

TD<sub>3</sub> PF<sub>3</sub>-B

**Mathématiques**

**EXERCICE 1 : (4 points)**

- On considère les nombres complexes  $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$  et  $z_2 = -1 - i$
- 1° - Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres complexes. (1 pt)
  - 2° - On pose  $Z = \frac{z_1 z_2}{z_2 - z_1}$ 
    - a) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de  $Z$ ; (1 pt)
    - b) Déterminer le module et un argument de  $Z$ ; (1 pt)
    - c) En déduire les valeurs exactes de cosinus et sinus  $\frac{5\pi}{12}$ . (1 pt)

**EXERCICE 2 : (6 points)**

- A - Soit la suite  $(U_n)$  définie pour tout  $n$  par : 
$$\begin{cases} U_0 = 7 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n + 6}{5} \end{cases}$$
- 1° - Calculer  $U_1$  et  $U_2$ . (0,5 pt)
  - 2° - On considère la suite  $(V_n)$  définie pour tout  $n$  par  $V_n = U_n - 2$ 
    - a) Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique. En préciser le premier terme et la raison; (1 pt)
    - b) Exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$ . En déduire l'expression de  $U_n$  en fonction de  $n$ ; (1 pt)
    - c) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ ; Conclure. (0,5 pt)
- B - ABC est un triangle isocèle en B tel que  $AB = BC = 3$  cm et  $AC = 5$  cm
- 1° - Construire le triangle ABC. (1 pt)
  - 2° - Déterminer et construire le barycentre D des points  $(A, 1)$ ;  $(B, -1)$  et  $(C, 3)$ . (1 pt)
  - 3° - Déterminer l'ensemble  $(\Delta)$  des points M du plan tels que  $MA^2 - MB^2 = AB^2$ . (1 pt)

**PROBLEME : (10 points)**

- Soit la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par :
- $$\forall x \in ]+\infty, -1[ , f(x) = -x^2 - 5x - 2$$
- $$\forall x \in [-1, +\infty[ , f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+3}$$
- 1.a) Déterminer l'ensemble de définition de  $D_f$  de  $f$ ; (0,25 pt)
  - b) Montrer que pour tout réel de  $[-1, +\infty[ , f(x) = x - 5 + \frac{16}{x+3}$ . (0,25 pt)
  - 2° - Etudier la dérivabilité de  $f$  au point d'abscisse  $x_0 = -1$ . (1,5 pt)
  - 3° - Etudier les variations de  $f$  sur  $D_f$ . (3 pts)
  - 4° - Soit  $(C)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé :
    - a) Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point A d'abscisse  $-1$ ; (0,5 pt)
    - b) Démontrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x - 5$  est asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$ . (0,5 pt)
  - 5° - Déterminer les points d'intersection de la courbe  $(C)$  avec l'axe des abscisses. (1,5 pts)
  - 6° - Construire  $(T)$ ,  $(D)$  et  $(C)$ . (2 pts)
  - 7° - Déterminer suivant les valeurs du réel  $m$ , le nombre de points d'intersection de la courbe  $(C)$  et de la droite d'équation  $y = m$ . (1 pt)