CLASSE : PT3-B DISCIPLINE : MATHEMATIQUES

CHAPITRE IX : SUITES NUMERIQUES REELLES

I. Détermination et déterminisation d'une suite

1- Définition

Une suite numérique réelle est une application de IN (ou une partie E de IN) vers IR

Notation :

Si $n \in \mathbb{N}$, l'image $u(n)$ de n par la suite u (application) est notée u_n

u_n est appelé terme général ou terme de rang n de la suite (u_n).

Exemple : $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$n \longrightarrow u_n = 2n + \frac{1}{n}$

2- Détermination d'une suite

a) suite définie par une formule explicite

Le terme général est donné par une formule explicite sous la forme $u_n = f(n)$.

Exemple : $u_n = \frac{n^2 + 2}{n}$, $n \neq 0$

$u_1 = \frac{1^2+2}{1} = 3$

$u_2 = \frac{2^2+2}{2} = 3$

$u_3 = \frac{3^2+2}{3} = \frac{11}{3}$

$u_{n+1} = \frac{(n+1)^2+2}{n+1} = \frac{n^2+2n+3}{n+1}$

$u_{2n} = \frac{(2n)^2+2}{2n} = \frac{4n^2+2}{2n}$

$= \frac{2n^2+1}{n}$

b) Suite définie par une formule récurrente

Les termes de la suite se calculent de proche en proche, chacun étant déterminé en fonction du (ou des) précédent.

Exemple : $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_n = \frac{1}{2} u_{n-1} + 2 \end{cases}$$

$u_1 = \frac{1}{2} u_0 + 2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$

$u_2 = \frac{1}{2} u_1 + 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + 2 = \frac{11}{4}$

$u_3 = \frac{1}{2} u_2 + 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{4} + 2 = \frac{27}{8}$

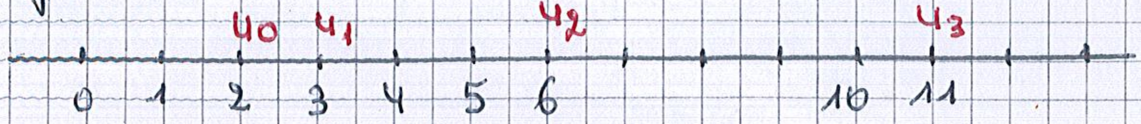
$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 2$

3- Représentation graphique d'une suite

Exemple 1 : $u_n = n^2 + 2$

$u_0 = 2 \qquad u_1 = 3 \qquad u_2 = 6 \qquad u_3 = 11$

Les termes de cette suite sont placés sur une droite graduée comme suit



Exemple 2 : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - 1 \end{cases}$

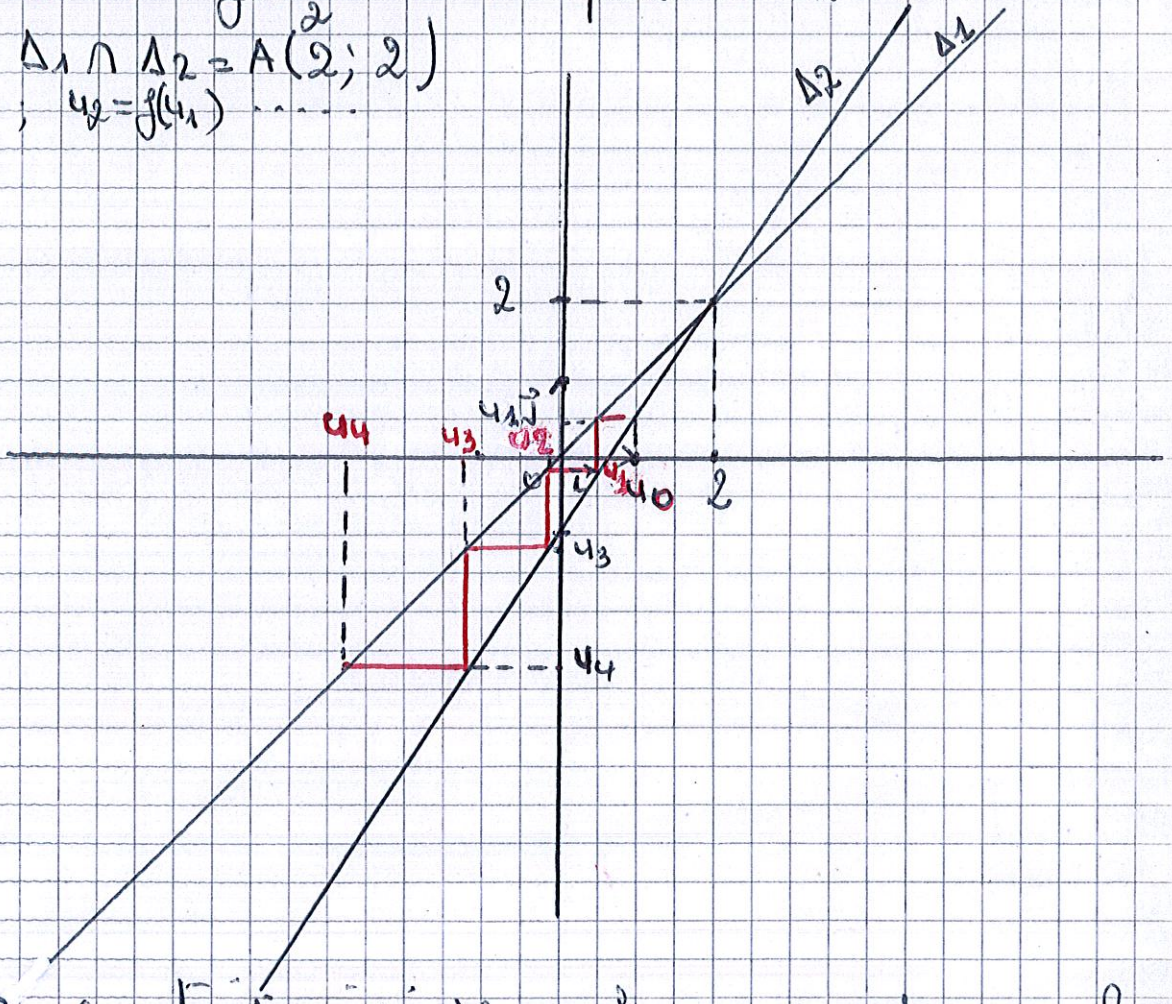
$u_1 = \frac{3}{2}u_0 - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $u_3 = \frac{3}{2}u_2 - 1 = -\frac{3}{8} - 1 = -\frac{11}{8}$

$u_2 = \frac{3}{2}u_1 - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$ $\qquad$ $u_4 = \frac{3}{2}u_3 - 1 = -\frac{33}{16} - 1 = -\frac{49}{16}$

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on représentes les droites Δ_1 et Δ_2 d'équations respective $y = x$ et $y = \frac{3}{2}x - 1$ en posant $u_n = x$

on a $\Delta_1 \cap \Delta_2 = A(2; 2)$

$u_1 = f(u_0)$; $u_2 = f(u_1)$ .....



On construit ainsi de proche en proche sur l'axe (O, x) les termes de la suite (u_n).

4- Sens de variation d'une suite

— une suite (u_n) est strictement croissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$ c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n > 0$

- Une suite (U_n) est strictement décroissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > U_{n+1} \iff U_{n+1} - U_n < 0$
- Une suite (U_n) est constante ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_{n+1} \iff U_{n+1} - U_n = 0$

Activité : Déterminer le sens de variation de la suite (U_n) dans chacun des cas suivants ;

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = 3U_n - 1 \end{cases}$

Solution :

N.B ; Dans chaque cas, on étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$.

a) * Pour $U_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2(n+1)+5}{(n+1)+1} - \frac{2n+5}{n+1}$$

$$= \frac{2n+2+5}{n+2} - \frac{2n+5}{n+1}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+7) - (n+2)(2n+5)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{2n^2+9n+7-2n^2-9n-10}{(n+2)(n+1)}$$

$$= -\frac{3}{(n+1)(n+2)}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)(n+2) > 0 \Rightarrow -\dfrac{3}{(n+1)(n+2)} < 0$

$\Rightarrow U_{n+1} - U_n < 0$

La suite (U_n) est strictement décroissante.

b) $U_1 = 1$
$U_{n+1} = 3U_n - 1$

$U_2 = 3U_1 - 1 = 3 \times 1 - 1 = 2$

$u_3 = 3u_2 - 1 = 3\times 2 - 1 = 5$

$u_4 = 3u_3 - 1 = 3\times 5 - 1 = 14$

et $u_{n+1} - u_n = 3u_n - 1 - u_n$

$= 2u_n - 1$

or $u_n \geqslant 1, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 2u_n - 1 > 0$

soit $u_{n+1} - u_n > 0$

La suite (u_n) est strictement croissante.

II - Suite arithmetique.

1- définition.

Approche : Soit la suite (u_n) definie par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$$

a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5

b) Calculer $u_2 - u_1$; $u_3 - u_2$; $u_4 - u_3$ et $u_5 - u_4$

conclure.

Solution :

a) $u_1 = u_0 + 2 = 3 + 2 = 5$

$u_2 = u_1 + 2 = 5 + 2 = 7$

$u_3 = u_2 + 2 = 7 + 2 = 9$

$u_4 = u_3 + 2 = 9 + 2 = 11$

$u_5 = u_4 + 2 = 11 + 2 = 13$

b) $u_2 - u_1 = 7 - 5 = 2$

$u_3 - u_2 = 9 - 7 = 2$

$u_4 - u_3 = 11 - 9 = 2$

$u_5 - u_4 = 13 - 11 = 2$

Conclusion : $u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = u_5 - u_4 = 2$.

On dit qu'une suite (u_n) definie sur $\mathbb{N}$ est une suite arithmetique si et seulement s'il existe un réel non nul r tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$$

r est appelé raison de la suite (u_n).

Théorème :

Si (u_n) est une suite arithmetique de raison r et de premier terme u_0, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr$$

Exemple : $u_0 = 10$ et $r = 3$,

le terme de rang 100 u_{99} est :

$$u_{99} = u_0 + 99\times 3 = 10 + 99\times 3 = 307$$

Classe PF3 - B

TD 1

Exercice 1 :

Soit la suite numérique (u_n) définie par

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 = -1$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$$

1- Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4

2- Déterminer graphiquement les termes de cette suite

3- Montrer que la suite u_n est croissante

Exercice 2 :

Étudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :

1- $u_n = \dfrac{3n-2}{4n+5}$

2- $v_n = \dfrac{3^n}{n+2}$

3- $\begin{cases} w_0 = -3 \\ w_{n+1} = -2 + w_n \end{cases}$