Support de cours proposé par NKWAMO EDDY FERNAND

Cours de Mathematique niveau P_{A4} COSBER

Chap : Dénombrement

Leçon 1 : Outils de resolution de quelques problèmes de denombrement

I- Notion d'ensemble fini

I-1 Cardinal d'un ensemble fini

Activité

$A = \mathbb{N}$; B est l'ensemble des entiers naturels inferieure à 20; $C = [-4;5]$;
$D = \mathbb{R}$; $E = \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$; F est l'ensemble des nombres premiers.
$G = \{0; 2; 4; 6; 8\}$

a) Parmi les ensembles de nombres réels ci-dessous, quels sont ceux dont on connait le nombre exact des éléments

b) Pour chacun des ensembles ayant un nombre exact d'éléments, préciser ce nombre

Definition 1: On appelle cardinal d'un ensemble E, le nombre d'element de E; On note card E.

Remarque: Si E possède un nombre fini d'éléments on dit que E est un ensemble fini. dans le cas contraire, on dit que E est infini.
Un ensemble qui n'a aucun élément ou qui admet un nombre fini d'element est un ensemble fini.
Le nombre exact des éléments d'un ensemble fini E est le cardinal de E et est noté Card(E).
Le cardinal d'un ensemble vide est zero c'est-à-dire $Card(\emptyset) = 0$

Exemple:

$E = \{a; b; c; d; e\}$ est un ensemble fini et $card(E) = 5$

Certains ensembles ne sont pas finis tels que; $\mathbb{N}$; $\mathbb{R}$; $[3;8]$

Definition 2: On appelle ensemble des parties d'un ensemble E, l'ensemble noté $\mathcal{P}_E$ dont les élément sont les parties de E

Propriété: Si E est un ensemble fini alors $Card\, \mathcal{P}_E = 2^{card\, E}$

I-2 Opération sur l'ensemble des parties d'un ensemble

Activité

Soit $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 5, 7, 8, 9\}$; $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 8\}$; $B = \{0, 2, 4, 6, 7, 9\}$

a) Ecrire l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B. On note $A \cup B$

b) Ecrire l'ensemble des éléments appartenant à A et à B. On le note $A \cap B$

c) Ecrire l'ensemble des éléments appartenant à A et n'appartenant pas à B on le note $A-B$

d) Ecrire l'ensemble des éléments appartenant à E et n'appartenant pas à A. On le note $\overline{A}$.

e) Determiner $Card(A \cap B)$; $Card(A \cup B)$; $Card(A-B)$ et $Card(\overline{A})$

Définitions:

Soit E un ensemble non vide, A et B des parties de E.

1) On appelle reunion de A et B, l'ensemble des éléments de E appartenant à A ou à B. On note $A \cup B$ et on lit « A union B ». $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$

2) On appelle intersection de A et B l'ensemble des elements de E appartenant à A et à B. On $A \cap B$ et on lit « A inter B ». $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$

3) On appelle difference de l'ensemble A et l'ensemble B, l'ensemble des éléments de E appartenant à A et n'appartenant pas à B. On note $A-B$ et on lit « A moins B ». $A-B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$

4) On appelle Complementaire de A dans E, l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A. On note $\overline{A}$ ou C_E^A et on lit « Complementaire de A dans E »

Propriétés:

Soit E un ensemble fini non vide, A et B des parties de E.

1) $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$

2) $Card(A-B) = Card(A) - Card(A \cap B)$

3) $Card(\overline{A}) = Card(E) - Card(A)$

Remarque:

Si l'intersection des ensembles A et B est vide, on dit que les ensemble A et B sont disjoints.

Exercices

I1 Soit $E = \{a, b, c, d\}$

a) Determiner $\mathcal{P}_E$

b) Determiner Card $\mathcal{P}_E$

I2- Denombrer le nombre de parties d'un ensemble à six éléments

II Soit E l'ensemble des chiffres de la numération décimal

II-1 Ecrire les éléments de E

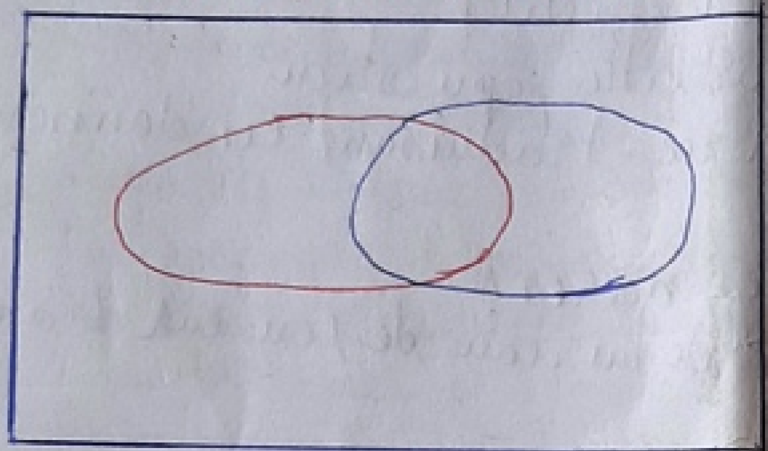
II-2 Determiner l'ensemble B des éléments de E qui sont impaires et et l'ensemble A des éléments de E qui sont paires

II- Supports graphiques pour le dénombrement

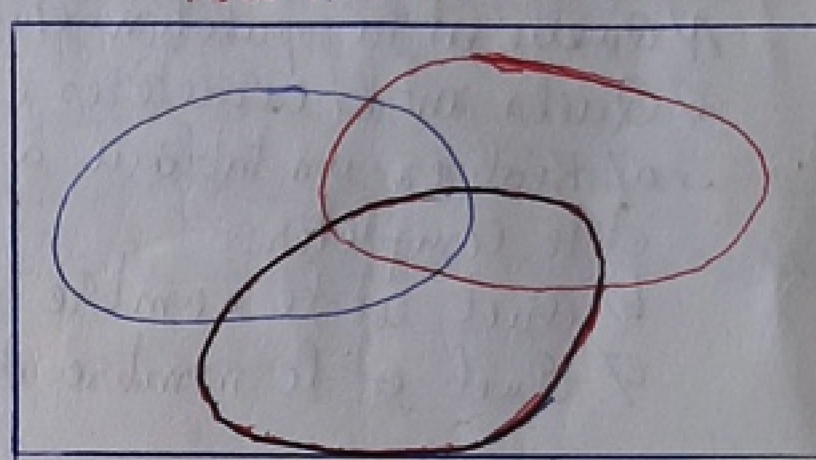
II-1 Utilisation des diagrammes

Les informations portant sur une population finie peuvent être representées par des diagramme dits de Venn. Cette representation permet de regrouper les éléments ayant une même propriété dans une courbe fermée désignant un sous-ensemble de la population, laquelle est representée par un grand rectangle ou une grande courbe fermée entourant tous les sous ensembles. Il y est facile d'observer les éléments communs à deux ou plusieurs sous ensembles

Avec deux ensemble



Avec trois ensembles



II-2 Utilisation des tableaux à double entrée ou produit cartésien

Quand on étudie deux caractères sur une même population, et qu'à chaque caractère correspond un couple de valeurs, on peut presenter toutes les eventualités sous forme d'un tableau appelé tableau à double entrée

Definition: Soit E et F deux ensembles non vides.
Le produit cartésien de E par F est l'ensemble des couples (a, b) tels que a est un élément de E et b un élément de F. On note $E \times F$ et on lit E croise F

Remarque

1) Plus généralement, le produit cartésien de p ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_p$ est l'ensemble des éléments $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ tels $x_1 \in E_1$; $x_2 \in E_2$; $\ldots$; $x_p \in E_p$. Il est noté $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$

2) Le produit cartésiem $\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{p \text{ fois}}$ est noté E^p

3) Un élément du produit cartésiem de p ensembles $(p \geq 2)$ est appelé une p-liste ou une p-uplet.

Propriété: Soit E et F deux ensemble finis.

$$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F)$$

Remarques:

1/ Pour tous ensembles finis $E_1, E_2, E_3, ---E_p$, on a:
$Card(E_1 \times E_2 \times --- E_p) = Card(E_1) \times Card(E_2) \times --- \times Card(E_p)$

2/ Si E est un ensemble fini alors $Card(E^p) = [Card(E)]^p$

Exemples:

Un magasin souhaite faire une promotion des lampes de bureau et des lampes de salon. Ces lampes sont de couleur rouge, noire ou blanche sur ~~les~~ 200 lampes 25% sont des lampes de salon et 30% des lampes blanches. Il y'a 60 lampes rouges et avec 20% de la lampes de salon le quart des lampes noires sont des lampes de salon.

1/ Quelle est la population étudiées et son effectif?

2/ Quels sont les caractères étudiés sur cette population

3-a/ Réaliser un tableau à double entrées traduisant ces données et le completer.

b/ Quel est le nombre de lampes noires?

c/ Quel est le nombre de lampes de bureau de couleur blanche

Solution

1/ La population est constitué des lampes. Son effectif est 200

2/ Les deux caractères étudiés sont; le type de lampe et les couleures de lampes.

3-a/ Le nombre de lampes de bureau puis de salon est de

- Sur 200 lampes, 25% sont des lampes de salon, soit au total $\frac{200 \times 25}{100} = 50$ lampes; $200 - 50 = 150$ sont des lampes de bureau

Determinons le nombre de lampes de chacunes des couleurs

- 30% des lampes sont blanches, soit un total de $\frac{200 \times 30}{100} = 60$ lampes
- Il y'a 60 lampes rouges donc il y'a $200 - 60 - 60 = 80$ lampes noires
- Sur 60 lampes rouges, 20% sont des lampes de salon, soit $\frac{60 \times 20}{100} = 12$ lampes de salon
- Le nombre lampes rouge de bureau est $60 - 12 = 48$.
- Le quart des lampes noires sont des lampes de salon, soit un total de $80 \times \frac{1}{4} = 20$ lampes.
- Le nombre de lampes de bureau noire est de; $80 - 20 = 60$
- Le nombre de lampes de bureau blanches est de; $150 - 48 - 60 = 42$
- Le nombre de lampes de salon blanches est de; $50 - 12 - 20 = 18$

On obtient le tableau suivant;

	blanche	Noire	Rouge	total
Lampe de bureau	42	60	48	150
lampe de salon	18	20	12	50
total	60	80	60	200

b) Il y a 60 lampes rouges, donc il y a $200-60-60=80$ lampes noires

c) Le nombre de lampes de bureau blanches est égal à $150-48-60=42$

Exemple 2 :

Un joueur dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de six étiquettes marquées chacune par une voyelle de l'alphabet français.

Le jeu consiste à lancer le dé, puis à tirer au hasard une étiquette. Chaque résultat du jeu est inscript sous forme de couple. Par exemple, le couple (3; a) représente le résultat « obtenir 3 avec le puis tirer l'étiquette marquée a »

a) Recopier et compléter le tableau suivant :

Numéro / étiquette	1	2	3	4	5	6
a	(1; a)	(2; a)	(3; a)	(4; a)	(5; a)	(6; a)
e	(1; e)	(2; e)	(3; e)	(4; e)	(5; e)	(6; e)
i	(1; i)	(2; i)	(3; i)	(4; i)	(5; i)	(6; e)
o	(1; o)	(2; o)	(3; o)	(4; o)	(5; o)	(6; o)
u	(1; u)	(2; u)	(3; u)	(4; u)	(5; u)	(6; u)
y	(1; y)	(2; y)	(3; y)	(4; y)	(5; y)	(6; y)

b) Déterminer le nombre de couples formés

Solution

a) Voir le tableau de l'énoncé

b) Le nombre de couple formé est de $6 \times 6 = 36$

II-3 Utilisation de l'arbre de choix

Activité

Voici la liste de plats que l'on peut trouver sur la carte d'un restaurant.

- Entrée : salade (S) ou Macédoine (M)
- Plat du jour : Poisson braisé (P) ou Ndolé Viande de bœuf (V) ou bouillon de plantain (B)

- Dessert : Ananas (A) ou Orange (O)

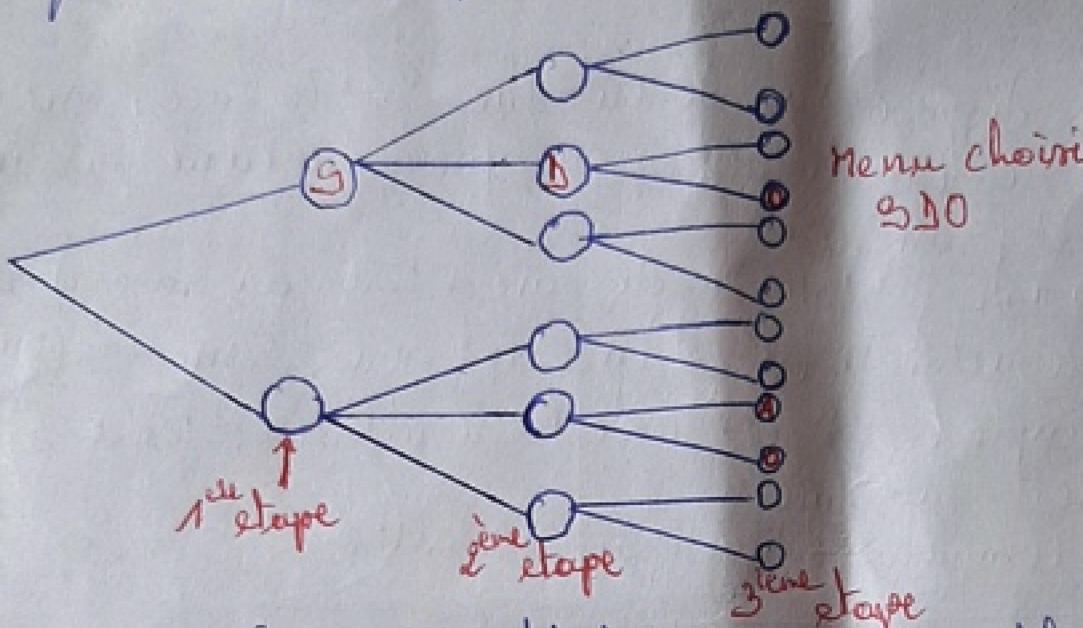
L'objectif est déterminer tous les menus composés d'une entrée, d'un plat du jour et d'un dessert que l'on peut commander.

a) Combien d'étapes a-t-on pour le choix d'un menu ?

b) Que represente chaque étape ?

c) Combien de possibilités a-t-on pour chacune de ces étapes ?

d) Reproduire et compléter l'arbre ci-~~contre~~ dessous.



e) En deduire le nombre total de menus possible.

- L'arbre de choix permet de realiser l'ensemble des choix possibles. Le nombre total de choix est égal au nombre de branche de l'arbre, correspondant également au nombre de sorties de l'arbre
- A chaque étape d'un arbre, il y'a des ramifications où le passage d'une étape à la suivante se fait par multiplication du nombre de ramification obtenues par le nombre de cas qu'offre l'étape.

Exercice

Dans la classe de 1ère L d'un lycée il y a 80 élèves dont 30. 69 élèves dont le garçon ont pour première langue l'anglais, les autre font de l'allemand en première langue.

1) Compléter le tableau suivant par des effectifs

Sexe / 1ère langue	Garçon	fille	total
Anglais			
Allemand			
Total			

2) Compléter l'arbre ~~suivant~~ ci-contre.