CEBER
Département de : MATHEMATIQUES

Lundi le 20 . 04 . 2020

Classe : 1ère F3

Enseignant : BISSONO Nicolas
699647586

Corrigé des exercices sur :
GEOMETRIE METRIQUE DU PLAN.

Page 1

**Exercice 1 : 1-a) Equation cartésienne du cercle (C).**
Nous savons que si un point M du plan appartient à (C), alors on a :
$\overline{MA}.\overline{MB}=0$, or $\overline{MA}\binom{2-x}{-1-y}$ et $\overline{MB}\binom{-2-x}{3-y}$, donc

$\overline{MA}.\overline{MB}=0 \Leftrightarrow (2-x)(-2-x)+(-1-y)(3-y)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)+(y+1)(y-3)=0$

$\Leftrightarrow x^2-4+y^2-2y-3=0 \Leftrightarrow \mathbf{(C): x^2+y^2-2y-7=0}$.

**b) Déterminons le centre $\Omega$ et le rayon R de (C).**
Nous savons que si un cercle a pour équation
$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ alors son centre $\Omega$ a pour coordonnées (a, b) et son rayon est égal à $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$. Ainsi, **par identification,**

nous avons : $\begin{cases}-2a=0\\-2b=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}$ et $R=\sqrt{1+7}=2\sqrt{2}$.

**D'où (C) est le cercle de centre $\Omega$ (0, 1) et de rayon R = $2\sqrt{2}$.**

**2-a) Equation paramétrique de (D).**
Par définition, $D=\{M\in P/\exists\alpha\in\mathbb{R}, \overline{EM}=\alpha\overline{EF}\}$.

$\overline{EM}\begin{pmatrix}x+1\\y+1\end{pmatrix}; \overline{EF}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}. \overline{EM}=\alpha\overline{EF} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+1\\y+1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\alpha-1\\y=\alpha-1\end{cases}$.

**Déduisons-en une équation cartésienne de (D).**
Pour avoir une équation cartésienne de (D), nous multiplions la deuxième équation par (-2) et nous les additionnons membre à membre.
**Nous obtenons :** $x-2y-1=0$.

**b) Calculons la distance de $\Omega$ à (D).**

$d(\Omega,D)=\dfrac{|a-2b-1|}{\sqrt{5}}$ avec $\Omega(a,b)$.

Ceci nous donne $d(\Omega,D)=\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. Nous constatons que :

$d(\Omega,D)<R$ où R est le rayon de (C). On peut dire que **la droite (D) et le cercle (C) sont sécants.**

**3- Coordonnées des points d'intersection de(C) et de (D).**
Soit $I(x_0,y_0)\in(C)\cap(D); I\in(C)\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2-2y_0-7=0$ (1).

$I\in(D)\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=2\alpha-1\\y_0=\alpha-1\end{cases}$ (2). En remplaçant $x_0$ et $y_0$ par leurs valeurs dans (1), nous avons :

$(2\alpha-1)^2+(\alpha-1)^2-2(\alpha-1)-7=0\Leftrightarrow 4\alpha^2-4\alpha+1+\alpha^2-2\alpha+1-2\alpha+2-7=0$

$\Leftrightarrow 5\alpha^2-8\alpha-3=0.\quad \Delta=(-8)^2-4(5)(-3)=124=\left(2\sqrt{31}\right)^2$.

$\alpha_1 = \frac{8-2\sqrt{31}}{10} = \frac{4-\sqrt{31}}{5}$ *et* $\alpha_2 = \frac{8+2\sqrt{31}}{10} = \frac{4+\sqrt{31}}{5}$.

Les deux valeurs de $\alpha$ nous permettent d'avoir deux points $I_1$ *et* $I_2$.

Pour $I_1$, *on a* : $\begin{cases} x_0 = 2\alpha_1 - 1 \\ y_0 = \alpha_1 - 1 \end{cases}$ ; *Pour* $I_2$, *on a* : $\begin{cases} x_0 = 2\alpha_2 - 1 \\ y_0 = \alpha_2 - 1 \end{cases}$.

**4- Equation de la tangente (T) à (C) en A.**

Nous savons que si (C) a pour équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ et $A(x_0, y_0)$, alors une équation de la tangente à (C) en A est de la forme : $x_0x + y_0y - a(x + x_0) - (y + y_0) + c = 0$. Dans ce cas, (C) a pour équation $x^2 + y^2 - 2y - 7 = 0$ *et* $A(2,1)$. (T) a pour équation :

$2x - y - (y-1) - 7 = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y - 6 = 0$. **D'où (T) :** $x - y - 3 = 0$.

**__Exercice 2__ : 1) Vérifions que $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ et $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$ sont les équations de deux cercles (C) et (C') dont on précisera les caractéristiques.**

* $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$.

**Donc (C) est le cercle de centre $\Omega(1, 2)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$.**

* $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 - 20 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = 25$.

Donc **(C') est le cercle de centre $\Omega'(-1, -2)$ et de rayon R' = 5.**

**2) Montrons que (C) et (C') sont sécants en deux points A et B que l'on précisera.**

Notons $M(a, b) \in (C) \cap (C')$, on a : $d(M, \Omega) = \sqrt{5}$ et $d(M, \Omega') = 5$.

$\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix} a-1 \\ b-2 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{\Omega' M}\begin{pmatrix} a+1 \\ b+2 \end{pmatrix}$

* $d(M, \Omega) = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 = 5 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 + b^2 - 4b + 4 = 5$ **(1)**
* $d(M, \Omega') = 5 \Leftrightarrow (a+b)^2 + (b+2)^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 + b^2 + 4b + 4 = 25$ **(2)**

Ainsi, (2) – (1) donne 4a + 8b = 20, c'est-à-dire a + 2b = 5, soit **a = 5 -2b.**

Remplaçons a dans (1) par sa valeur : on aura

$(5-2b)^2 - 2(5-2b) + 1 + b^2 - 4b + 4 = 5 \Leftrightarrow 25 - 20b + 4b^2 - 10 + 4b + b^2 - 4b = 0$

Page 3

soit $5b^2 - 20b + 15 = 0$ ou bien $b^2 - 4b + 3 = 0$ c'est-à-dire $(b-1)(b-3) = 0$, ce qui entraîne $b - 1 = 0$ ou $b - 3 = 0 \Leftrightarrow b = 1$ ou $b = 3$.

**Pour b = 1**, on a $a = 5 - 2(1) = 3$

**Pour b = 3**, on a $a = 5 - 2(3) = -1$

**Conclusion : (C ) et (C') sont sécants aux points A(3, 1) et B(-1, 3).**

(*Remarque : on peut aussi pour cette démonstration vérifier tout simplement que* $|R - R'| < \Omega\Omega' < R + R'$)

**3) * Vérifions que (3, 1)$\in$(C).**

On a $3^2 + 1^2 - 2(3) - 4(1) = 9 + 1 - 6 - 4 = 0$ . **Donc (3, 1)$\in$(C).**

*** Equation de la tangente (T) à (C) en ce point A(3, 1) .**

Nous savons que si (C) a pour équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ *et* $A(x_0, y_0)$, alors une équation de la tangente à (C) en A est de la forme : $x_0x + y_0y - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0$ .

Dans ce cas, (C) a pour équation $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ et A(3, 1). Ainsi, (T) a pour équation $3x + y - (x+3) - 2(y+1) = 0$, soit **(T) : $2x - y - 5 = 0$.**

**Autre méthode :** Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (T)$, A(3, 1) et $\Omega$ (1, 2).

On a $\overline{AM} \cdot \overline{A\Omega} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2(x-3) + (y-1) = 0$

$\Leftrightarrow -2x + y + 5 = 0$;, soit **(T) : $2x - y - 5 = 0$.**

**4) Montrons que la droite (T) coupe le cercle (C') en deux points que l'on précisera.**

Il suffit de résoudre le système $\begin{cases} y = 2x - 5 & (1) \\ x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0 & (2) \end{cases}$

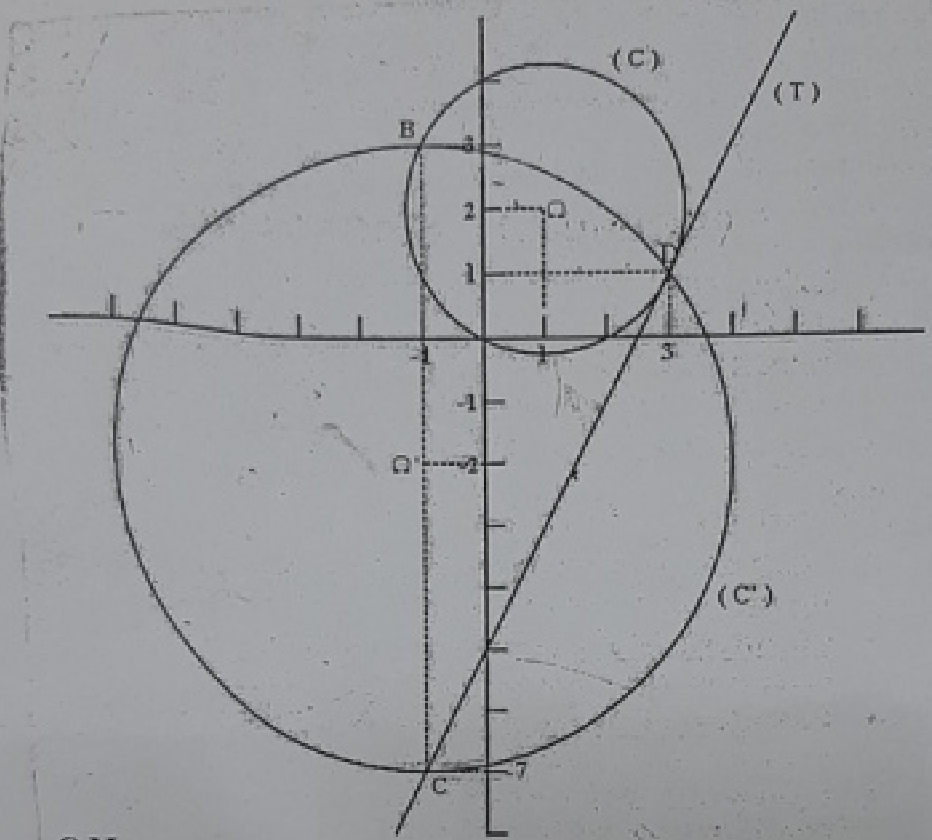
(1) dans (2) donne : $x^2 + (2x - 5)^2 + 2x + 4(2x - 5) - 20 = 0 \Leftrightarrow$
$x^2 + 4x^2 - 20x + 25 + 2x + 8x - 20 - 20 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 10x - 15 = 0$ ou bien **$x^2 - 2x - 3 = 0$.**

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 16 = 4^2$ . $x_1 = \dfrac{2-4}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{2+4}{2} = 3$ .

Ainsi, pour $x = -1$, $y = -7$ et pour $x = 3$, $y = 1$.

**Conclusion : (T) coupe (C') aux points C(-1, -7) et D(3, 1).**

**5) Représentation de (C), (C') et (T) dans un repère orthonormé** $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *(unité sur les axes : 0,5cm).*




**6) Montrons que $\forall k \in \mathbb{R}$, $(C_k)$ passe par les points de coordonnées (3, 1) et (-1, 3).**

* On a $3^2 + 1^2 - 2k(3) - 4k(1) + 10k - 10 = 9 + 1 - 6k + 10k - 10 = 0$

Donc $(3, 1) \in (C_k)$.

* On a aussi $(-1)^2 + (3)^2 - 2k(-1) - 4k(3) + 10k - 10 = 10 + 2k - 12k + 10k - 10 = 0$

Donc $(-1, 3) \in (C_k)$.

**Conclusion** : pour tout $k \in \mathbb{R}$, **$(C_k)$ passe par les points de coordonnées (3, 1) et (-1, 3).**