CHAP. ESPACE DIMENSION 3

O.P.O.

I. Règles d'incidence

I_1 Étant donnés 2 pts A et B de l'espace, ∃! droite (D) la contenant, on la note (AB)
(par 2 pts il ne passe qu'une et une seule droite).

→ I_2 Étant donnés 3 points A, B, C ∃! plan P les contenant.

(Par 3 points non alignés il ne passe qu'1 et 1 seul plan).

→ I_3 par 1 point ∉ (D), il ne passe qu'1 et une seule droite (D') // à (D)

→ I_4 par un point ∉ (P), il ne passe qu'1 et 1 seul plan // (P).

→ I_5 Si une droite a deux de ses points ∈ à 1 P alors elle ⊂ dans ce plan.

Vocabulaire (note)

→ 2 pts déterminent une droite

→ plusieurs pts sont alignés s'ils ∈ à une même dte.

→ plusieurs points ∈ à 1 même plan sont dits coplanaires. parallélisme

II. Propriétés plans / espace (note)

→ On dit que 2 ou plusieurs vecteurs sont coplanaires si et seulement leurs représentants dont les extrémités (points) ∈ à 1 même plan.

Note : (base et repère dans l'espace)

→ base on appelle base, tout triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ des vecteurs non coplanaires

→ Repère on appelle Repère de l'espace tout quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ des points non coplanaires

→ Notons $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ou $(\vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$

→ Note repère de l'espace base

→ Coordonnées d'1 pt coordonnées d'1 vecteur

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant 1 repère de l'espace, ∃!
$(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tq $\vec{OM} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

(a, b, c) sont appelés triplet de coordonnées du pt M de $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ notons M

Note : le repère permet de :

→ situer un point

→ une droite D(A, $\vec{u}$)

→ 1 plan P(A, $\vec{u}$, $\vec{v}$) où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

NB. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ = Rep orthonormé de l'espace Rep $\vec{OM} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
(... expression du prod. scal.)

Propriété N°1

Note : On dit $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ déterminent le plan (ABC)

Rem : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow \vec{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

Théorème : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires et sachant que $\vec{u}, \vec{v}$ ne sont pas colinéaires. On a $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tq $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Propriété N°2 : position des points dans le repère de l'espace

$M(x, y, z)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace

Retenons : x = abscisse, y = ordonnée et z = cote.

Propriété N°3 : calculs sur les coordonnées.

En sachant que tous les résultats de la géométrie plane concernant les coordonnées s'étendent à l'espace par l'adjonction d'une 3e coordonnée.

Ds $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ $\vec{u}(x, y, z)$ $\vec{v}(a, b, c)$

et k, $k\vec{u}(kx, ky, kz)$, $\vec{u}+\vec{v}(a+x, b+y, c+z)$

$A(x, y, z)$, $B(a, b, c)$ $\vec{AB}(a-x, b-y, c-z)$

milieu de $AB\left(\frac{a+x}{2}, \frac{b+y}{2}, \frac{c+z}{2}\right)$, $d(AB) = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$

II. plan dans l'espace

Note : dans l'espace, 1 plan peut être déterminé par

→ 1 point + 1 vecteur normal

→ 1 point + 2 vecteurs directeurs non colinéaires

→ 3 points non alignés

II.1 P déterminé par $A(1, 2, 3)$ et $\vec{n}(-2, 1, -3)$

$\forall M(x, y, z) \in P$ $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \vec{AM}$ et $\vec{n}$ sont orth.

or le prod. scal. $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \cdot \vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = ax + by + cz$.

alors $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow -2(x-1) + 1(y-2) - 3(z-3) = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{-2x + 1y - 3z + 9 = 0}$ = équation cartésienne du plan.

Retenons : En général l'équation cartésienne de plan s'écrit sous la forme $(P) : ax + by + cz + d = 0$ et $\vec{n}(a, b, c)$ est le vecteur normal à P.

Ainsi $M(x_0, y_0, z_0) \in P \Leftrightarrow ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$.

II.2 P déterminé par $A(1, 2, 3)$ et $\vec{u}(1, 0, -1)$ et $\vec{v}(0,$

$\forall M(x, y, z) \in P(A, \vec{u}, \vec{v})$ $\vec{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \Rightarrow$ éq. paramétrique vectorielle

éq. para. du plan $\Rightarrow$
$$\begin{cases} x = 1 + 1\alpha + 0\beta & (1) \\ y = 2 + 0\alpha + 1\beta & (2) \\ z = 3 - 1\alpha + 1\beta & (3) \end{cases}$$
où α et $\beta \in \mathbb{R}$

Note : Pour passer de l'éq. para. à l'éq. cartésienne, il suffit simplement d'éliminer les paramètres à partir de 2 éq. puis les remplacer dans la 3e.

(1) → $\alpha = x - 2$ et (2) → $\beta = y - 3$ et ainsi
(3) ⇔ $z = 3 - (x-2) + (y-3)$ ⇔ $\boxed{x - y + z - 2 = 0}$

NB : souvent on évite le calcul pour déterminer des éq. cartésiennes, il faut bien observer les équations paramétriques

Ex1 $\begin{cases} x = 3 + \alpha - \beta \\ y = 2 - \alpha + \beta \\ z = 5 + 2\alpha + 5\beta \end{cases}$ → $\boxed{x + y = 5}$

Ex2 $\begin{cases} x = 2 + \alpha - 2\beta \\ y = 3 \\ z = 5 + 3\alpha + 5\beta \end{cases}$ → $\boxed{y = 3}$

Ex3 $\begin{cases} x = 1 + \alpha - \beta \\ y = 2 + \alpha + \beta \\ z = 3 + 2\alpha - 3\beta \end{cases}$ → $\boxed{5x - y - 2z + 3 = 0}$

II.3 P défini par 3 points non alignés :
A, B, C non alignés → P(A, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$) car $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ non colinéaires
et on retrouve P(A, $\vec{u}$, $\vec{v}$).

~~III Parallélisme et orthogonalité (à faire)~~

III.4 Définitions :
→ Déf 1 (droite de l'espace) : Soit A pt de l'espace, $\vec{u}$ un vecteur ≠ $\vec{0}$ de V, alors la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ (D) notée D(A, $\vec{u}$) est l'ens. des pts M tq $\vec{AM} = k\vec{u}$ ($k \in \mathbb{R}$) ...
Notes : → Dtes // : 2 dtes D(A, $\vec{u}$) et D'(A', $\vec{v}$) sont // ssi les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ($\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$)
→ Dtes ⊥ ... ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ⊥ ⇔ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

→ Déf 2 (plan de l'espace) : Soit A un pt de l'espace, $\vec{u}$, $\vec{v}$ 2 vecteurs non colinéaires, alors le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté P(A, $\vec{u}$, $\vec{v}$) est l'ens. des pts M tq $\vec{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ ...
Notes (Parallélisme de 2 plans) : Soient 2 plans P et P' d'éq. cart. respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ dans un repère de l'espace.
Soit le système : $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$

Si ∃ $k \in \mathbb{R}$ tq $a = ka'$, $b = kb'$, $c = kc'$ et $d \neq kd'$ alors P et P' sont strictement //

Si ∃ $k \in \mathbb{R}$ tq $a = ka'$, $b = kb'$, $c = kc'$, et $d = kd'$ → P = P' confondus

Sinon P et P' sont sécants selon 1 dte

Notes (Plans perpendiculaires) : 2 plans P et P' d'éq. resp. $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ dans 1 repère orthonormé sont perpendiculaires ssi leurs vecteurs normaux $\vec{n}(a, b, c)$ et $\vec{n'}(a', b', c')$ sont ⊥
$\vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$ ⇔ $aa' + bb' + cc' = 0$.

III.5 (Dte et plan orthogonaux) : une droite D(A, $\vec{u}$) et P(A, $\vec{v}$, $\vec{w}$) sont ⊥ ssi $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$
⇔ $\vec{u}$ est colinéaire à tout vecteur normal de P.

I.5 Notion de distance d'1 pt à 1 plan

Soit le pt $A(x_A, y_A, z_A)$, le plan P d'éq. $ax+by+cz+d=0$ dans le repère orth., alors la distance de A à P est

$$d(A,P) = \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

II Équations cartésiennes d'objets de l'espace.

II.1 déf : On appelle équation d'1 ens. de pts de l'espace dans 1 repère donné, une relation vérifiée par les coordonnées de tous les pts de cet ens. et seulement par les coord. de ces pts.

II.2 exemples :

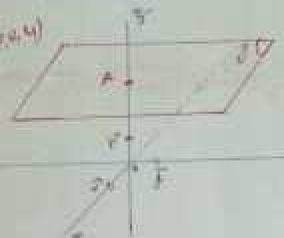
→ dans $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ l'ens. des pts du plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ = ens. de tous les pts dont la cote est nulle

→ les pts de ce plan sont tq $M(x,y,0)$ [illegible] $z=0$

d'où l'équation $z=0$ ∈ plan $(O,\vec{i},\vec{j})$.

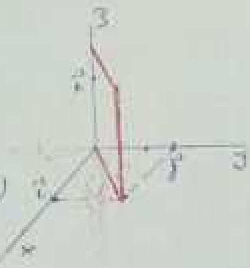
Ce plan est // à $(O,\vec{i},\vec{j})$

Illustration : (cas $z=4$)



$z=4$ = éq. cart. du plan P

→ Autre exemple



En particulier ; l'esp. étant muni de $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$z=0$ est une équation du plan $(O\vec{i}\vec{j})$

$y=0$ — " — " — $(O\vec{i}\vec{k})$

$x=0$ — " — " — $(O\vec{j}\vec{k})$

II.3 Éq. cartésienne de la sphère

pour déter. l'éq. de la sphère, il faut donc se rappeler les propriétés suivantes

→ la sphère de centre Ω et de rayon r ($r \in \mathbb{R}$) est l'ens. des pts M de l'espace tq $\Omega M^2 = r^2$

→ la sphère de diamètre [AB] ($A \neq B$) est l'ens. des pts M de l'esp. tq $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$

Note : dans $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ l'éq. cart. de S de centre O et de rayon r est $x^2+y^2+z^2=r^2$

Rappel : $\Omega(a,b,c)$, $r \in \mathbb{R}^*_+$, $M \in S \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2$

$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

$A(3,-1,?)$, $B(2,2,3) \Rightarrow S(\Omega, r)$ Ω([illegible]) $r=3$

paramétrique d'une droite D' qui passe par B(1, -2, -1) et est parallèle à D.

2) On considère un point A de l'espace de coordonnées (0, 1, 1). Déterminer la distance de A à la droite D.

SOLUTION

1) Représentation paramétrique de D'.

Nous savons que deux droites D et D' sont parallèles si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Appelons $\vec{u}$ le vecteur directeur de D, nous avons: $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

D et D' ont le même vecteur directeur, en plus D' passe par B(1, -2, -1); nous avons la définition suivante de D'

$$D' = \{ M \in \mathscr{E} \,/\, \exists a \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{BM} = a\vec{u} \}$$

$$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-1\\y+2\\z+1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BM} = a\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y+2\\z+1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Nous obtenons le système suivant:

$$\begin{cases}x = 1 - 2a\\ y = -2 - a\\ z = -1 - a\end{cases}$$

2) Calcul de la distance de A à la droite D.

La distance de A à la droite D est la distance de A au point H, H étant le projeté orthogonal de A sur la droite D.

Pour avoir H on détermine une équation cartésienne du plan P qui passe par A et est perpendiculaire à D, et l'intersection de P et de D donne le point H.

Déterminons une équation de P.

$$P = \{ M \in \mathscr{E} \,/\, \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = 0 \}$$

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = 0$$
$$\Leftrightarrow -2(x) - (y-1) - (z-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow -2x - (y-1) - (z-1) = 0$$

Soit $H(x_H, y_H, z_H)$

$$H \in D \cap P \Leftrightarrow H \in D \text{ et } H \in P$$

$$H \in D \Leftrightarrow \begin{cases}x_H = 2 - 2a\\ y_H = 1 - a\\ z_H = -1 - a\end{cases}$$

$$H \in P \Leftrightarrow 2x_H + y_H + z_H - 2 = 0$$

En remplaçant x_H, y_H et z_H par leur valeur, nous avons:

$$2(2-2a) + (1-a) + (-1-a) - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4 - 4a + 1 - a - 1 - a - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow -6a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases}x_H = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\\ y_H = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\\ z_H = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}\end{cases}$$

Le point H est le point de coordonnées $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

Déterminons la distance de A à H.

$$AH = \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(-\frac{4}{3} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{1}{9} + \frac{49}{9}} = \frac{\sqrt{66}}{9} = \frac{\sqrt{66}}{3}$$

La distance du point A à la droite D est égale à $\frac{\sqrt{66}}{3}$

EXERCICE 12

On considère la sphère S d'équation:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 6z + 10 = 0$$

1) Déterminer le centre Ω et le rayon R de la sphère S.

2) P est le plan d'équation

$$2x + y + z - 2 = 0$$

2-a) Déterminer la distance de Ω à P.

2-b) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de Ω sur P.

2-c) Montrer que S et P sont sécants.

3) On appelle $\mathscr{C}$ le cercle intersection du plan P et de la sphère S.

Déterminer le centre et le rayon de $\mathscr{C}$.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + k = 0$$
avec $k = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$

Par identification, nous avons:

$-2a = -2 \Rightarrow a = 1$

$-2b = -6 \Rightarrow b = 3$

$-2c = -6 \Rightarrow c = 3$

Ω est le point de coordonnées (1, 3, 3).

Déterminons ensuite le rayon R.

$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - k}$ avec $k = 10$

d'où $R = \sqrt{1 + 9 + 9 - 10} = 3$

S est la sphère de centre Ω(1, 3, 3) et de rayon R = 3.

2-a) Déterminons la distance de Ω au plan P.

Si A est le point de coordonnées (x_A, y_A, z_A) et P le plan d'équation $ax + by + cz + k = 0$, alors la distance de A à P notée d(A, P) est définie par:

$$d(A, P) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + k|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Nous avons:

Ω(1, 3, 3), P: $2x + y + z - 2 = 0$

$$d(\Omega, P) = \frac{|2(1) + (3) + (3) - 2|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{|6|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

2-b) Coordonnées du point H, projeté orthogonal de Ω sur P.

Le point H est l'intersection de la droite Δ qui passe par Ω et qui est perpendiculaire au plan P.

La droite Δ est engendrée par le vecteur normal du plan P qui est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\Delta = \{ M \in \mathscr{E} \,/\, \exists a \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{\Omega M} = a\vec{n} \}$$

$$\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix}x-1\\y-3\\z-3\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\Omega M} = a\vec{n} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y-3\\z-3\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

Nous obtenons le système suivant:

$$\begin{cases}x = 2a + 1\\ y = a + 3\\ z = a + 3\end{cases}$$

Nous savons $H = \Delta \cap P$

Soit $H(x_H, y_H, z_H)$

$$H \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases}x_H = 2a + 1\\ y_H = a + 3\\ z_H = a + 3\end{cases}$$

$$H \in P \Leftrightarrow 2x_H + y_H + z_H - 2 = 0$$

En remplaçant x_H, y_H et z_H par leur valeur, nous avons:

$$2(2a + 1) + (a + 3) + (a + 3) - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 6a + 8 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{cases}x_H = -\frac{8}{3} + 1 = -\frac{5}{3}\\ y_H = -\frac{4}{3} + 3 = \frac{5}{3}\\ z_H = -\frac{4}{3} + 3 = \frac{5}{3}\end{cases}$$

Le point H est le point de coordonnées $\left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$

C) Montrons que S et P sont sécants.

Nous savons qu'une sphère et un plan sont sécants si la distance du centre de la sphère au plan est inférieure au rayon de cette sphère. Alors R = 3 et $d(\Omega, P) = \sqrt{6}$.

$\sqrt{6}$ est inférieur à 3, donc P et S sont sécants.

3) L'intersection de la sphère et du plan P est le cercle $\mathscr{C}$ de centre le point H et de rayon le réel positif $\rho = \sqrt{R^2 - \Omega H^2}$

Le point H a pour coordonnées $\left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

Calculons ρ:

$$\rho = \sqrt{3^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{9 - 6} = \sqrt{3}$$

EXERCICE 13

$\mathscr{E}$ est l'espace affine de dimension 3. A et B sont deux points de $\mathscr{E}$ tels que AB = 6.

1) Déterminer l'ensemble Γ des points M de l'espace $\mathscr{E}$ tels que $MA^2 + MB^2 = 26$.

2) Déterminer l'ensemble Γ' des points M de l'espace $\mathscr{E}$ tels que $\frac{MA}{MB} = 2$.

3) Déterminer l'ensemble Σ des points M de l'espace $\mathscr{E}$ tels que $MA^2 - MB^2 = 8$.

SOLUTION

Dans l'espace de dimension 3, l'ensemble Γ_k des points M de l'espace tels que $MA^2 + MB^2 = k$ est appelé surface de niveau

$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 2$; I(1, −1, 2)

J est milieu de [AC] : $\vec{OJ} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OC})$

$x_J = \frac{x_A + x_C}{2} = 0$; $y_J = \frac{y_A + y_C}{2} = 1$

$z_J = \frac{z_A + z_C}{2} = 2$; J(0, 1, 2)

$\vec{OK} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OD})$

$x_K = \frac{x_A + x_D}{2} = -2$; $y_K = \frac{y_A + y_D}{2} = 0$

$z_K = \frac{z_A + z_D}{2} = 2$; K(−2, 0, 2)

Déterminons les composantes de $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$.

O étant l'origine du repère, nous avons les relations vectorielles suivantes:

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}$

$\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA}$

Ces relations nous permet d'avoir les composantes suivantes:

$$\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix} ; \vec{AC}\begin{pmatrix}0\\2\\-4\end{pmatrix} ; \vec{AD}\begin{pmatrix}-4\\0\\-4\end{pmatrix}$$

b) Equations cartésiennes des plans P_1, P_2, P_3.

Définition

A et B sont deux points de l'espace et I le milieu du segment [AB]. On appelle plan médiateur du segment [AB] le plan P qui passe par I et est perpendiculaire au segment [AB].

Tous les points de ce plan sont équidistants des points A et B.

Equation cartésienne du plan P_1

P_1 Passe par I et est perpendiculaire à [AB]. Pour tout M de P_1 nous avons: $\vec{IM}.\vec{AB} = 0$

$$\vec{IM}\begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z-2\end{pmatrix}$$

$\vec{IM}.\vec{AB} = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-1) - 2(y+1) - 4(z-2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1) - (y+1) - 2(z-2) = 0$

$\Leftrightarrow x - y - 2z + 2 = 0$

P_2 Passe par J et est perpendiculaire à [AC]. Pour tout M de P_2 nous avons: $\vec{JM}.\vec{AC} = 0$

$$\vec{JM}\begin{pmatrix}x\\y-1\\z-2\end{pmatrix}$$

$\vec{JM}.\vec{AC} = 0$

$\Leftrightarrow 0(x) + 2(y-1) - 4(z-2) = 0$

$\Leftrightarrow (y-1) - 2(z-2) = 0$

$\Leftrightarrow y - 2z + 3 = 0$

P_2: $y - 2z + 3 = 0$

Equation cartésienne du plan P_3

P_3 Passe par K et est perpendiculaire à [AD]. Pour tout M de P_3 nous avons: $\vec{KM}.\vec{AD} = 0$

$$\vec{KM}\begin{pmatrix}x+2\\y\\z-2\end{pmatrix}$$

$\vec{KM}.\vec{AD} = 0$

$\Leftrightarrow -4(x+2) + 0(y) - 4(z-2) = 0$

$\Leftrightarrow (x+2) + (z-2) = 0$

$\Leftrightarrow x + z = 0$

P_3: $x + z = 0$

2) Montrons que ces plans ont un seul point commun Ω.

Considérons les plans P_1 et P_2

Ces plans sont-ils sécants?

P_1 et P_2 sont sécants si leurs vecteurs normaux sont non colinéaires.

Soient $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ les vecteurs normaux respectifs de P_1 et P_2; nous avons:

$$\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} \qquad \vec{n_2}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$$

Peut-on trouver un réel α tel que : $\vec{n_1} = \alpha.\vec{n_2}$ Nous avons:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$$

Nous obtenons le système suivant:

$$\begin{cases}1 = 0\\ \alpha = -1\\ -2\alpha = -2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1 = 0\\ \alpha = -1\\ \alpha = 1\end{cases}$$

Ce système est impossible donc α n'existe pas. Nous concluons que P_1 et P_2 sont sécants.

L'intersection de P_1 et P_2 est une droite; appelons D cette droite. Il nous faut maintenant montrer que D et P_3 sont sécants.

Soit $(\vec{v}, \vec{w})$ une base du plan P_3.

Nous allons montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires.

Recherchons $\vec{u}$

$$\begin{cases}x - y - 2z = 0 & (1)\\ y - 2z = 0 & (2)\end{cases}$$

L'équation (2) nous donne $y = 2z$

l'équation (1) nous donne $x = 4z$

Pour tout vecteur (x, y, z) de D, nous avons:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4z\\2z\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} \quad \text{On pose } \vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$$

Recherche de $\vec{v}$ et de $\vec{w}$

Pour tout vecteur (x, y, z) du plan P_3 nous avons:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-z\\y\\z\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

On pose $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{w}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

Dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires revient à dire que:

Pour tous réels a, b, c,

$a.\vec{u} + b.\vec{v} + c.\vec{w} = \vec{0} \Longrightarrow a = b = c = 0$

Supposons $a.\vec{u} + b.\vec{v} + c.\vec{w} = \vec{0}$ et montrons que $a = b = c = 0$.

Nous avons:

$a.\vec{u} + b.\vec{v} + c.\vec{w} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow a\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}4a - c\\2a + b\\a + c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Nous obtenons le système suivant:

$$\begin{cases}4a - c = 0 & (1)\\ 2a + b = 0 & (2)\\ a + c = 0 & (3)\end{cases}$$

L'équation (1) nous donne $c = 4a$

l'équation (3) nous donne $5a = 0$ d'où $a = 0$.

ce qui nous permet d'obtenir $b = c = 0$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires, donc D et P_3 sont sécants.

L'intersection d'une droite et d'un plan est un point; appelons Ω ce point.

Déterminons les coordonnées de Ω.

Nous allons résoudre un système de trois équations à trois inconnues défini par:

$$\begin{cases}x - y - 2z + 2 = 0 & (1)\\ y - 2z + 3 = 0 & (2)\\ x + z = 0 & (3)\end{cases}$$

et constitué des équations des trois plans P_1, P_2 et P_3.

Nous avons les systèmes équivalents suivants:

$$\begin{cases}x - y - 2z = -2\\ y - 2z = -3\\ x + 3z = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x - y - 2z = -2\\ y - 2z = -3\\ 3z = 3\end{cases}$$

$3z = 3 \Longrightarrow z = 1$

$y - 2z = -3 \Longrightarrow y = -1$

$x - y - 2z = -2 \Longrightarrow x = -1$

Le point d'intersection Ω est le point de coordonnées (−1 ; −1 ; 1).

3-a) Rayon de la sphère S.

La sphère S est la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD. Le rayon R est défini par:

$R = \Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$

Déterminons ΩA

$\Omega A = \sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11}$

Nous avons $R = \sqrt{11}$

b) Equation cartésienne de la sphère S.

Nous savons que $S = \{M \in \mathcal{E} / \Omega M = R\}$

$$\Omega M = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2} = R$$

En élevant les deux membres au carré, nous avons:

$(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 11$

$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 - 11 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 2z - 8 = 0$

La sphère S a pour équation:

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 2z - 8 = 0$

EXERCICE II

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. D est une droite de l'espace définie par:

$$(D) \begin{cases}x = 2 - 3\alpha\\ y = [illegible]\\ z = [illegible]\end{cases}$$

1) Déterminer une représentation

P' passe par B(1, 2, -1) et est engendré par $\vec{e}_3\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{e}_4\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

Pour tout point M du plan P', nous savons qu'il existe deux réels a et b tels que :

$\vec{BM} = a.\vec{e}_3 + b.\vec{e}_4$ avec $\vec{BM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z+1\end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z+1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$$

Nous avons le système suivant:

$$\begin{cases} x-1=b & (1)\\ y-2=-a & (2)\\ z+1=a+4b & (3)\end{cases}$$

Multiplions l'équation (1) par -4; le système devient:

$$\begin{cases} -4x+4=-4b\\ y-2=-a\\ z+1=a+4b\end{cases}$$

Par addition membre à membre, nous avons: $-4x+y+z+3=0$

P' est le plan d'équation

$-4x+y+z+3=0$

Soit D la droite d'intersection de P et P'; D est la solution du système:

$$\begin{cases} x+2y+z-6=0\\ -4x+y+z+3=0\end{cases}$$

Soit $\vec{e}$ le vecteur directeur de la droite D. $\vec{e}$ vérifie les équations vectorielles des plans c'est-à-dire le système:

$$\begin{cases} x+2y+z=0\\ -4x+y+z=0\end{cases}$$

Pour résoudre ce système, fixons x; le système devient:

$$\begin{cases} 2y+z=-x & (1)\\ y+z=4x & (2)\end{cases}$$

(1) + (-2) nous donne $y=-5x$.

En remplaçant y par sa valeur dans la deuxième équation, nous avons: $z=9x$.

Pour tout (x, y, z) vecteur de $\vec{D}$, nous avons

On prend $\vec{e}\begin{pmatrix}1\\-5\\9\end{pmatrix}$

Déterminons ensuite un point C par lequel passe la droite D, les coordonnées de C sont solution du système

$$\begin{cases} x+2y+z-6=0 & (1)\\ -4x+y+z+3=0 & (2)\end{cases}$$

Fixons x pour résoudre ce système; il devient:

$$\begin{cases} 2y+z=6-x & (1)\\ y+z=4x-3 & (2)\end{cases}$$

En multipliant la deuxième équation par -1, nous avons: $y=-5x+9$

Remplaçons y par sa valeur dans la deuxième équation; cela nous donne: $z=9x-12$

x est supposé connu, en particulier pour $x=1$, nous avons $y=4$ et $z=-3$ alors C est le point de coordonnées (1, 4, -3).

Représentation paramétrique de la droite D:

Nous savons que:

$D=\{M\in\mathcal{E} \;/\; \exists a\in\mathbb{R},\ \vec{CM}=a\vec{e}\}$

$\vec{CM}\begin{pmatrix}x-1\\y-4\\z+3\end{pmatrix}$

$$\vec{CM}=a\vec{e} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y-4\\z+3\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\-5\\9\end{pmatrix}$$

Nous obtenons le système suivant:

$$\begin{cases} x=a+1\\ y=-5a+4\\ z=9a-3\end{cases}$$ qui est une représentation paramétrique cherchée de la droite D (a est le paramètre).

EXERCICE 9

ABCD est un tétraèdre, on désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes [AB] et [CD], par G l'isobarycentre des points A, B, C et D et par A' le centre de gravité du triangle BCD.

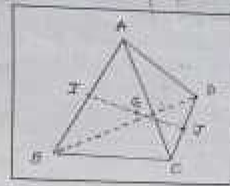
1) Montrer que $\vec{AG}=\frac{3}{4}\vec{AA'}$

2) Montrer que G est l'isobarycentre des points I et J.

3) Définition: Le point G est appelé centre de gravité du tétraèdre ABCD.

SOLUTION

Faisons l'esquisse du dessin.



1) Montrons que $\vec{AG}=\frac{3}{4}\vec{AA'}$

Nous savons que G est l'isobarycentre des points A, B, C et D; cela nous donne:

$\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}+\vec{GD}=\vec{0}$ (1)

A' est le centre de gravité du triangle BCD, nous avons:

$\vec{A'B}+\vec{A'C}+\vec{A'D}=\vec{0}$ (2)

Dans la relation (1) introduisons le point A en utilisant la relation de Chasles; nous avons:

$\vec{GA}+\vec{GA}+\vec{AB}+\vec{GA}+\vec{AC}+\vec{GA}+\vec{AD}=\vec{0}$

$\Rightarrow 4\vec{GA}+\vec{AB}+\vec{AC}+\vec{AD}=\vec{0}$

Introduisons en utilisant la relation de Chasles A' dans les trois derniers termes.

Nous avons

$4\vec{GA}+\vec{AA'}+\vec{A'B}+\vec{AA'}+\vec{A'C}+\vec{AA'}+\vec{A'D}=\vec{0}$

$\Rightarrow 4\vec{GA}+3\vec{AA'}+\vec{A'B}+\vec{A'C}+\vec{A'D}=\vec{0}$

D'après la relation (2), nous savons que $\vec{A'B}+\vec{A'C}+\vec{A'D}=\vec{0}$; d'où, nous avons:

$4\vec{GA}+3\vec{AA'}=\vec{0}$

$\Rightarrow -4\vec{GA}=3\vec{AA'} \Rightarrow \vec{AG}=\frac{3}{4}\vec{AA'}$

2) Montrons que G est l'isobarycentre des points I et J.

Nous savons que I et J sont respectivement les milieux des segments [AB] et [CD]; ce qui nous donne les relations vectorielles suivantes:

$\vec{IA}+\vec{IB}=\vec{0}$ et $\vec{JC}+\vec{JD}=\vec{0}$

Nous allons introduire dans chacune de ces relations le point G en utilisant la relation de Chasles:

$\vec{IG}+\vec{GA}+\vec{IG}+\vec{GB}=\vec{0}$

$\vec{JG}+\vec{GC}+\vec{JG}+\vec{GD}=\vec{0}$

Par addition membre à membre, nous avons:

$2\vec{IG}+2\vec{JG}+\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}+\vec{GD}=\vec{0}$

Or $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}+\vec{GD}=\vec{0}$ car G

l'isobarycentre des points A, B, C et D;

D'où $2\vec{IG}+2\vec{JG}=\vec{0}$

Ce qui nous donne $\vec{GI}+\vec{GJ}=\vec{0}$ qui est la définition de G isobarycentre des points I et J.

EXERCICE 10

ABCD est un tétraèdre tel que:

A(0, 0, 4); B(2, -2, 0), C(0, 2, 0) et D(-4, 0, 0).

1) On appelle I, J et K les milieux respectifs des arêtes [AB], [AC], [AD]; P_1, P_2 et P_3 les plans médiateurs respectifs de ces arêtes.

a) Calculer les coordonnées des points I, J, K puis les composantes des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$.

b) Déterminer une équation cartésienne de chacun des plans P_1, P_2 et P_3.

2) Démontrer que ces plans ont un et un seul point commun Ω dont on calculera les coordonnées.

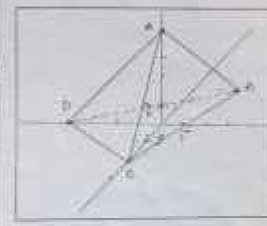
3) On appelle $\mathcal{S}$ la sphère de centre Ω et qui passe par les sommets A, B, C et D du tétraèdre.

a) Calculer le rayon de la sphère $\mathcal{S}$.

b) Déterminer une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$.

SOLUTION

Nous allons représenter le tétraèdre ABCD dans l'espace.



1-a) Coordonnées des points I, J et K.

Nous savons que I est le milieu de [AB]. Supposons que l'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Nous avons $\vec{OI}=\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OB})$

$x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=1$; $y_I=\frac{y_A+y_B}{2}=-1$

Remarque :

On peut aussi montrer que si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D_1 et $\vec{n}$ le vecteur normal de P alors, $\vec{u}.\vec{n} = 0$

Déterminons les coordonnées de A.

Soit $A(x_0, y_0, z_0)$

$$A \in D_1 \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} A \in D_1 \\ A \in P \end{cases}$$

$$A \in D_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 - 2k \\ y_0 = 2k \\ z_0 = 2 - 3k \end{cases}$$

$A \in P \Leftrightarrow 2x_0 + y_0 - 2z_0 - 4 = 0$

En remplaçant x_0, y_0 et z_0 par leur valeur dans l'équation du plan, nous avons: $k = \frac{2}{3}$

Nous avons alors:

$x_0 = \frac{2}{3}$; $y_0 = \frac{4}{3}$ et $z_0 = 0$

2) Montrons que D_2 et P sont strictement parallèles.

Appelons B un point de D_2 et $\vec{e}_2$ son vecteur directeur, nous avons: $B\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ $\vec{e}_2\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$

Nous allons montrer que $\vec{e}_2$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires et que le point B n'appartient pas à P.

Pour ce faire, déterminons deux réels α et β tels que $\vec{e}_2 = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

$$\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\-2\alpha-2\beta\\\beta\end{pmatrix}$$

Nous obtenons le système suivant:

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ -2\alpha - 2\beta = -2 \\ \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha + \beta = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

On prend $\alpha = -1$ et $\beta = 2$

$\vec{e}_2 = -\vec{u} + 2\vec{v}$

Les vecteurs $\vec{e}_2$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.

Montrons ensuite que B n'est pas élément de P.

Il suffit de montrer que les coordonnées de B ne vérifient pas l'équation du plan P.

$2(1) + (2) + 2(1) - 4 = 2 + 2 + 2 - 4 \neq 0$

$B \notin P$

Nous pouvons dire que D_2 et P sont strictement parallèles.

3) Equation cartésienne de P'.

P' passe par $A\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 0\right)$ et est perpendiculaire à P. Tout vecteur de P' est orthogonal à tout vecteur de P en particulier au vecteur $\vec{u}$ de P.

Pour tout point M(x, y, z) de P' nous avons $\vec{AM}.\vec{u} = 0$

$$\vec{AM}\begin{pmatrix} x - \frac{2}{3} \\ y - \frac{4}{3} \\ z \end{pmatrix}$$

$\vec{AM}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right) - 2\left(y - \frac{4}{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2y + 2 = 0$

P' a pour équation $x - 2y + 2 = 0$

EXERCICE 8

$\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de dimension 3.

On donne A(3, 2, 5) et B(1, 2, -4) deux points de l'espace:

$\vec{e}_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{e}_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{e}_3\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{e}_4\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$ sont quatre vecteurs de l'espace.

P est le plan passant par A et engendré par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$; P' est le plan passant par B et engendré par $\vec{e}_3$ et $\vec{e}_4$.

1) Vérifier que P et P' sont sécants.

2) Donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

SOLUTION

1) Vérifions que P et P' sont sécants.

Pour vérifier cela, il suffit de montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ou $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_4)$ est une famille libre.

Montrons que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une famille libre.

Montrons que pour tous réels a, b, c, on a:

Supposons $a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = \vec{0}$ et montrons que $a = b = c = 0$.

$a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow a\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a - 2b \\ -a + b - c \\ a + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Nous obtenons le système suivant:

$$\begin{cases} a - 2b = 0 & (1) \\ -a + b - c = 0 & (2) \\ a + c = 0 & (3) \end{cases}$$

L'équation (1) nous donne $b = \frac{1}{2}a$

l'équation (3) nous donne $c = -a$

En remplaçant b et c par leur valeur dans l'équation (2), nous avons:

$-a + \frac{1}{2}a + a = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}a = 0 \Rightarrow a = 0$

Puisque $a = 0$ nous avons $b = c = 0$.

Nous pouvons dire que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une famille libre, donc que les plans P et P' sont sécants.

Remarque

Bien que le déterminant soit hors programme, On pouvait, à titre de curiosité montrer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une famille libre en montrant que : $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \neq 0$.

$$\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

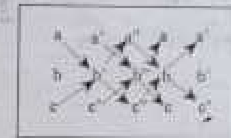
$= 1 - 2 + 2 = 1 \neq 0$

Nous saisissons ainsi l'occasion pour montrer à nos lecteurs comment calculer le déterminant d'ordre 3 par la méthode de SARRUS.

Considérons les vecteurs suivants:

$\vec{e}_1\begin{pmatrix}a\\a'\\a''\end{pmatrix}$; $\vec{e}_2\begin{pmatrix}b\\b'\\b''\end{pmatrix}$; $\vec{e}_3\begin{pmatrix}c\\c'\\c''\end{pmatrix}$

On se propose de calculer $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par la méthode de SARRUS.



$\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) =$
$= (ab'c'' + a'b''c + a''bc') - (cb'a'' + c'b''a + c''ba')$

2) Représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

Nous savons qu'une droite affine est déterminée par un vecteur directeur et un point.

Nous allons déterminer les équations cartésiennes des plans P et P'.

P passe par A(3, 2, 5) et est engendré par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Pour tout point M du plan P, nous savons qu'il existe deux réels α et β tels que :

$\vec{AM} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$

$$\vec{AM}\begin{pmatrix} x - 3 \\ y - 2 \\ z - 5 \end{pmatrix} ; \vec{e}_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} ; \vec{e}_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x - 3 \\ y - 2 \\ z - 5 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

Nous avons le système suivant:

$$\begin{cases} x - 3 = \alpha - 2\beta & (1) \\ y - 2 = -\alpha + \beta & (2) \\ z - 5 = \alpha & (3) \end{cases}$$

qui est une représentation paramétrique du plan P.

Il s'agit de trouver une relation entre x, y et z indépendante de α et β.

Nous pouvons multiplier la deuxième équation par 2 et additionner membre à membre cela nous donne:

$$\begin{cases} x - 3 = \alpha - 2\beta & (1) \\ 2y - 4 = -2\alpha + 2\beta & (2) \\ z - 5 = \alpha & (3) \end{cases}$$

$x + 2y + z - 8 = 0$

En remplaçant chacun par sa valeur, nous avons:

$x_{AB} = x_B - x_A = -1$

$y_{AB} = y_B - y_A = -1$

$z_{AB} = z_B - z_A = -1$

Donc $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

De la même façon, nous avons:

$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}$ et $\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{AD}\begin{pmatrix}-3\\1\\-5\end{pmatrix}$

2) Composante du vecteur $\vec{u}$.

Nous savons que $\vec{u} = 5\vec{AB} + 2\vec{AC}$ donc en remplaçant $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ par leur valeur, nous avons:

$\vec{u} = 5(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) + 2(\vec{i} + 3\vec{j})$

$= -3\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\\-5\end{pmatrix}$

Les points A, B C et D sont coplanaires si les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ le sont aussi. Cela veut dire que l'un de ces vecteurs est combinaison linéaire des deux autres.

D'après les questions précédentes, nous avons:

$\vec{AD} = 5\vec{AB} + 2\vec{AC}$

Nous pouvons déduire à partir d'ici que les point A, B C et D sont coplanaires.

3) Coordonnées de I et J.

I et J sont milieu respectifs des segments [AB] et [CD].

D'après la définition du milieu d'un segment, nous avons:

$\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ et $\vec{JC} + \vec{JD} = \vec{0}$

On déduit que :

$\vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$

$\vec{OJ} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD})$

$x_I = -\frac{1}{2}; y_I = \frac{1}{2}$ et $z_I = -\frac{1}{2}$

$I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

$x_J = -1; y_J = -3; z_J = -\frac{5}{2}$

points C et D.

4) Déterminons le centre de gravité du tétraèdre ABCD

Appelons G ce point,

Nous avons la relation vectorielle:

$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$

Le centre de gravité est l'isobarycentre des points.

En introduisant l'origine O, nous avons:

$\vec{OG} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$

$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4} = -\frac{3}{4}$

$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} = \frac{7}{4}$

$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} = -\frac{3}{2}$

G est le point de coordonnées:

$\left(-\frac{3}{4}; \frac{7}{4}; -\frac{3}{2}\right)$

EXERCICE 6

D_1 et D_2 sont deux droites de l'espace $\mathcal{E}$ définies par:

$D_1: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $\quad D_2: \begin{cases} x = 2 - 2\mu \\ y = 1 - \mu \\ z = -\mu \end{cases}$

1) Démontrer que D_1 et D_2 sont non coplanaires.

2) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par A(2, 1, 0) et perpendiculaire à D_1

SOLUTION

1) Montrons que D_1 et D_2 sont non coplanaires.

Appelons A un point par lequel passe D_1 et $\vec{u}_1$ son vecteur directeur; nous avons:

A(0, 0, 0) et $\vec{u}_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

De même appelons B un point B par lequel passe D_2 et $\vec{u}_2$ son vecteur directeur, nous avons:

B(2, 1, 0) et $\vec{u}_2\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

Pour que D_1 et D_2 soient non coplanaires, il faut que le vecteur $\vec{AB}$ n'appartiennent pas au libre.

Pour tous a, b, c trois réels donnés

$a\vec{AB} + b\vec{u}_1 + c\vec{u}_2 = \vec{0}$

$\Rightarrow a = b = c = 0$

Supposons $a\vec{AB} + b\vec{u}_1 + c\vec{u}_2 = \vec{0}$ et montrons que $a = b = c = 0$.

$a\vec{AB} + b\vec{u}_1 + c\vec{u}_2 = \vec{0}$

$\Rightarrow a\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}2a - b - 2c\\a + b - c\\b - c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Nous obtenons le système suivant:

$\begin{cases} 2a - b - 2c = 0 & (1) \\ a + b - c = 0 & (2) \\ b - c = 0 & (3) \end{cases}$

Résolvons ce système:

$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ 2a - b - 2c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c = 0 \\ -3b = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$

$-3b = 0 \Longrightarrow b = 0$

$b - c = 0 \Longrightarrow c = b = 0$

$a + 0 - 0 = 0 \Longrightarrow a = 0$

Nous pouvons dire que les droites D_1 et D_2 sont non coplanaires.

2) Equation cartésienne du plan P.

P passe par A et est perpendiculaire à D_1. Tout vecteur de P est orthogonal à tout vecteur de D_1.

Nous avons pour tout point M de P,

$\vec{AM}.\vec{u}_1 = 0$ où $\vec{u}_1$ est un vecteur directeur de D_1.

$\vec{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{AM}.\vec{u}_1 = 0 \Longrightarrow -1(x - 2) + 1(y - 1) + z = 0$

$\Longrightarrow -x + y + z + 1 = 0$

Nous pouvons dire que P est le plan d'équation $-x + y + z + 1 = 0$

représentations paramétriques:

$D_1: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases}$ $\quad D_2: \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 2 - 2\mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases}$

P est le plan d'équation:

$2x + y + 2z - 4 = 0$

1-a) Démontrer que D_1 et P sont sécants

1-b) Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection A.

2) Démontrer que D_2 et P sont strictement parallèles.

3) Déterminer une équation cartésienne du plan P' qui passe par A et est perpendiculaire à P.

SOLUTION

1-a) Montrons que D_1 et P sont sécants.

Appelons $\vec{u}_1$ un vecteur directeur de D_1, $(\vec{u}, \vec{v})$ une base du plan P.

Nous allons montrer que les vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas coplanaires.

Il suffit donc de montrer que le système $(\vec{u}_1, \vec{u}, \vec{v})$ est libre.

Nous avons:

$\vec{u}_1\begin{pmatrix}-3\\2\\-3\end{pmatrix}$; $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$

Montrons que pour tous réels a, b, c, on a:

$a\vec{u}_1 + b\vec{u} + c\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow a = b = c = 0$

Supposons $a\vec{u}_1 + b\vec{u} + c\vec{v} = \vec{0}$ et montrons que $a = b = c = 0$.

$a\vec{u}_1 + b\vec{u} + c\vec{v} = \vec{0}$

$\Rightarrow a\begin{pmatrix}-3\\2\\-3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}-3a + b\\2a - 2b - 2c\\-3a + c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Nous obtenons le système suivant:

$\begin{cases} -3a + b = 0 & (1) \\ 2a - 2b - 2c = 0 & (2) \\ -3a + c = 0 & (3) \end{cases}$

L'équation (1) nous donne $b = 3a$

l'équation (3) nous donne $c = 3a$

En remplaçant b et c par leur valeur dans l'équation (2) simplifiée, nous avons:

$-4a = 0 \Longrightarrow a = 0$

Puisque $a = 0$ nous avons $b = c = 0$