Support de cours proposé par NKWAMO EDDY FERNAND

Cours de Mathématiques niveau PA_1 COSBER

Leçon 2

TYPES DE DENOMBREMENT

I- Les p-listes ou p-uplets

Activité

Soit $E=\{0,1\}$

a) Déterminer les ensembles E^2 et E^3

b) Déterminer le nombres de deux chiffres d'éléments de E

c) Déterminer le nombres de nombres de trois chiffres d'éléments de E

Définition

Soit E un ensemble et p un entier naturel superieur ou égal 2. On appelle p-liste ou p-uplet tout élement de l'ensemble E^p. C'est un élément de l'ensemble $E^p = \underbrace{E \times E \times E \times \cdots \times E}_{p \text{ fois}}$

Propriété

Le nombre de p-liste de E est $card(E^p) = n^p$

Critère de reconnaissance

— L'ordre des éléments d'une p-liste compte et une p-liste peut avoir plusieur fois un même element

— On utilise les p-listes dans les tirages successifs avec remise

— Deux p-listes différents soit par la nature, soit par l'ordre des éléments qui les constituent.

Exemple

Ex1) Le tirage successif avec remise de p objet parmi n objet est une p-liste d'éléments de l'ensemble des n objets. Le nombre de tirage est n^p.

Ex2) Déterminons le nombre de façon distinctes de ranger 3 livres dans 4 tiroirs sachant qu'on peut placer plusieurs livres dans un même tiroir.

Le premier livre a 4 possibilités d'être rangés; lorsqu'il est rangé le second a aussi 4 possibilités d'être rangé et le troisième 4 possibilités. On a $4\times4\times4=4^3$ dispositions possibles de ces trois livres dans les quatre tiroirs.

II- Arrangements

Soit E un ensemble fini à n éléments et p un entier naturel non nul tel que $p \leq n$. On appelle arrangement de p éléments de E, toute p-liste ou tout p-uplet d'éléments deux à deux distincts de E

Propriété

soit n et p des entiers naturels tels que $p \leq n$. Le nombre d'arrangements de p éléments ~~de E, tout~~ d'un ensemble E à n éléments, A_n^p, est tel que: $A_n^p = n(n-1)(n-2)---(n-p+1)$

Remarque

1) Le nombre de facteurs de produits $n(n-1)---(n-p+1)$ est égal à p. ainsi, A_4^3 est le produits de trois entiers consécutifs dont le plus grand est 4: $A_4^3 = 4 \times 3 \times 2$
$= 24$

2) On ne peut demontrer un arrangement de p elements d'un ensemble à n éléments si $p > n$

III- Les permutations

— Soit E un ensemble à n éléments. Une permutation d'élément de E est un arrangement des n éléments ou une n-liste d'éléments distinct de E.

— Le nombre de permutation d'élément d'un ensemble à n est

$A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times --- \times 2 \times 1$

A_n^n est note $n!$ et $n!$ se lit «factorielle n»

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times --- \times 2 \times 1$

— Par convention $0! = 1$.

On a aussi: $(n+1)! = (n+1) \times n!$
$= (n+1) \times n \times [(n-1)!]$

— Pour tout entier $p \leq n$, $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Remarque

Soit n un entier naturel non nul. $n!$ est le produit de tous les entiers naturels non nul inferieurs ou égaux n

Exemple

1) $0! = 1$; $1! = 1$

2) $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$
$= 120$ ou encore $5! = 3! \times 4 \times 5$

3) $\frac{6!}{4!} = 6 \times 5$; $\frac{15!}{8!} = 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9$

$\frac{11!}{3! \times 8!} = \frac{11 \times 10 \times 9}{1 \times 2 \times 3}$
$= 165$

IV Combinaison

Soit n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$.

— Une combinaison de p elements parmi n éléments d'un ensemble E est un sous-ensemble de E ayant p élément.

Exemple : Si $E = \{a; b; c; d; e; f\}$, le sous ensemble $A = \{a; c; e\}$ est une combinaison de 3 éléments pris parmi les 6 éléments de E.

Une combinaison de p éléments génère p! arrangements d'élément de E p à p

— Nombre de combinaison $= \dfrac{\text{Nombre total d'arrangement d'élément de E p à p}}{p!}$

— le nombre de combinaisons d'éléments de E p à p est $= \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$. ($n = \text{card } E$)

le nombre de combinaison de p élément pris parmi n est noté C_n^p

— $C_n^0 = 1$; $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$; $C_n^1 = n$ et $C_n^{n-p} = C_n^p$

$C_n^n = 1$

Exemple

1) $C_{15}^7 = \dfrac{15!}{(15-7)!\,7!} = \dfrac{15!}{8!\,7!} = \dfrac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \dfrac{32\,432\,400}{5040} = 6435$

2) Un tirage simultané de p objets pris parmi n ($p \leq n$) objets est une combinaison de p objets pris parmi n et le nombre total est $C_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$

3-a) Calculons le nombre de façons de tirer simultanement 4 cartes parmis 32.

Tirer 4 parmi 32 revient à constituer une partie à 4 éléments d'un ensemble à 32 éléments. Soit C_{32}^4 Combinaisons or

$C_{32}^4 = \dfrac{A_{32}^4}{4!} = \dfrac{32 \times 31 \times 30 \times 29}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$

b) Determinons le nombre de combinaisons de 5 cartes ayant exactement 3 «as». Dans un jeu de trente deux cartes, il y a exactement 4 «as» et 28 autres cartes.

On a C_4^3 groupes de trois as et C_{28}^2 groupes de deux autres cartes. Pour avoir la combinaison demandée, il suffit d'associer à chaque groupe de 3 «as», un groupe de 2 autres cartes n'ayant pas d'«as». Le nombre demande $C_4^3 \times C_{28}^2$

c/ Avoir au plus trois trèfles, c'est avoir 0, 1, 2 ou 3 trèfles. Il y a 8 trèfles dans un jeux de 32 cartes

Le nombre de mains ayant 0 trèfles est $C_8^0 \times C_{24}^5$

Le nombre de mains ayant 1 trèfles est $C_8^1 \times C_{24}^4$

Le nombre de mains ayant 2 trèfles est $C_8^2 \times C_{24}^3$

Le nombre de mains ayant 3 trèfles est $C_8^3 \times C_{24}^2$

d'où au total on a: $C_8^0 \times C_{24}^5 + C_8^1 \times C_{24}^4 + C_8^2 \times C_{24}^3 + C_8^3 \times C_{24}^2$

Critère de Reconnaissance

On prend p objet parmi n ($p \leq n$), sans ordre et répétion

On utilise les combinaison dans les tirage simultanés

Exercice

I) On tire simultanement et hasard cinq cartes d'un jeu de trente deux cartes.

I-1) Déterminer le nombre de mains ayant exactement un roi

I-2) Déterminer le nombre de mains ayant au moins un roi

II) Un groupe de trois élèves d'une classe de première ayant 24 élèves doit aller chercher des livres à la bibliothèque. Combien de groupes peut-on ainsi former?

III) Un tournoi sportif à 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois. Combien de matchs peut on programmer?

IV) Au loto, il y a 49 numéros. Une grille de loto est composée de 6 de ces numéros. Quel est le nombre de grille que l'on peut former?