3- Image directe et image réciproque d'un intervalle.

Définition 1

f étant une fonction définie d'un ensemble A vers un ensemble B, D une partie de A, on appelle **Image directe de D**, l'ensemble des images par f de tous les éléments de D. On note $f(D)$.

Exemple : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 - 3x + 2$

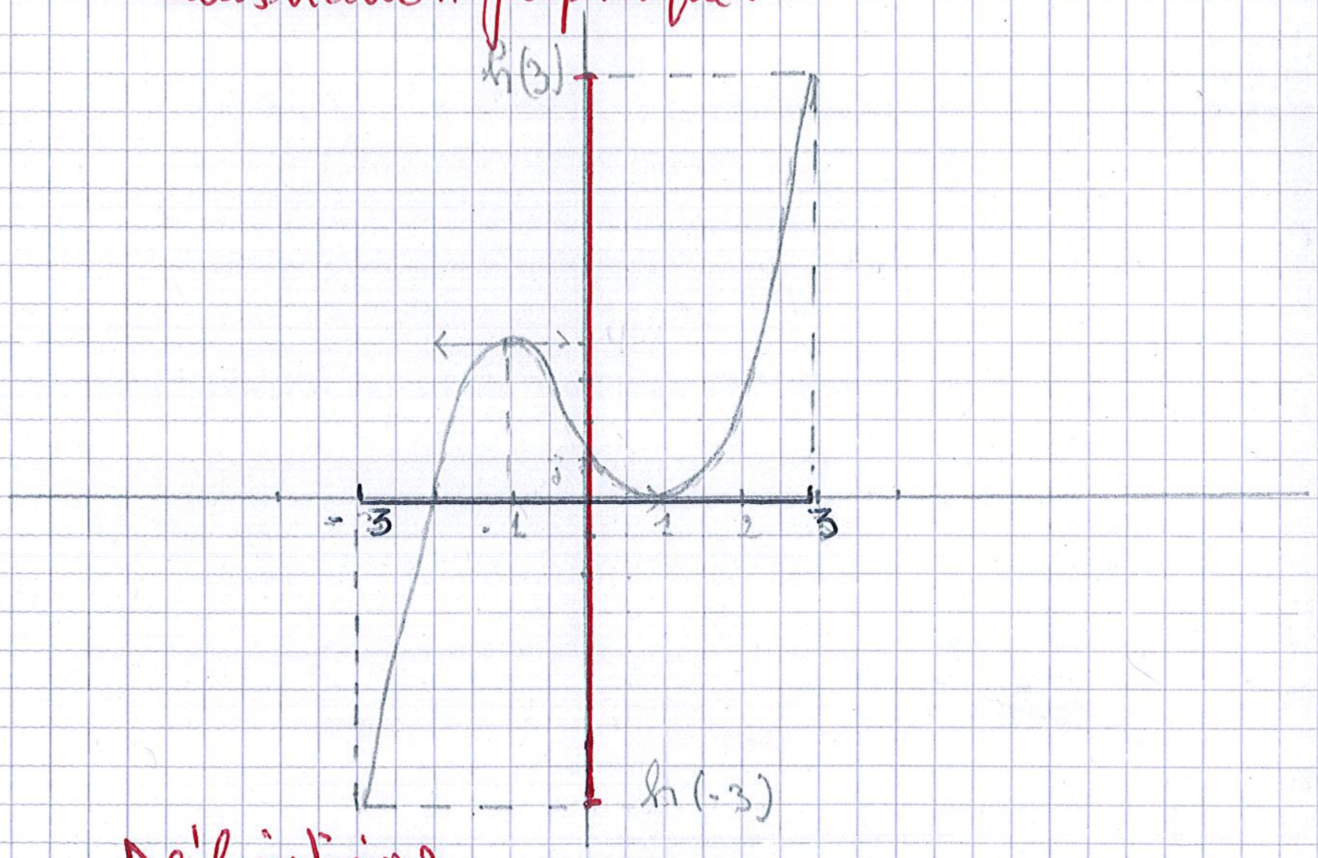
l'image directe de $E = [-3 ; 3]$ est $E' = [h(-3) ; h(3)]$

or $h(-3) = (-3)^3 - 3\times(-3) + 2 = -27 + 9 + 2 = -16$

$h(3) = 3^3 - 3\times 3 + 2 = 27 - 9 + 2 = 20$

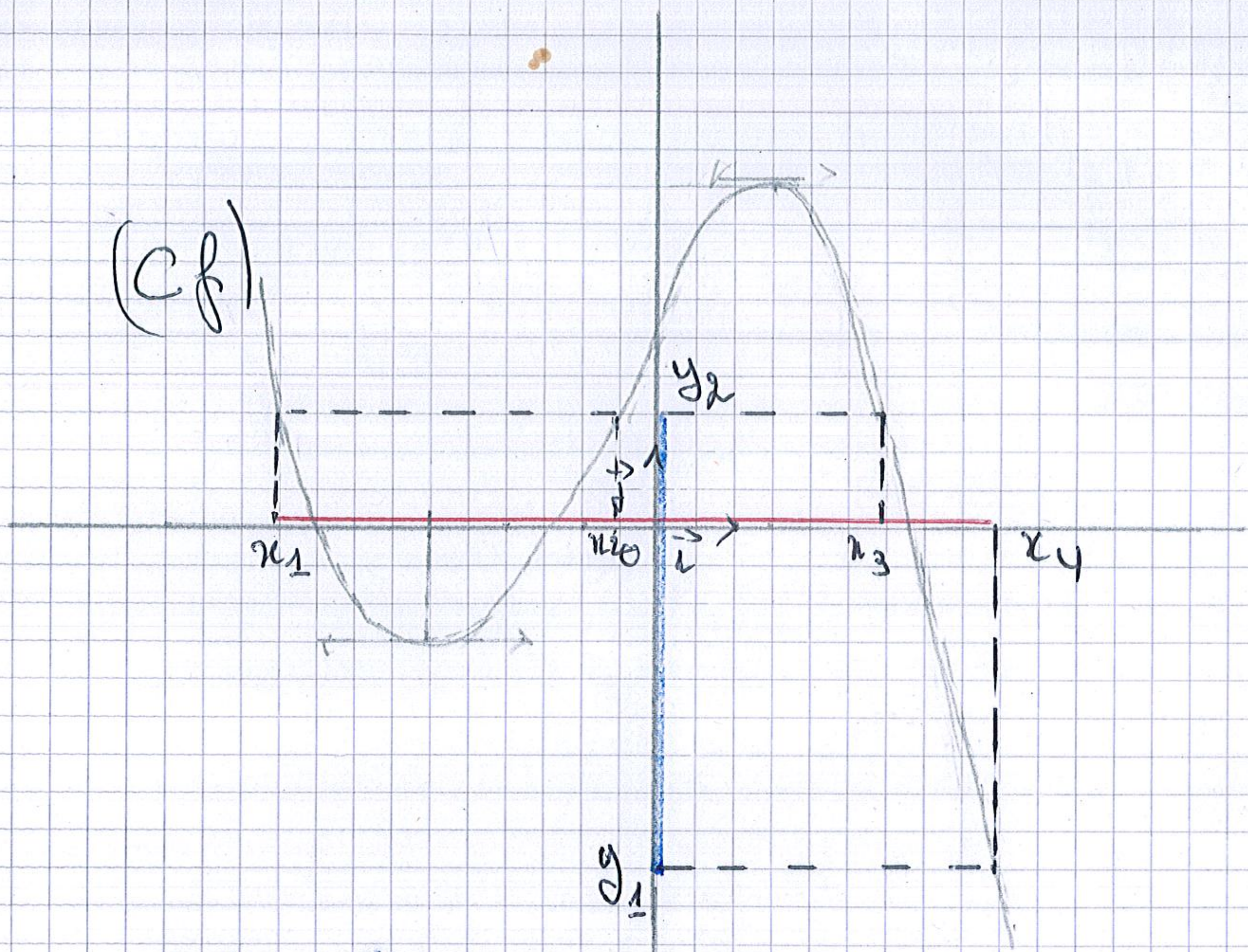
soit $h(E) = E' = [-16 ; 20[$

Illustration graphique :



Définition 2.

f étant une fonction définie de A vers B, E une partie de B, on appelle **Image réciproque de E**, l'ensemble des antécédents de tous les éléments de E.



$$f^{-1}(E) = f^{-1}[y_1\,;\,y_2] = [x_1\,;\,x_4]$$

III - Variations d'une fonction

1 - Extremums d'une fonction :

Activité :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 9x$.

Soient les ensembles $I = [-4\,;\,0]$ et $J = [0\,;\,4]$

1 - Calculer $g(-3)$, $g(-4)$; $g(-2)$, $g(-1)$ $g(0)$ $g(1)$; $g(-\sqrt{3})$, $g(2)$; $g(\sqrt{3})$, $g(3)$ et $g(4)$

2 - Que peut-on dire de $g(-\sqrt{3})$ par rapport aux images des éléments de I.

Qu'en est-il des $(\sqrt{3})$ par rapport aux images des éléments de J.

Solution :

1 - Calcul

$g(-4) = (-4)^3 - 9 \times (-4) = -64 + 36 = -28$

$g(-3) = (-3)^3 - 9 \times (-3) = -27 + 27 = 0$

$g(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^3 - 9\times(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}+9\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

$g(-2) = (-2)^3 - 9\times(-2) = -8 + 18 = 10$

$g(-1) = (-1)^3 - 9\times(-1) = -1+9 = 8$

$g(0) = 0^3 - 9\times 0 = 0$

$g(1) = 1^3 - 9\times 1 = 1-9 = -8$

$g(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 - 9\times(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$

$g(2) = 2^3 - 9\times 2 = 8 - 18 = -10$

$g(3) = 3^3 - 9\times 3 = 27 - 27 = 0$

$g(4) = 4^3 - 9\times 4 = 64 - 36 = 28$

2- on constate que $-28 < 0 < 8 < 10 < 6\sqrt{3}$

soit $g(-4) < g(-3) < g(-1) < g(-2) < g(-\sqrt{3})$

on peut dire $g(-\sqrt{3})$ est le plus grand des images des éléments de I

De même $28 > 0 > -8 > -10 > -6\sqrt{3}$

soit $g(4) > g(3) > g(1) > g(2) > g(\sqrt{3})$

on peut dire $g(\sqrt{3})$ le plus petit des images des elements de J

Définition

f étant une fonction numerique definie sur un intervalle I et a un element de I,

- si $\forall x \in I$, $f(a) > f(x)$, alors $f(a)$ est **le maximum** de f sur I.
- si $\forall x \in I$, $f(a) < f(x)$, alors $f(a)$ est **le minimum** de f sur I.

2 - Sens de variation d'une fonction.

Soit une fonction numerique f, définie sur un intervalle J.

- Si $\forall (a;b) \in J^2$, $f(a) \leq f(b)$, $a<b$ alors f est dite **croissante** sur J.

x	a	b
$f(x)$	$f(a) \nearrow$	$f(b)$

- si $\forall (a,b) \in J^2$, $a < b$, $f(a) > f(b)$, alors f est dite decroissante sur l'intervalle J

x	a	b
$f(x)$	$f(a) \searrow$	$f(b)$

- si $\forall (a,b) \in J^2$, $a < b$, $f(a) = f(b)$ alors f est dite constante sur J.

x	a	b
$f(x)$	$f(a) \longrightarrow$	$f(b)$

N.B.

- une fonction est dite **monotone** sur un intervalle J lorsqu'elle est
  - soit strictement croissante sur J
  - soit strictement decroissante sur J.
- Les variations d'une fonction sont illustrées dans un tableau appelé **tableau de variation**.

Exemple : Le tableau de la fonction $g(x) = x^3 - 9x^2$ definie sur $J = [-4; 4]$ est :

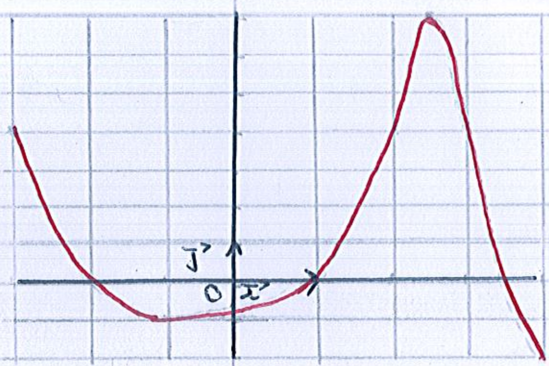
x	-4	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	4
$g(x)$	$-28 \nearrow$	$6\sqrt{3} \searrow$	$-6\sqrt{3} \nearrow$	28

CLASSE : 2F3 ET 2F4 - BA

TD2

EXERCICE 1 :

(C_f) est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.



1- Déterminer graphiquement l'image par f de chacun des nombres réels suivants :
-3 ; -2 ; 3 ; 4

2- Déterminer graphiquement les antécédents par f de chacun des nombres réels suivants :
-2 ; 0 ; 4 ; 7

EXERCICE 2 :

On donne ci dessous les courbes d'une fonction d'une fonction numérique f.

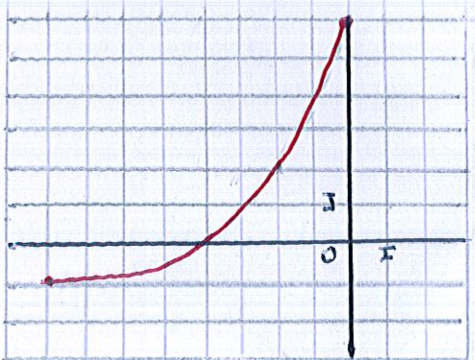


fig 1

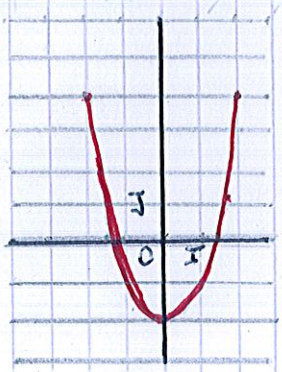


fig 2

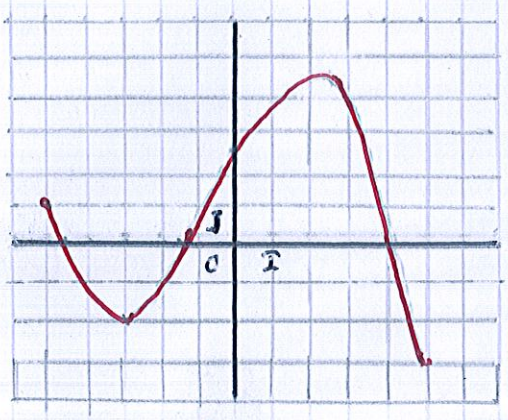


fig 3

1. Dans chaque cas, étudier les variations de la fonction f sur son ensemble de définition et dresser son tableau de variation

2 - Considérant la figure 3
a) l'image directe de l'intervalle $[-3 ; 4]$
b) L'image réciproque de l'intervalle $[-3 , \frac{5}{2}]$