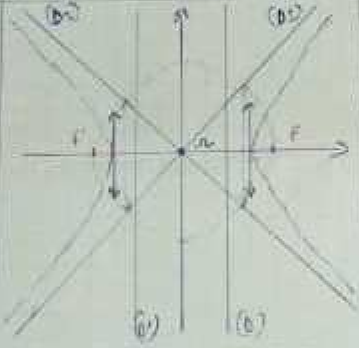
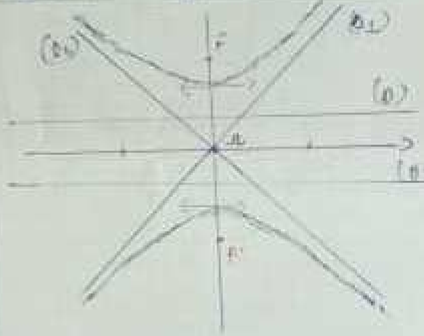
$$\begin{cases} x = a\cos\alpha \\ y = b\sin\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{supp } a > b > 0$$

On a $\Omega A = \Omega A'$, $\Omega B = \Omega B'$

Pour construire 1 pt M de (E)

- Tracer les cercles (C_1) et (C_2) de centre Ω et de rayons resp. a et b
- Tracer 1 diamètre AA' de (C_1)
- Tracer 1 demi-dte d'origine Ω qui coupe (C_1) en P_1 et (C_2) en P_2.
- Tracer la perpendiculaire à (AA') passant par P_1 et
- la // à (AA') passant par P_2
- Le pt d'intersection de ces 2 dtes est 1 pt de (E)

IV Étude de l'hyperbole
IV-1 Cas général

Équation	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Demi-distance focale	$c = \sqrt{a^2+b^2}$, $\frac{c}{2}$	$c = \sqrt{a^2+b^2}$ = $\frac{c}{2}$
Excentricité	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{b}$
Sommets	$A(a,0)$ $A'(-a,0)$	$B(0,b)$, $B'(0,-b)$
Foyers	$F(c,0)$ $F'(-c,0)$	$F(0,c)$ $F'(0,-c)$
Directrices	(D) $x = \frac{a^2}{c}$ (D') $x = -\frac{a^2}{c}$	(D) : $y = \frac{b^2}{c}$ (D') : $y = -\frac{b^2}{c}$
Axe focal	(AA')	(BB')
Asymptotes	(D_1) : $y = \frac{b}{a}x$	(D_2) $y = -\frac{b}{a}x$
Construction		

IV-2 Tangente et éq paramétrique
Théorème (admis)

Soit (H) l'hyperbole d'éq $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

1) La tan. en un pt $M_0(x_0, y_0)$ à (H) a pour équation

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$$

2) Pour tout pt $M \in (H)$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2}$

$\iff \begin{cases} x = \frac{a}{\cos t} \\ y = b \tan t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ est la représentation param. de l'hyperbole (H).

→ Théorème 1) Soit (H) l'hyperbole d'équation

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a > 0$, $b > 0$,

(H) est l'ensemble des points M du plan tels que $|MF - MF'| = 2a$ où $FF' = 2c$ et $c > a$

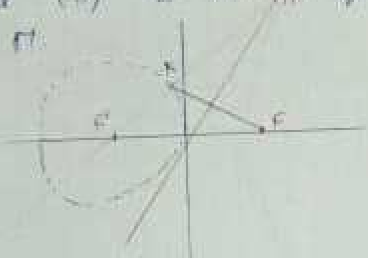
2-) Pour construire 1 point de (H) et sa tangente

1) Tracer le cercle $(\mathcal{C})$ de centre F' et de rayon 2a.

2) Tracer 1 rayon [F'K] de $(\mathcal{C})$.

3) Tracer la médiatrice de [FK]

Note : cette médiatrice coupe (F'K) en 1 pt M de (H) et est tangente à (H) en ce pt M.



Compléments

Théorème

Par définition, $\mathcal{C} = \{ M \in P \,/\, Ax^2 + 2Cxy + By^2 + 2Dx + 2Ey + F=$

alors on a :

1-) $AB - C^2 = 0$, $\mathcal{C}$ = parabole

2-) $AB - C^2 < 0$, $\mathcal{C}$ = hyperbole

3-) $AB - C^2 > 0$; $\mathcal{C}$ = ellipse

Si $C = 0$,

1°) $A \cdot B = 0$ ($A = 0$ ou $B = 0$) $\mathcal{C}$ = parabole

2°) $A \cdot B < 0$ $\mathcal{C}$ = hyperbole

3°) $A \cdot B > 0$ $\mathcal{C}$ = Ellipse

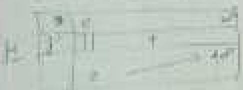
Définition parabole:

Soient F et F' deux points du plan distincts, et soit $a \in \mathbb{R}$

- Si $2a > FF'$, alors $\{M \in P / MF + MF' = 2a\}$ est une Ellipse de longueur d'axe focale $2a$, de foyers F et F'
- Si $0 < 2a < FF'$, alors $\{M \in P / |MF - MF'| = 2a\}$ est une hyperbole de longueur d'axe focal $2a$, de foyers F et F'

Étude analytique: $y^2 = 2px$ signifie que $f_1(x) = \sqrt{2px}$ et $f_2(x) = -\sqrt{2px}$

Dans les 2 cas ...



Équation de la Tgte en $M\binom{x_0}{y_0}$ de la parabole.

Théorème: Si (P) a pour éq. $y^2 = 2px$, alors (T): $yy_0 = p(x + x_0)$

Si (P) ... $x^2 = 2py$ ... (T): $xx_0 = p(y + y_0)$

Application: $y^2 = -4x$, $M\binom{-1}{2}$, (T): $x + y - 1 = 0$

$x^2 = 4y$, $P(2,1)$, (T): $x - y - 1 = 0$