

IV - Paramètres de position d'une série statistique

1 - Le mode

Le mode d'une série statistique est la modalité ou valeur correspondant à la plus grande fréquence (absolue ou relative).

Remarques:

R₁ - Si la série statistique est à caractère continu (données groupées en classes) on parlera de **classe modale** $[x_i; x_{i+1}[$ et le mode sera $M_0 = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$

R₂ - une série qui a plusieurs modes est dite **plurimodale**.

2 - La médiane

La médiane d'une série statistique est la modalité qui partage la série en deux parties d'égal effectif.

a - Cas d'un caractère discret

Elle est obtenue en classant les données (ou observations) dans un ordre croissant ou décroissant.

- Si le nombre total des données est **impair**, la médiane sera la modalité de rang $\frac{n+1}{2}$ ($n \in \mathbb{N}$)

Exemple: notes obtenus par les élèves d'une classe à un devoir: 14; 9; 11; 10; 8; 9; 16; 13; 15.
on aura:

8; 9; 9; 10; 11; 13; 14; 15; 16
Médiane (M_e)

- Si le nombre total des modalités est **pair**, la médiane sera la demi-somme des termes de rang $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2} + 1$

Exemple: soit la série des notes 14; 12; 7; 9; 14; 10; 12; 6
on a:

6; 7; 9; 10; 12; 12; 14; 14

$$M_e = \frac{10 + 12}{2} = 11$$

b - Cas d'un caractère continu.

La médiane sera obtenue par une interpolation linéaire (on se servira des fréquences cumulées):

Exemple:

considérant le relevé des montants des achats effectués dans un magasin de jouets comme l'illustre le tableau ci-dessous:

Dépenses en 10 ² FCFA	Effectifs n_i	Effectifs cumulés croissants
[0 - 50[9	9
[50 - 100[16	25
[100 - 150[20	45
[150 - 200[12	57
[200 - 250[3	60
Total	60	

On aura :

$$\frac{\sum n_i}{2} = \frac{60}{2} = 30 \quad \text{et}$$

$$25 < 30 < 45 \implies 100 < Me < 150$$

$$\frac{Me - 100}{150 - 100} = \frac{30 - 25}{45 - 25} \iff \frac{Me - 100}{50} = \frac{5}{20}$$

$$\iff Me - 100 = 50 \frac{5}{20}$$

$$\iff Me = 100 + 50 \frac{5}{20}$$

$$\iff Me = 100 + 12,5$$

La médiane est $Me = 112,5 \times 10^2$ FCFA.

3 - Les quartiles

Les quartiles sont les modalités (valeurs) qui partagent la série en quatre parties d'égal effectif.

- **Premier quartile (Q_1)** c'est la modalité dont 25% (ou $\frac{1}{4}$) des modalités lui sont inférieures.

- **Deuxième quartile (Q_2)** c'est la modalité dont 50% des modalités lui sont inférieures. on a $Q_2 = Me$

- **Troisième quartile (Q_3)** c'est la modalité dont 75% ($\frac{3}{4}$) des modalités lui sont inférieures.

Exercice! Considérant la série des dépenses en achat des jouets ci-dessus, déterminer le premier et le troisième quartiles de cette série.

* **Pour solution**

- Premier quartile (Q_1)

$$\frac{\sum n_i}{4} = \frac{60}{4} = 15$$

$$9 < 15 < 25 \implies 50 < Q_1 < 100$$

$$\implies \frac{Q_1 - 50}{100 - 50} = \frac{15 - 9}{25 - 9}$$

$$Q_1 - 50 = 50 \cdot \frac{6}{16} \Rightarrow Q_1 = 50 + 18,75$$

$$\Rightarrow Q_1 = 68,75 \times 10^2 \text{ F}$$

- Troisième quartile Q_3

$$3 \sum_{i=4}^5 n_i = 60 \times 3 = 45$$

$$45 \leq 45 < 57 \Rightarrow 150 \leq Q_3 < 200$$

$$\Rightarrow \frac{Q_3 - 150}{50} = \frac{45 - 45}{57 - 41}$$

$$\Rightarrow Q_3 - 150 = 50 \times \frac{0}{12}$$

$$\Rightarrow Q_3 - 150 = 0$$

$$\Rightarrow Q_3 = 150 \cdot 10^2 \text{ F}$$

4- Moyenne arithmétique

a) Définition: On appelle moyenne arithmétique des n nombres, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ le nombre noté \bar{x} tel que

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

b) Moyenne arithmétique pondérée - cas d'un caractère discret

La moyenne arithmétique de la série (x_i, m_i) est

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

- Cas d'un caractère continu

Elle est obtenue en remplaçant dans la formule ci-dessus les x_i par les c_i (centre de classe).

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i c_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

V Paramètres de dispersion d'une série statistique

1- étendue

On appelle ainsi, pour une série statistique donnée, la différence entre la plus grande et la plus petite des modalités

2. Écart interquartile

on appelle **écart (ou intervalle) interquartile**, la différence entre le quartile Q_3 et le quartile Q_1 .
NB: l'intervalle $Q_3 - Q_1$ contient la moitié des modalités et supprime les valeurs extrêmes qui sont parfois accidentelles.

3 - Variance - Ecart-type

a) variance

on appelle **variance (ou fluctuation)** d'une série statistique, la moyenne arithmétique des carrés des écarts à la moyenne \bar{x} .
on note: $\text{Var}(x)$ ou σ_x^2 .

$$\text{Var}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad \text{ou} \quad \text{Var}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n m_i} - \bar{x}^2$$

(Formule réduite)

b) Ecart-type

on appelle **écart-type** de la série statistique (x_i, m_i) (ou (c_i, m_i)) la racine carrée de la variance. on note σ_x .

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n m_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n m_i}} \quad \text{ou} \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n m_i} - \bar{x}^2}$$

Exercice:

on a recensé dans la région du Nord, les superficies des champs de coton, au cours d'une saison. Les résultats obtenus sont donnés par le tableau ci-dessous.

Superficie en ha	[2 - 4[[4 - 8[[8 - 10[[10 - 16[[16 - 20[
Nombre de champs	4	12	10	9	10

1. Déterminer la superficie moyenne.
2. calculer la variance et l'écart-type de cette série.
3. Le ministère de l'agriculture et du développement rural décide d'accorder des subventions aux exploitants dont les superficies sont supérieures ou égales à 8 ha.
Déterminer le pourcentage des bénéficiaires.

Solution.

Tableau statistique.

Superficie en ha	Effectif	c_i	$c_i m_i$	c_i^2	$m_i c_i^2$
[2 - 4 [4	3	12	9	36
[4 - 8 [12	6	72	36	432
[8 - 10 [10	9	90	81	810
[10 - 16 [9	15	135	225	2025
[16 - 20 [10	18	180	324	3240
Total	45		471		5769

1. Superficie moyenne

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m c_i m_i}{\sum m_i} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{471}{45} = 10,46$$

$$\bar{x} = 10,46 \text{ ha}$$

2. Variance et Ecart-type

- Variance

$$\text{Var}(x) = \frac{\sum m_i c_i^2}{\sum m_i} - \bar{x}^2 \Leftrightarrow \text{Var}(x) = \frac{5769}{45} - 10,46^2$$

$$\Leftrightarrow \text{Var}(x) = 128,2 - 109,4116$$

$$= 18,7884$$

$$\text{Var}(x) = 18,7884$$

- Ecart-type

$$\sigma_x = \sqrt{\text{Var}(x)} \Leftrightarrow \sigma_x = \sqrt{18,7884}$$

$$\sigma_x = 4,33$$

3. Pourcentage des bénéficiaires de la subvention

- nombre d'exploitations concernées

$$m = 10 + 9 + 10 = 29$$

- Pourcentage des bénéficiaires

$$k = \frac{m}{45} \times 100 \Leftrightarrow k = \frac{29}{45} \times 100 = 64,44\%$$