CEBER,
Département de Mathématiques
classe : $1^{ère}$ F_3
Enseignant : BISSONO Nicolas

Ydé le 8 Mars 2020

THEME : GEOMETRIE METRIQUE DU PLAN.

(1) Distance d'un point à une droite

Propriété : soit $A(x_0, y_0)$ un point du plan
(D) une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$
La distance de A à (D) est :

$$d(A, D) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ex. : Soit $A\binom{2}{-3}$ un point du plan et $(D): 2x-y+5=0$. Calculer la distance du point A à la droite (D).

solution

$(D): 2x-y+5=0$ $a=2$, $b=-1$ et $c=5$; $x_0=2$ et $y_0=-3$.

$$d(A,D) = \frac{|2(2)-1(-3)+5|}{\sqrt{4+1}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

(2) Cercles

a) Représentation paramétrique d'un cercle

Soit (C) le cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon r.
Déterminons une équation cartésienne de (C) :
soit $M(x;y)$ un point de (C) :

$$\Omega M = r \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2$$
$$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$

Cette dernière relation est une équation cartésienne de (C).

$$\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \text{ ou } t \in]-\pi, \pi] \text{ et } r > 0$$

Ce système est appelé représentation paramétrique de (C). (le paramètre est t).

ex. : Soit (C) le cercle de centre $I(-2;1)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.
Une représentation paramétrique de (C) est $\begin{cases} x = -2 + 2\sqrt{2}\cos t \\ y = 1 + 2\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

b) Tangente en un point d'un cercle

(C) est le cercle d'équation : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ et $A(x_0,y_0)$ un point de (C). L'équation cartésienne (mieux : une équation cartésienne) de la tangente à (C) en A est :

$$xx_0+yy_0-a(x+x_0)-b(y+y_0)+c=0$$

Exemple : 1) Justifier que le point $A(4;1)$ est situé sur le cercle (C) dont une équation cartésienne est : $x^2+y^2-2x-6y-3=0$

2) Déterminer une équation de la tangente au cercle (C) en A.

Solution

1) $A(4,1)$ $(C) : x^2+y^2-2x-6y-3=0$

$(4)^2+(1)^2-2(4)-6(1)-3=17-17=0$

donc $A\in(C)$.

2) Déterminons une équation de la tangente au cercle (C) en A.

Elle est donnée par : $xx_0+yy_0-a(x+x_0)-b(y+y_0)+c=0$

soit : $4x+y-(x+4)-3(y+1)-3=0 \Leftrightarrow 3x-2y-10=0$

$(T_A) : 3x-2y-10=0$.

Exercice 1 : Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

$A(2,-1)$ et $B(-2,3)$ sont deux points du plan.

1- a) Ecrire une équation cartésienne du cercle (C) de diamètre [AB].

b) Déterminer le centre Ω et le rayon R du cercle (C).

2- $E(-1;-1)$ et $F(1;0)$ sont deux points du plan.

a) Ecrire une équation paramétrique de la droite (D) qui passe par E et F. En déduire une équation cartésienne de (D).

b) Calculer la distance de Ω à (D) et en déduire la position relative de (C) et (D).

3- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) et (D).

4- Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) en A.

Exercice 2 ; 1) Vérifier que les égalités $x^2+y^2-2x-4y=0$ et $x^2+y^2+2x+4y-20=0$ sont les équations de deux cercles (C) et (C') dont on donnera les éléments caractéristiques.

2) Démontrer que (C) et (C') sont sécants en deux points A et B que l'on précisera.

3) Vérifier que le point de coordonnées (3, 1) appartient à (C), puis écrire une équation de la tangente (T) à (C) en ce point.

4) Montrer que la droite (T) coupe le cercle (C') en deux points que l'on précisera.

5) Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan, représenter (C), (C') et (T). (*Unité sur les axes : 0,5 cm*).

6) k étant un nombre réel quelconque, on admet que $x^2+y^2-2kx-4ky+10(k-1)=0$ est l'équation d'un cercle (C_k).

- Montrer que $\forall k\in\mathbb{R}$, (C_k) passe par les points de coordonnées (3, 1) et (-1, 3)