NB: Une suite est monotone sur un intervalle I, ssi :
- Elle est strictement croissante sur I
ou
- Elle est strictement décroissante sur I.

3. Somme des n premiers termes d'une suite géométrique

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} = n u_0 \text{ si } q = 1$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \frac{1-q^n}{1-q}$$

NB: Si le premier terme est u_1 et la raison q, alors

$$S_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q} \text{ ou } S_n = u_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$$

Exercice :

On considère la suite (u_n) définie $u_0 = \frac{3}{5}$ et par la relation de récurrence $6u_{n+1} = u_n - 3$

1. On pose $V_n = 5u_n + 3$. Montrer que (V_n) est une suite géométrique.
2. Exprimer V_n en fonction de n.
3. Calculer la somme des 6 premiers termes de la suite (V_n).

Solution :

$u_0 = \frac{3}{5}$ et $6u_{n+1} = u_n - 3 \iff u_0 = \frac{3}{5}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n - 3}{6}$

1. Nature de la suite (V_n)

$$V_0 = 5u_0 + 3 = 5 \cdot \frac{3}{5} + 3 = 6$$

$$V_{n+1} = 5u_{n+1} + 3$$
$$= 5 \frac{u_n - 3}{6} + 3$$
$$= [5u_n - 15 + 18] \frac{1}{6}$$
$$= (5u_n + 3) \frac{1}{6}$$
$$= \frac{1}{6} V_n$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{1}{6}$$

(V_n) est une suite géométrique de premier terme $V_0 = 6$ et de raison $q = \frac{1}{6}$.

2. Expression de V_n en fonction de n.

$$V_n = V_0 q^n \iff V_n = 6\left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{1}{6^{n-1}}$$

$$V_n = \frac{1}{6^{n-1}}$$

3. Somme des 6 premiers termes de la suite (V_n).

$$S_6 = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5$$

$$= V_0 \frac{q^6 - 1}{q - 1}$$

$$= 6 \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^6 - 1}{\frac{1}{6} - 1}$$

$$= 6 \frac{\frac{1}{6^6} - 1}{\frac{1-6}{6}}$$

$$= 6 \frac{\frac{1-6^6}{6^6}}{-\frac{5}{6}}$$

$$= 6 \times \frac{1-6^6}{6^6} \times \left(-\frac{6}{5}\right)$$

$$= -\frac{1-6^6}{5 \times 6^4}$$

$$= -\frac{1-46656}{5 \times 1296}$$

$$= -\frac{-46655}{5 \times 1296}$$

$$= \frac{9331}{1296}$$

4. Convergence d'une suite géométrique.

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme U_0 telle que

$$U_n = U_0 q^n.$$

Propriétés

P_1 - Si $|q| < 1$, alors $q^n \to 0$ quand $n \to +\infty$
la suite (u_n) converge vers 0

P_2 - Si $|q| > 1$, alors $q^n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$
La suite (u_n) est divergente.

P_3 - Si $|q| = 1$ c'est à dire $q = 1$ ou $q = -1$,

* pour $q = 1$, $u_n = u_0 q^n = u_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
La suite (u_n) est stationnaire

* Pour $q = -1$, $u_n = -u_0$ ou $u_n = u_0$
selon que n est impaire ou paire.
La suite (u_n) est divergente.