CLASSE : PF3-B DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

CORRIGE TD1

EXERCICE 1

Soit la suite (U_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$

1- Calcul des termes u_1, u_2, u_3 et u_4

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 1 = \frac{1}{2} \times (-1) + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

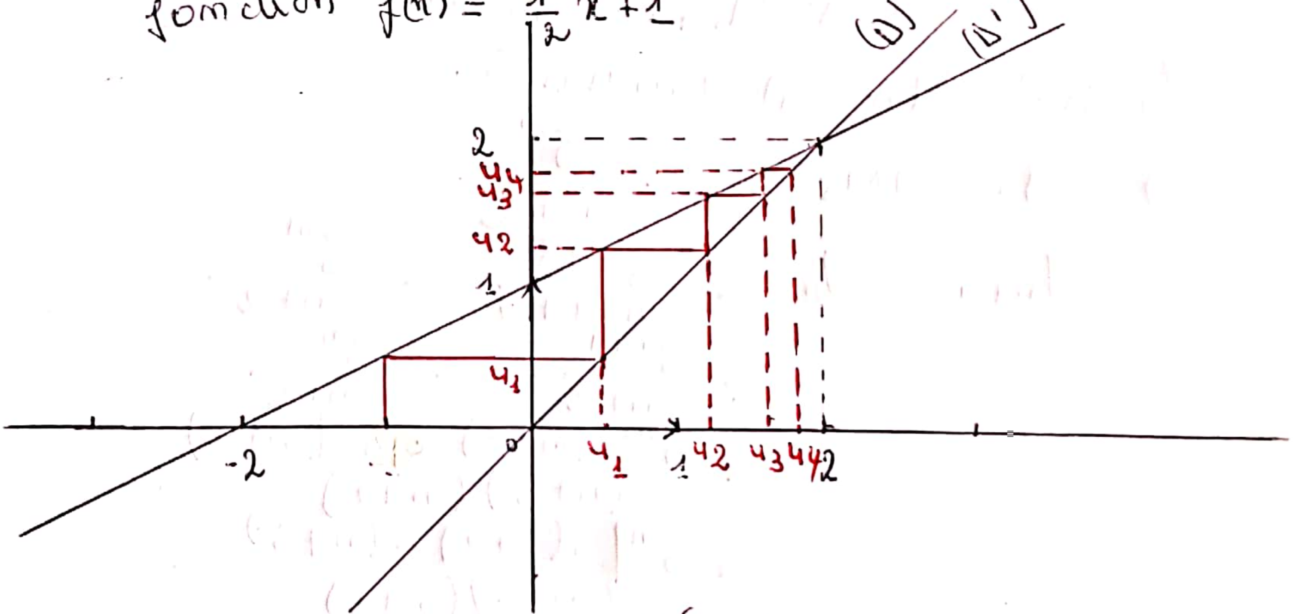
$$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$u_3 = \frac{1}{2}u_2 + 1 = \frac{1}{2} \times \frac{5}{4} + 1 = \frac{5}{8} + 1 = \frac{13}{8}$$

$$u_4 = \frac{1}{2}u_3 + 1 = \frac{1}{2} \times \frac{13}{8} + 1 = \frac{13}{16} + 1 = \frac{29}{16}$$

2- Détermination graphique des termes de la suite (U_n).

En posant $u_n = x$, on représente graphiquement la droite (D) : d'équation $y = x$ et la courbe (D') de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$



3- Croissance de la suite (U_n).

De la question (1) on constate que

$$u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4$$

De plus
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n$$
$$= \frac{1}{2}u_n - u_n + 1$$
$$= -\frac{1}{2}u_n + 1$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{2}u_n + 1 > 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$

La suite (U_n) est croissante

Exercice 2

Etude du sens de variation des suites

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \dfrac{3n-2}{4n+5}$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3(n+1)-2}{4(n+1)+5} - \frac{3n-2}{4n+5}$$

$$= \quad = \frac{3n+1}{4n+9} - \frac{3n-2}{4n+5}$$

$$= \frac{(3n+1)(4n+5) - (4n+9)(3n-2)}{(4n+9)(4n+5)}$$

$$= \frac{12n^2 + 15n + 4n + 5 - 12n^2 + 8n - 27n + 18}{(4n+9)(4n+5)}$$

$$= \frac{23}{(4n+9)(4n+5)}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $4n+9 > 0$ et $4n+5 > 0 \Rightarrow \dfrac{23}{(4n+9)(4n+5)} > 0$

soit $U_{n+1} - U_n > 0$

La suite (U_n) est croissante.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = \dfrac{3^n}{n+2}$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{3^{n+1}}{n+1+2} - \frac{3^n}{n+2}$$

$$= \frac{3^{n+1}}{n+3} - \frac{3^n}{n+2}$$

$$= \frac{3^{n+1}(n+2) - 3^n(n+3)}{(n+3)(n+2)}$$

$$= \frac{3^n[3(n+2) - (n+3)}{(n+3)(n+2)}$$

$$= \frac{3^n(3n+6-n-3)}{(n+3)(n+2)}$$

$$= \frac{3^n(2n+3)}{(n+3)(n+2)}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{3^n(2n+3)}{(n+3)(n+2)} > 0 \Rightarrow V_{n+1} - V_n > 0$

La suite (V_n) est croissante.

3- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} W_0 = -3 \\ W_{n+1} = -2 + W_n \end{cases}$

$W_{n+1} - W_n = -2 + W_n - W_n$
$= -2$

$-2 < 0 \Rightarrow W_{n+1} - W_n < 0$, la suite (W_n) est décroissante.

CORRIGE TD2

EXERCICE 1:

1- Calcul de U_1 et de r

(U_n) étant une suite arithmétique, le terme général est $U_n = U_1 + (n-1)r$ et la somme des n premiers terme $S_n = \frac{n}{2}(2U_1 + (n-1)r)$

Ainsi

$\begin{cases} U_{100} = 781 \\ U_1 + U_2 + \dots + U_{100} = 38500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_{100} = 38500 \\ U_{100} = 781 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{100}{2}[2U_1 + (100-1)r] = 38500 \\ U_1 + (100-1)r = 781 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 50(2U_1 + 99r) = 38500 \\ U_1 + 99r = 781 \end{cases}$

En divisant les deux membres de la première égalité par 50, on obtient le système.

$\begin{cases} 2U_1 + 99r = 770 & \times 1 \\ U_1 + 99r = 781 & \times (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} 2U_1 + 99r = 770 \\ -U_1 - 99r = -781 \\ \hline U_1 = -11 \end{array}$

et $U_1 + 99r = 781 \Rightarrow 99r = 781 - U_1$
$= 781 - (-11)$
$= 781 + 11$
$= 792$

$r = \frac{792}{99}$

$r = 8$

2. Plus petite valeur de n pour laquelle $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{100} > 168300$

$$u_1+u_2+\dots+u_{100}>168300 \Leftrightarrow \frac{n}{2}\left(2u_1+(n-1)r\right)>168300$$
$$\Leftrightarrow \frac{n}{2}\left(-22+(n-1)8\right)>168300$$
$$\Leftrightarrow -11n+4(n^2-n)-168300>0$$
$$\Leftrightarrow 4n^2-15n-168300>0$$

or $4n^2-15n-168300=0$

$$\Delta=(-15)^2-4\times4\times(-168300)$$
$$=225+2\,692\,800$$
$$=2.693\,025 \qquad \text{et } \sqrt{\Delta}=15\sqrt{11969}$$

$$n_1=\frac{15-15\sqrt{11969}}{8} \quad \text{et } n_2=\frac{15+15\sqrt{11969}}{8}$$

- Signe de $4n^2-15n-168300$

n	$-\infty$ $\qquad \frac{15-15\sqrt{11969}}{8} \qquad \frac{15+15\sqrt{11969}}{8} \qquad$ $+\infty$
$4n^2-15n-168300$	$+ \quad 0 \qquad\qquad 0 \quad +$

$n\in\mathbb{N}$ et $\frac{15-15\sqrt{11969}}{8}<0$ d'où

$4n^2-15n-168300>0 \Rightarrow n\in\left[\frac{15+15\sqrt{11969}}{8};+\infty\right[$

d'où plus petite valeur $n=208$

EXERCICE 2

1- Calcul de V_1, V_2, V_3 et V_4

$V_0=3$ et $V_{n+1}=\frac{2}{1+V_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, on a:

$$V_1=\frac{2}{1+V_0}=\frac{2}{1+3}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$
$$V_2=\frac{2}{1+V_1}=\frac{2}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{\frac{3}{2}}=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$
$$V_3=\frac{2}{1+V_2}=\frac{2}{1+\frac{4}{3}}=\frac{2}{\frac{7}{3}}=2\times\frac{3}{7}=\frac{6}{7}$$
$$V_4=\frac{2}{1+V_3}=\frac{2}{1+\frac{6}{7}}=\frac{2}{\frac{13}{7}}=2\times\frac{7}{13}=\frac{14}{13}$$

2 - Nature de la suite (W_n) avec $W_n = \frac{V_n - 1}{V_n + 2}$

$W_0 = \frac{V_0 - 1}{V_0 + 2} = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}$

et $W_{n+1} = \frac{V_{n+1} - 1}{V_{n+1} + 2}$

$= \frac{\frac{2}{1+V_n} - 1}{\frac{2}{1+V_n} + 2}$

$= \frac{\frac{1 - V_n}{1+V_n}}{\frac{4+2V_n}{1+V_n}}$

$= \frac{1 - V_n}{4 + 2V_n}$

$= -\frac{1}{2} \frac{V_n - 1}{V_n + 2}$

$= -\frac{1}{2} W_n$

Soit $\frac{W_{n+1}}{W_n} = -\frac{1}{2}$

(W_n) est une suite géométrique de premier terme $W_0 = \frac{2}{5}$ et de raison $q = -\frac{1}{2}$

EXERCICE 3

Chaque vente est en augmentation de 10% sur la précédente $\Leftrightarrow$ si (U_n) est la suite des ventes,

$U_n = U_{n-1} + \frac{10}{100} U_{n-1} = 1{,}1 U_{n-1}$

(U_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1{,}1$ et de premier terme U_1.

1- calcul de U_1

Le montant de la 6ème vente s'élève à 805 255 F $\Leftrightarrow$

$U_6 = 805\ 255$, Or $U_n = U_1 q^{n-1}$

soit $U_6 = 1{,}1^5 U_1 \Rightarrow U_1 = \frac{U_6}{1{,}1^5} = \frac{805\ 255}{1{,}61051}$

$U_1 = 500.000$ FCFA

2- Montant total des ventes depuis le début d'année

$S_6 = U_1 + U_2 + \dots + U_6 = U_1 \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 500\ 000 \frac{1{,}1^6 - 1}{1{,}1 - 1}$

$S_6 = 500\ 000 \times 7{,}71561 = 3\ 857\ 805$ FCFA